Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-3-65-71

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бушуева О. А.

TOPOLOGICAL DISCRETIZATION OF SOLUTIONS TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS

V. A. Babeshko[1,2], O. V. Evdokimova[2], O. M. Babeshko[1], O. A. Bushueva[1]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. This paper seems to show for the first time that Packed block elements used in solving a boundary value problem by the block element method are elements of a discrete topological space. Since the solutions to boundary value problems belong to a discrete topological space instead of equations, it is possible to obtain a solution in a new coordinate system without having to study the boundary value problem. The block element method used in problems of continuum mechanics, which has a connection with topology, can become more effective in applications if the General properties of topological spaces studied in detail are used more deeply. One of the important properties of topology is the existence of discrete topological spaces. Their characteristic property is that an element that represents the Union of any set of elements in a topological space belongs to a discrete topological space. Belonging of discrete block elements to a topological space means that it is possible to completely cover any area with a piecewise smooth boundary and, thus, an exact solution of the boundary problem in it. In topological space, continuous geometric transformations and transitions to new coordinate systems are possible. In this paper, it is shown that Packed block elements generated by the boundary value problem for the Helmholtz equation, are elements of a discrete topological space. Given that scalar solutions of the Helmholtz equation can describe solutions to a fairly wide set of vector boundary value problems, this property also applies to solutions of more complex boundary value problems.

Keywords: boundary value problems, block element method, packed block elements, discrete topological spaces, Helmholtz equation.

Введение

Применяемый в задачах механики сплошных сред метод блочного элемента, имеющий связь с топологией, может стать более эффективным в приложениях, если более глубоко использовать детально исследованные общие свойства топологических пространств. Одним из важных свойств топологии является существование дискретных топологических пространств. Характерным их свойством является принадлежность дискретному топологическому пространству элемента, представляющего объединение любой совокупности элементов топологического пространства. Принадлежность блочных элементов дискретные топологическому пространству означает возможность полного покрытия любой области с кусочно-гладкой границей и, таким образом, точное решение граничной задачи в ней. В то-

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бушуева Ольга Алексеевна, студентка магистратуры факультета компьютерных технологий и математики Кубанского государственного университета; e-mail: olyabushuyeva@gmail.com.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2020 г. Минобрнауки (проект FZEN-2020-0022), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

пологическом пространстве возможны непрерывные геометрические преобразования, переходы в новые системы координат.

В настоящей работе показано, что упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей для уравнения Гельмгольца, являются элементами дискретного топологического пространства. Учитывая, что скалярные решения уравнения Гельмгольца способны описывать решения достаточно широкого набора векторных граничных задач, то это свойство распространяется и на решения более сложных граничных задач.

В работах [1, 2] обсуждается связь блочных элементов с различными аспектами топологии. В частности, показано, что они представляют собой многообразия с краем, им свойственны гомоморфизмы, карты и атласы. Совокупности блочных элементов сопрягаются построением фактор-топологий фактор-топологических пространств, где в качестве отношений эквивалентности принимаются диктуемые требованиями механики граничные условия сопряжения деформируемых тел Теоретические материалы, связанные с выше изложенными вопросами, представлены в работах [4–7]. Однако теоретические построения нуждаются в реализациях на конкретных примерах. В работе [3] кратко описан пример построения топологической дискретизации в одном из топологических пространств. В настоящей работе дается развернутое и подробное изложение материала на примере построения дискретного топологического пространства решений граничной задачи для уравнения Гельмгольца.

1. Построение дискретного топологического пространства

Объектами топологического пространства является совокупность решений граничных задач для уравнения Гельмгольца. Выбор этих уравнений не случаен. Во-первых, граничные задачи для уравнений Гельмгольца описывают поведение решений антиплоских граничных задач теории упругости. Во-вторых, решения многих более сложных граничных задач теории упругости, термоэлектромагнитодинамики и математической физики представляются в виде суммы решений граничных задач для уравнения Гельмгольца или сводящихся к ним [8–15]. Это значительно упрощает представления точных решений. В ближайшее время впервые будет показано, что блочные элементы граничной задачи для уравнения Гельмгольца позволяют точно удовлетворять граничным условиям в представлении решений сложных граничных задач в ряде неклассических областях, более сложных, чем рассмотренные в [8–10]. В-третьих, эти граничные задачи являются наиболее простыми для иллюстрации новых идей, как и в настоящем случае.

Выполним следующие построения. Рассмотрим во всей плоскости однородное уравнение Гельмгольца вида

$$(\Delta + p^2)g = 0, \quad x_1, x_2 \in R^2 \equiv \Omega.$$

Здесь нет граничной задачи, а потому и блочного элемента, однако для иллюстрации топологической дискретизации рассматриваемое уравнение является наиболее удобным. Начинаем вводить топологическую структуру с самой грубой топологии — тривиальной. Напоминаем, что топологически блочный элемент представляет декартово произведение носителя и решения граничной задачи на носителе, представленного в виде упакованного блочного элемента. В нашем случае имеем $g = \Omega \times 0$. Топологическая структура включает открытые множества в носителе и решениях уравнения в упакованных блочных элементах. Тривиальная топология включает пустое множество и приведенное g. Расширим множество введением в рассмотренном множестве некоторых упакованных блочных элементов. Введем в прямоугольной системе координат $ox_1x_2x_3$ четыре полуплоскости с нормалями к границам, совпадающими с положительными или отрицательными координатными полуосями. Введем их обозначения:

$$\Omega_1(|x_1| \leqslant \infty,\ x_2 > 0), \quad \Omega_2(|x_2| \leqslant \infty,\ x_1 < 0),$$

$$\Omega_3(|x_1| \leqslant \infty,\ x_2 < 0), \quad \Omega_4(|x_2| \leqslant \infty,\ x_1 > 0).$$

В каждой области, рассматриваемой в качестве носителя, решим граничные задачи для уравнения Гельмгольца с приведенными ниже граничными условиями вида

$$(\Delta + p^2)g_n = 0, \quad n = \overline{1{,}4},$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\partial_2 g_1(x_1{,}0) = q_1(x_1), \quad g_1(x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$\partial_1 g_2(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_2(x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

$$\partial_2 g_3(x_1{,}0) = q_1(x_1), \quad g_3(x_1, x_2) \in \Omega_3,$$

$$\partial_1 g_4(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_4(x_1, x_2) \in \Omega_4.$$

Здесь $q_n(x_n)$, $n = 1, 2$ — некоторые гладкие функции.

В дальнейшем введем в рассмотрение двумерный $\mathbf{F}_2$ и одномерный $\mathbf{F}_1$ соответственно операторы преобразования Фурье, положив

$$\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_n),$$

$$Q(\alpha_n) = \mathbf{F}_1(\alpha_n) q(x_n) = \int\limits_l q(x_n) \exp i\alpha_n x_n dx_n,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g(x_1, x_2) = \\ = \iint\limits_\Omega g(x_1, x_2) \exp i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) dx_1 dx_2.$$

Здесь l, Ω являются носителями функций интегрирования.

Построим решения граничных задач в форме упакованных блочных элементов. Последние имеют вид [1–3]

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{21+}} \times \\ \times (\alpha_2 - \alpha_{21+}) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$
$$g_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{11-}} \times \\ \times (\alpha_{11-} - \alpha_1) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.1)$$

$$g_3(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{21-}} \times \\ \times (\alpha_{21-} - \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$
$$g_4(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{11+}} \times \\ \times (\alpha_1 - \alpha_{11+}) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.2)$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p^2},$$
$$\alpha_{11-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - p^2}, \quad \alpha_{21-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - p^2}.$$

Здесь $Q_n(\alpha_s) = \mathbf{F}_1(\alpha_s) q_n(x_s)$.

Таким образом, упакованные блочные элементы построены в четырех взаимно пересекающихся полуплоскостях. Они представляют блочную структуру, блоки которой имеют носители — области Ω_n, $n = \overline{1, 4}$.

Рассмотрим множества $\Omega_n \times g_n$, $n = \overline{1, 4}$. Введем в построенной блочной структуре топологическую структуру. Назовем внутренности каждого построенного упакованного блочного элемента и носителя, то есть открытые множества, элементами топологического пространства. Они должны обладать следующими свойствами: объединение любого числа таких элементов и пересечение конечного их числа должно быть элементом топологического пространства, то есть быть упакованным блочным элементом. Кроме этого, пустое множество и вся совокупность элементов являются элементами топологического пространства. Выполняются все перечисленные требования, кроме одного: пересечение упакованных блочных элементов должно быть упакованным блочным элементом. Очевидно, носители упакованных блочных элементов, то есть полупространства с взаимно перпендикулярными границами, имеют в качестве пересечений все четыре квадранта прямоугольной системы координат. Введем следующее их обозначение: $\Omega_5(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$, $\Omega_6(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$, $\Omega_7(x_1 < 0,\ x_2 < 0)$, $\Omega_8(x_1 > 0,\ x_2 < 0)$. Для того, чтобы доказать, что введенная топологическая структура $\Omega_n \times g_n$, $\Omega_{4+n} \times \phi_n$, $n = \overline{1, 4}$, действительно формирует топологическое пространство, состоящее из носителей и упакованных блочных элементов, необходимо показать, что решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в каждом квадранте представляет упакованный блочный элемент. Относительно носителей этот вопрос решен благодаря индуцированной топологии эвклидова пространства. Для блочных элементов любые два соседних блочных элемента из квадрантов должны объединяться и представлять упакованный блочный элемент полупространства. Таким образом, методом блочного элемента необходимо построить решения в форме упакованных блочных элементов в каждом квадранте следующих граничных задач

$$(\Delta + p^2)\phi_n = 0,$$
$$\partial_2\phi_1(x_1{,}0) = q_{1+}(x_1), \quad \partial_1\phi_1(0, x_2) = q_{2+}(x_2), \\ \Omega_5(x_1 > 0,\ x_2 > 0);$$
$$\partial_2\phi_2(x_1{,}0) = q_{1-}(x_1), \quad \partial_1\phi_2(0, x_2) = q_{2+}(x_2), \\ \Omega_6(x_1 < 0,\ x_2 > 0);$$
$$\partial_2\phi_3(x_1{,}0) = q_{1-}(x_1), \quad \partial_1\phi_3(0, x_2) = q_{2-}(x_2), \\ \Omega_7(x_1 < 0,\ x_2 < 0);$$
$$\partial_2\phi_4(x_1{,}0) = q_{1+}(x_1), \quad \partial_1\phi_4(0, x_2) = q_{2-}(x_2),$$

$$\Omega_8(x_1 > 0,\ x_2 < 0).$$

Здесь приняты обозначения:

$$q_{1+}(x_1) = q_1(x_1), \quad x_1 \geqslant 0;$$
$$q_{2+}(x_2) = q_2(x_2), \quad x_2 \geqslant 0;$$
$$q_{1-}(x_1) = q_1(x_1), \quad x_1 \leqslant 0;$$
$$q_{2-}(x_2) = q_2(x_2), \quad x_2 \leqslant 0.$$

Применяя традиционные методы блочного элемента, включающие этапы внешней алгебры, внешнего анализа [1–3], получаем четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте

$$\phi_n(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_n(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}\times \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1 = = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle + + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle;$$

$$\omega_2 = = \left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle + + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle;$$

$$\omega_3 = = \left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle + + \left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle;$$

$$\omega_4 = = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle + + \left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактортопологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. Названными объединениями являются следующие объекты: $\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2)$, $\phi_2(x_1,x_2)\cup\phi_3(x_1,x_2)$, $\phi_3(x_1,x_2)\cup\phi_4(x_1,x_2)$, $\phi_4(x_1,x_2)\cup\phi_1(x_1,x_2)$.

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полупространства. Имеем

$$\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2) = = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}\times \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2 + + \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}\times \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2 = = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)+\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}\times \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.3)$$

Отсюда

$$\omega_1+\omega_2 = = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle + + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle + + \left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle + + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle.$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}},\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},$$
$$\frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}},$$
$$\frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, то есть обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль становится понятной при вычислении обращений преобразований Фурье для получения значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат. Поэтому, при исчезновении границы между блочными элементами, и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах, ими следует пренебрегать. Остаются те из них, которые сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая ненужные члены, имеем

$$\omega_1+\omega_2=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)\rangle+ \\ +\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1-}(\alpha_1)\rangle= \\ =\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)+Q_{1-}(\alpha_1)\rangle= \\ =\frac{\alpha_2-\alpha_{21+}}{\alpha_{21+}}Q_1(\alpha_1).$$

Внеся эти данные в (1.3), получаем упакованный блочный элемент для полупространства (1.1), (1.2), а объединение блочных элементов оказывается связным множеством. Точно так же, объединяя упакованные блочные элементы второго и третьего квадрантов, имеем

$$\omega_2+\omega_3= \\ =\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle+ \\ +\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\langle Q_{2-}(\alpha_2)\rangle= \\ =\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\langle Q_{2+}(\alpha_2)\rangle=\frac{\alpha_{11-}-\alpha_1}{\alpha_{11-}}Q_2(\alpha_2).$$

Аналогично, получим

$$\omega_3+\omega_4=\frac{\alpha_{21-}-\alpha_2}{\alpha_{21-}}Q_1(\alpha_1),$$

$$\omega_4+\omega_1=\frac{\alpha_1-\alpha_{11+}}{\alpha_{11+}}Q_2(\alpha_2).$$

Может возникнуть вопрос об объединении трех квадрантов. В этом случае внешняя форма принимает вид $\omega_{13}=\omega_1+\omega_2+\omega_3$. Отсюда получаем упакованный блочный элемент

$$\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2)\cup\phi_3(x_1,x_2)= \\ =\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_{13}(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}\times \\ \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2,$$

$$\omega_{13}(\alpha_1,\alpha_2)= \\ =\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle+ \\ +\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle.$$

Таким образом, доказано, что пересечения полупространств также являются упакованными блочными элементами. Отсюда следует, что топологическое пространство будет определено, если элементы в форме полуплоскостей пополнить блочными элементами с носителями в четырех квадрантах системы координат. Они обеспечивают более сильную топологию, чем полуплоскости. Чтобы теперь построить дискретное топологическое пространство, надо воспользоваться его определением. Дискретным топологическим пространством называется такое, в котором любое объединение элементов пространства является элементом этого же пространства. Нет необходимости доказывать, что элементами этого пространства являются упакованные блочные элементы, с носителями в четырех квадрантах декартовой системы координат, имея самую сильную топологию.

2. Свойства дискретного топологического пространства

Замыкания упакованных блочных элементов дискретного топологического пространства одновременно представляют собой многообразия с краем и имеют атлас, состоящий из четырех однокартовых элементов. Гомоморфизм для этих элементов тривиальный, даваемый носителями в декартовой системе координат. Элементы дискретного топологического пространства не имеют пересечений, только граничные множества соприкосновения. Построив дискретное топологическое пространство для граничных задач какого-либо простого дифференциального уравнения можно теперь исследовать и решать с его помощью более сложные граничные задачи.

Возможности построенных таким образом дискретных топологических пространств решений граничных задач достаточно широки. Они позволяют, например, решать более сложные граничные задачи, исходя из решений более простых. Важным является свойство топологических пространств допускать непрерывные геометрические преобразования, переходы в новые системы координат. Поскольку не уравнения, а уже решения граничных задач принадлежат топологическому пространству, то, не требуя решения граничной задачи в новой системе координат, можно получать в этой системе их решение. Это существенно расширяет возможности подхода, поскольку строятся точные решения, например, в неограниченных областях, недоступных для исследования численными методами. Наконец, положенное в основу настоящей работы исследование на примере уравнения Гельмгольца, дает возможность переноса полученных результатов в скалярном случае на векторный, используя подходы, изложенные в [11–15].

Вывод

В работе, по-видимому, впервые показано, что получаемые методом блочного элемента решения граничных задач, представленные в виде упакованных блочных элементов, позволяют формировать дискретное топологическое пространство решений граничной задачи, расширяющих возможности исследования сложных граничных задач. В ближайшее время будет показано, как эти результаты переносятся на векторные граничные задачи механики сплошных сред.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 657–660.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О топологических структурах граничных задач в блочных элементах // ДАН. 2016. Т. 470. № 6. С. 650–654.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых нано материалов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 5.
4. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 2. М.: МЦНМО, 2002. 788 с.
5. *Келли Д.* Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
6. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2004. 302 с.
7. *Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Компьютерная геометрия. М.: Академия, 2006. 512 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
10. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 162 с.
11. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1979. 262 с.
12. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова Думка, 1985. 280 с.
13. *Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гуз А.Н., Гринченко В.Т.* Динамика упругих тел. Киев: Наукова Думка, 1986. 288 с.
14. *Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958. 368 с.
15. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskiy metod resheniya granichnykh zadach i blochnye elementy [Topological method for solving boundary problems and block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2013, vol. 449, no. 4, pp. 657–660. (In Russian)
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O topologicheskikh strukturakh granichnykh zadach v blochnykh elementakh [On topological structures of boundary value problems in block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 470, no. 6, pp. 650–654. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Treshchiny novogo tipa i modeli nekotorykh nano materialov [Cracks of a new type and models of some nano materials]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Izvestiya RAN. Rigid body mechanics], 2020, no. 5. (In Russian)
4. Zorich V.A. *Matematicheskiy analiz. Ch. 2* [Mathematical analysis. Pt. 2]. MTsNMO, Moscow, 2002. (In Russian)
5. Kelli D. *Obshchaya topologiya* [General topology]. Nauka, Moscow, 1968. (In Russian)
6. Mishchenko A.S., Fomenko A.T. *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii i topologii* [A short course in differential geometry and topology]. Fizmatlit, Moscow, 2004. (In Russian)
7. Golovanov N.N., Il'yutko D.P., Nosovskiy G.V., Fomenko A.T. *Komp'yuternaya geometriya* [Computer geometry]. Akademiya, Moscow, 2006. (In Russian)
8. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)

9. Novatskiy V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Mir, Moscow, 1970. (In Russian)
10. Novatskiy V. *Elektromagnitnye effekty v tverdykh telakh* [Electromagnetic effects in solids]. Mir, Moscow, 1986. (In Russian)
11. Ulitko A.F. Metod sobstvennykh vektornykh funktsiy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti [The method of eigenvector functions in spatial problems of elasticity theory]. Naukova Dumka, Kiev, 1979. (In Russian)
12. Grinchenko V.T., Ulitko A.F. *Ravnovesie uprugikh tel kanonicheskoy formy* [Equilibrium of elastic bodies of canonical form]. Naukova Dumka, Kiev, 1985. (In Russian)
13. Golovchan V.T., Kubenko V.D., Shul'ga N.A., Guz A.N., Grinchenko V.T. *Dinamika uprugikh tel* [Dynamics of elastic bodies]. Naukova Dumka, Kiev, 1986. (In Russian)
14. Gel'fand I.M., Minlos Z.A., Shapiro Z.Ya. *Predstavleniya gruppy vrashcheniy i gruppy Lorentsa, ikh primeneniya* [Representations of the rotation group and the Lorentz group, their applications]. Fizmatlit, Moscow, 1958. (In Russian)
15. Kochin N.E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya* [Vector calculus and beginnings of tensor calculus]. Nauka, Moscow, 1965. (In Russian)

Статья поступила 29 августа 2020 г.