Физика

УДК 51.37

DOI: 10.31429/vestnik-17-3-60-64

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В АЗОВСКОМ МОРЕ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

ANALYTICAL TEST PROBLEM OF WIND CURRENTS IN THE SEA OF AZOV

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia
e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. Numerical modeling of dynamic processes in reservoirs is of great importance for solving urgent problems of environmental monitoring. Due to the increase in computing power of the used computer systems, it became possible to make significant progress in this issue, mainly by reducing the steps in space and time. However, problems related to the development of the models themselves, difference schemes and methods for their numerical implementation are of great scientific interest. Comparison and analysis of the results of calculations based on a particular model describing dynamic processes in the ocean is most often carried out based on the ideas about the flow of dynamic processes and the experience of the researcher. Therefore, having an accurate (analytical) solution to the problem, we can make a reasonable choice of the schemes and algorithms used. The ocean dynamics models themselves are quite complex, so an analytical solution is not possible for them. But there are analytical solutions for simple statements, such as the Stommel model. In this paper, based on the analytical solution of the three-dimensional problem of wind circulation in a rectangular reservoir with a flat bottom, a solution is obtained that is compared with the numerical solution of a dynamic model with similar input parameters. Input parameters for both models were selected based on the size and average depth of the sea of Azov. The results of calculations showed a good correlation between the obtained solutions. Expressions for barotropic velocity components are given, which can be used for testing and analyzing difference schemes and algorithms in the construction of hydrodynamic models.

Keywords: wind currents, test problem, analytical solution, dynamic model, Azov sea.

Численное моделирование динамических процессов в водоемах, для решения актуальных проблем экологического мониторинга имеет большое значение. В связи с увеличением вычислительных мощностей используемых компьютерных систем появилась возможность существенно продвинуться в этом вопросе, в основном за счет уменьшения шагов по пространству и времени. Но задачи связанные с развитием самих моделей, разностных схем и методов их численной реализации имеют большой научный интерес. Сравнение и анализ результатов расчетов, полученных по той или иной модели, описывающей динамические процессы в океане, чаще всего осуществляется исходя из представлений о протекании динамических процессов и опыта исследователя. Поэтому располагая точным (аналитическим) решением задачи мы можем осуществлять обоснованный выбор используемых схем и алгоритмов. Сами модели динамики океана достаточно сложны, поэтому аналитическое решение для них невозможно. Но существуют аналитические решения для простых постановок, например, модель Стоммела [1–4]. В работе [5] эта задача решена при помощи метода обращения динамического оператора [4] для исследования применяемых вычислительных схем специального вида. В работе [6] рассматривается переход к безразмерной задаче, решение которой позволяет получить аналитическое решение для баротропной компоненты скорости,

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела вычислительной техники и математического моделирования Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

ее трехмерной добавочной части и вертикальной составляющей [7].

Рассмотрим стационарную размерную модель. Пусть поверхность рассматриваемого прямоугольного водоема в плоскости $x0y$ имеет вид

$$\omega_0 = [0,a] \times [0,b]\,,$$

а его глубина $D > 0$ — постоянна. Оси декартовой системы координат направлены таким образом: $0x$ — на восток, $0y$ — на север, $0z$ — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\omega = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in \omega_0,\ 0 \leqslant z \leqslant D\}\,,$$

рассмотрим модель ветровых течений экмановского типа:

$$\begin{cases} -fv = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + E\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ fu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + E\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$t > 0, \quad (x,y,z) \in \omega^0$$

со следующими краевыми условиями:

$$\left\{z = 0,\ (x,y) \in {\omega_0}^0\right\}:\ \rho_0 E\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \qquad \rho_0 E\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \tag{2}$$

$$\left\{z = D,\ (x,y) \in {\omega_0}^0\right\}:\ \rho_0 E\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \qquad \rho_0 E\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \tag{3}$$

$$\{0 \leqslant z \leqslant D, (x,y) \in \partial\omega_0\}: \qquad Un_x + Vn_y = 0. \tag{4}$$

В (4) интегральные скорости определяются следующим образом:

$$U(x,y) = \int\limits_0^D u(x,y,z)dz,$$

$$V(x,y) = \int\limits_0^D v(x,y,z)dz.$$

В (3) принимается следующая параметризация придонного трения:

$$\tau_x^b = \rho_0 R\frac{U}{D}, \quad \tau_y^b = \rho_0 R\frac{V}{D}, \qquad R \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

В соответствии с моделью Стоммела, определим

$$f = f_0 + f_1 y, \quad E \equiv \mathrm{const}; \tag{6}$$

$$\tau_x = -G\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad \tau_y = 0. \tag{7}$$

В работе [6] реализован переход к задаче в безразмерном виде. Поверхность рассматриваемого водоема в плоскости $x0y$, при этом, имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0,r] \times [0,q]\,,$$

глубина его $H > 0$.

В трехмерной области $\Omega = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in \Omega_0,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\ell v = -\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + k\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \ell u = -\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + k\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$(x,y,z) \in \Omega^0$$

с краевыми условиями

$$\left\{t > 0,\ z = 0,\ (x,y) \in {\Omega_0}^0\right\}: \quad k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \qquad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \tag{9}$$

$$\left\{t > 0,\ z = H,\ (x,y) \in {\Omega_0}^0\right\}: \quad k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \qquad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \tag{10}$$

$$\{t > 0,\ 0 \leqslant z \leqslant H,\ (x,y) \in \partial\Omega_0\}: \qquad U \cdot n_x + Vn_y = 0. \tag{11}$$

В (11) интегральные скорости определены как

$$U(x,y) = \int\limits_0^H u(x,y,z)dz,$$

$$V(x,y)=\int\limits_0^H v(x,y,z)dz,$$

в (10) реализуется соответствующая параметризация придонного трения:

$$\tau_x^b=\mu U,\quad \tau_y^b=\mu V,\quad \mu\equiv\text{const}>0. \tag{12}$$

Следуя модели Стоммела, положим

$$\ell=\ell_0+\beta y,\quad k\equiv\text{const}; \tag{13}$$

$$\tau_x=-\frac{Fq}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right),\quad \tau_y=0.$$

Горизонтальные компоненты вектора скорости будем искать в виде

$$u=UH^{-1}+\hat{u},\quad v=VH^{-1}+\hat{v}, \tag{14}$$

где первые слагаемые называются баротропными, а вторые — добавочными составляющими скорости. В работе [7] получено аналитическое решение поставленной задачи. Задавая соответствующие параметры можно получать решения для различных модельных объектов и сравнивать с решением гидродинамических моделей для водоемов с такой упрощенной конфигурацией.

Значения параметров задачи (8)–(13), полученные в результате перехода, следующие:

$$r=\frac{a}{L},\quad q=\frac{b}{L},\quad H=\frac{D}{h};$$

$$k=\frac{E}{f_0h},\quad \ell_0=1,\quad \beta=\frac{f_1}{f_0}L;$$

$$F=\frac{G}{hf_0u_0\rho_0}\frac{\pi}{q};\quad \mu=\frac{R}{Df_0}.$$

В работе [7] получены, например, аналитические выражения для баротропной компоненты поля скорости

$$U(x,y)= \\ =-\frac{F}{\mu(\pi/q)}\left(C_1e^{Ax}+C_2e^{Bx}-1\right)\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right),$$

$$V(x,y)= \\ =\frac{F}{\mu(\pi/q)^2}\left(C_1Ae^{Ax}+C_2Be^{Bx}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{q}\right),$$

$$C_1=\frac{1-e^{Br}}{e^{Ar}-e^{Br}},\quad C_1+C_2=1.$$

В этих выражениях используются обозначения

$$A=-\frac{\beta}{2\mu}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{\pi}{q}\right)^2};$$

$$B=-\frac{\beta}{2\mu}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}.$$

Кроме этого, в работе [7] получены выражения для добавочных компонент.

Найдя решение задачи (8)–(13), решение исходной размерной задачи (1)–(7) определяем по формулам

$$\begin{aligned} u&=u\left(L\bar{x},L\bar{y},h\bar{z}\right)=u_0\bar{u}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right),\\ v&=v\left(L\bar{x},L\bar{y},h\bar{z}\right)=u_0\bar{v}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right),\\ w&=w\left(L\bar{x},L\bar{y},h\bar{z}\right)=w_0\bar{w}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right),\\ w_0&=\frac{hu_0}{L}.\end{aligned} \tag{15}$$

Результаты численных экспериментов

Сравнение полученного аналитического решения рассмотренной модели ветровой циркуляции для используемой прямоугольной области с плоским дном сравнивалось с результатами моделирования по трехмерной динамической модели [8] с соответствующими входными параметрами и параметрами области интегрирования модели, которые задавались для Азовского моря.

Рассмотрим масштабы, характерные, для Азовского моря:

$$a=2{,}5\cdot10^7\ (\text{см})=250\ (\text{км}),$$

$$b=1{,}8\cdot10^7\ (\text{см})=180\ (\text{км}),$$

$$D=1\cdot10^3\ (\text{см})=10\ (\text{м}),$$

$$R=0{,}01\ (\text{см/с}),\quad G=1\ \text{дин/см}^2,$$

$$E=1\ (\text{см}^2/\text{с}),\quad \rho_0=1\ (\text{г/см}^3),$$

$$f_0=10^{-4}\left(\frac{1}{\text{сек}}\right),\quad f_1=2{\cdot}10^{-13}\left(\frac{1}{\text{см}\cdot\text{сек}}\right).$$

Выберем характерные масштабы:

$$L=10^6\ (\text{см}),\quad h=1{\cdot}10^3\ (\text{см}),\quad u_0=10\ (\text{см/с}).$$

Тогда имеем:

$$r=25,\quad q=18,\quad H=1,\quad k=10;$$

$$\ell_0=1,\quad \beta=0{,}002;$$

$$\beta=0 \text{ — при отсутствии } \beta\text{-эффекта};$$

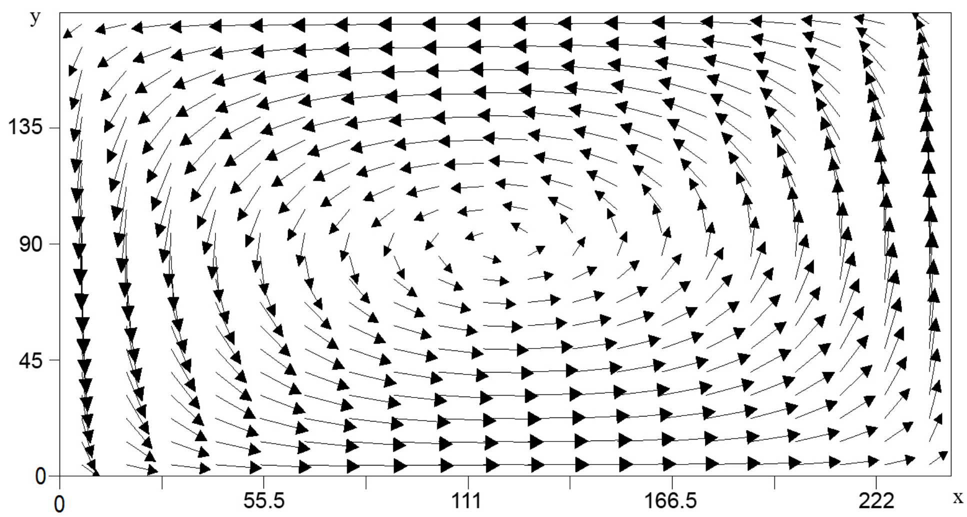

Рис. 1. Поверхностное поле течений (аналитическое решение)

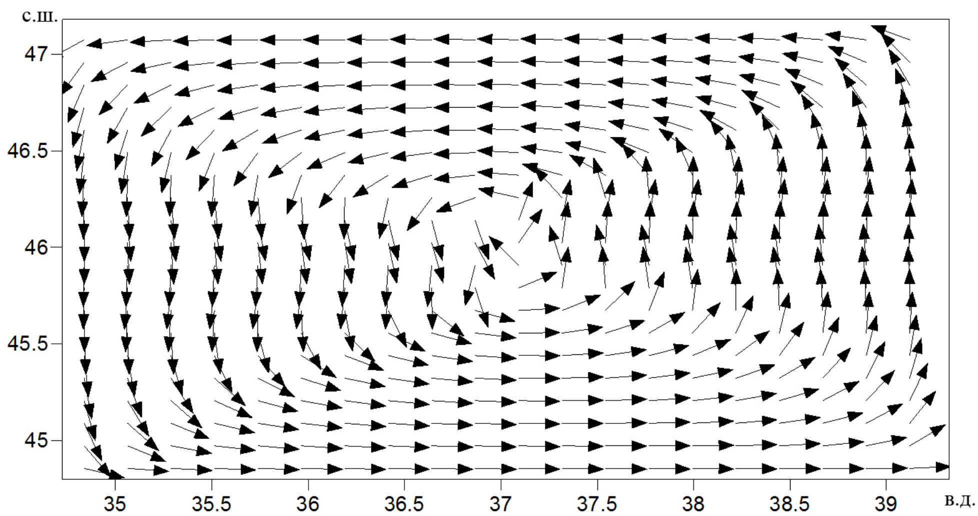

Рис. 2. Поверхностное поле течений (численное решение)

$$F = -\frac{\pi}{q}, \quad \mu = 0{,}1; \quad w_0 = 0{,}01.$$

Ветровое воздействие задавалось в соответствии с заданным F. В северной части области интегрирования ветровое воздействие осуществляется в западном направлении, а в южной части в восточном.

На рис. 1 представлено поверхностное поле течений в заданной области полученное аналитически. Рис. 2 характеризует аналогичное поле, вычисленное по динамической модели [8] с плоским дном в прямоугольной области с аналогичными входными параметрами. Основные отличия у западного и восточного берегов можно объяснить учетом сгонно-нагонных явлений в используемой численной модели. Полученное аналитическое решение может быть использовано для тестирования различных вычислительных схем при интегрировании модели [8]. В работе [7] получены аналитические выражения для различных компонент поля скорости, а в [9] произведено сравнение с полученным точным аналитическим решением разнообразных способов вычисления вертикальной компоненты поля скорости [5,10], что особенно важно при интегрировании динамических моделей водоемов.

Литература

1. *Stommel H.* The gulf stream. A Physical and Dynamical Description. University of California Press. 1965.

2. *Стоммел Г.* Гольфстрим. М.: ИЛ, 1965, 227 с.
3. *Stommel H.* The westward intensification of wind-driven ocean currents // Trans. Amer. Geoph. Un. 1948. Vol. 29. P. 202–206.
4. *Кочергин В.П.* Теория и методы океанических течений. М: Наука, 1978. 127 с.
5. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: Экоси-гидрофизика, 2001. 238 с.
6. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Переход к безразмерной задаче в модели ветровой циркуляции // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019, № 4. Т. 16, С. 25–30.
7. *Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Аналитическая тестовая задача ветровых течений // Процессы в геосредах. 2019, № 2(20). С. 193–198.
8. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
9. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Оценка точности определения вертикальной компоненты скорости при использовании различных вычислительных алгоритмов // Процессы в геосредах. 2019. № 3(21), С. 341–346.
10. *Kochergin V.P., Dunets T.V.* Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins // Physical oceanography. 2001. Vol. 11. Iss. 3. P. 221–232.

References

1. Stommel, H. *The gulf stream. A Physical and Dynamical Description.* University of California Press. 1965.
2. Stommel, G. *Gol'fstrim* [Gulf Stream]. Inostannaya Literatura, Moscow, 1965. (In Russian)
3. Stommel, H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
4. Kochergin, V.P. *Teoriya i metody okeanicheskih techenij* [Theory and methods of ocean streams]. Nauka, Moscow, 1978. (In Russian)
5. Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov* [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol', 2001. (In Russian)
6. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Perekhod k bezrazmernoj zadache v modeli vetrovoj cirkulyacii [Transition to a dimensionless problem in the wind circulation model]. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov CHernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation]. 2019, no. 4, vol. 16, pp. 25–30. (In Russian)
7. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. Analiticheskaya testovaya zadacha vetrovyh techenij [Analytical test problem of wind currents]. *Processy v geosredah* [Processes in geomedia], 2019, no. 2(20), pp. 193–198. (In Russian)
8. Ivanov, V.A., Fomin, V.V. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskih processov v zone more – susha* [Mathematical modeling of dynamic processes in the sea – land zone]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol', 2008. (In Russian)
9. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Ocenka tochnosti opredeleniya vertikal'noj komponenty skorosti pri ispol'zovanii razlichnyh vychislitel'nyh algoritmov [Estimation of the accuracy of determining the vertical component of velocity using various computational algorithms]. *Processy v geosredah* [Processes in geomedia], 2019, no. 3(21), pp. 341–346. (In Russian)
10. Kochergin, V.P., Dunets, T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.

Статья поступила 6 августа 2020 г.