

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-4-14-24

ОСОБЕННОСТИ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБЪЕМНЫХ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТНЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ В АНИЗОТРОПНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Сыромятников П. В., Кириллова Е. В., Кривошеева М. А., Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г.

FEATURES OF THE DIRECTIONAL PATTERNS OF BULK ELASTIC WAVES EXCITED BY A SURFACE HARMONIC SOURCE IN AN ANISOTROPIC PIEZOELECTRIC HALF-SPACE

P. V. Syromyatnikov^{1,2}, E. V. Kirillova³, M. A. Krivosheeva², O. N. Lapina², A. G. Nesterenko², Yu. G. Nikitin²¹ Federal Research Center Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia² Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia³ RheinMain University of Applied Sciences in Wiesbaden, Wiesbaden, 65197, Germany
e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru

Abstract. On the basis of the stationary phase method and the saddle method in the proposed work, a numerical-analytical method was developed for constructing the asymptotics of elastic and electroelastic bulk waves, which are excited by a surface harmonic mechanical or electric delta source in a piezoelectric half-space. The anisotropy of elastic moduli, piezoelectric coefficients and dielectric constants can be arbitrary. An important element of the method is an algorithm for constructing the Fourier symbol of the Green's matrix of a piezoelectric half-space. Lithium niobate was chosen as a specific material for calculations. We calculated the directional patterns of the amplitudes of longitudinal and quasi-transverse waves in the symmetry plane of the Y-cut of lithium niobate, which are excited by three concentrated mechanical and electrical sources. For the plane of symmetry, six caustics of quasi-transverse waves were found, which are determined by degenerate stationary points. The range of ambiguity of asymptotic representations of quasi-transverse waves polarized in the plane of symmetry was found. The nature of ambiguity for bulk waves is similar to the analogous phenomenon for surface elastic waves in anisotropic media. In the absence of the piezoelectric effect, as well as in the case of a distributed source, the method does not require modification.

Keywords: anisotropic half-space, piezoelectricity, Green's matrix, surface delta source, radiation patterns, caustics, multivalued solutions.

Введение

Анализ возбуждения, приема, расчета и формирования заданных диаграмм направ-

ленности объемных упругих волн актуален при проектировании и оптимизации сейсмических вибраторов и сейсмических антенн [1], устройств акустоэлектроники на объемных и

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики краснодарского отделения Южного научного центра РАН, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru.

Кириллова Евгения Вадимовна, канд. физ.-мат. наук, профессор Университета прикладных наук Рейн Майн в г. Висбаден; e-mail: kirillova@web.de.

Кривошеева Маргарита Александровна, магистрант второго года обучения кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: margarita.krivosheeva@gmail.com.

Лапина Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: olga_ln@mail.ru.

Нестеренко Александр Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: agnest@mail.ru.

Никитин Юрий Геннадиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: yug@fpm.kubsu.ru.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2020 г. (№ г.р. 01201354241).

поверхностных акустических и электроакустических волнах [2]. Задачи активной сейсмологии [1], вибрационные методики релаксации зон сейсмичности также предполагают возможность направленного виброакустического воздействия на дислокации в земной коре. При этом необходимо учитывать упругую анизотропию геологических структур [3].

Для изотропных подложек техника расчета диаграмм направленности поверхностных источников и методы формирования заданных диаграмм направленности хорошо отработаны [4]. Аналогичные задачи для анизотропных упругих и электроупругих сред осложняются рядом факторов [5]: невозможностью в общем случае получить явные выражения, громоздкостью вычислительных процедур, наличием разного рода сингулярностей, связанностью упругих и электрических полей. В качестве необходимого алгоритма выступает метод расчета символа Фурье матрицы Грина электроупругого полупространства. Обнаруженные в данной работе особенности асимптотик объемных волн в анизотропном полупространстве имеют определенное сходство с каустиками поверхностных волн в анизотропных полуограниченных средах [6].

1. Постановка задачи. Символ Фурье матрицы Грина однородного электроупругого полупространства

Пусть пьезоэлектрическое полупространство занимает объем $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$, $-\infty \leq x_3 \leq 0$. Гармонические колебания среды возбуждаются поверхностными механическими и/или электрическими нагрузками, действующими в ограниченной области Ω плоскости $x_3 = 0$. В квазистатическом приближении [2] электроупругие гармонические колебания пьезоэлектрической среды описываются следующими уравнениями состояния (общий множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 u_j &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \\ \sigma_{ji} &= C_{ji}^{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - e_{kji} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \\ S_j &= e_{jkn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$(i, j, k, n = 1, 2, 3).$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, \mathbf{u} — вектор перемещений, \mathbf{S} — вектор

электрической индукции, C_{kn}^{ij} — компоненты тензора модулей упругости, e_{jkn} — пьезоэлектрического тензора, ε_{ij} — тензора диэлектрической проницаемости, ρ — плотность, ω — круговая частота, ϕ — электрический потенциал.

Электрическое поле в вакууме не учитывается, поскольку диэлектрическая проницаемость вакуума ε_0 намного меньше, чем проницаемости кристалла $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_{ij}$. Граничные условия в плоскости $x_3 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{j3} &= q_j, \quad S_3 = q_4, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \sigma_{j3} &= S_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}, \\ &(j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь q_1, q_2, q_3 — сосредоточенные или распределенные механические нагрузки, q_4 — плотность поверхностных зарядов. Для однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.2) необходимо выполнение условий убывания на бесконечности

$$u, \phi \rightarrow 0, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

или условия излучения, описываемого ниже. С помощью двумерного преобразования Фурье F_{x_1, x_2}

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) &= F_{x_1 x_2} [\mathbf{u}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x_1, x_2) \times \\ &\times \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

решение краевой задачи (1.1)–(1.3) при заданных $Q_j = F_{x_1 x_2} [q_j]$ может быть выражено через интегральное представление

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) Q_j(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$(i, j = 1, 2, 3, 4).$

Здесь $K_{ij} = F_{x,y} [k_{ij}]$ — символ Фурье матрицы Грина для полупространства. В формуле (1.4) Γ_1, Γ_2 — контуры интегрирования, частично отклоняющиеся от вещественных осей при обходе точек ветвления и полюсов K в соответствии с принципом предельного поглощения [4]. Опишем кратко алгоритм построения символа матрицы Грина (подробное описание приведено в [7]). Применяя двукратное преобразования Фурье к уравнениям

(1.1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно четырехкомпонентного вектора $\mathbf{U} = F_{x_1 x_2} [\mathbf{u}] = \{U_1; U_2; U_3; U_4\}^T$ — символа вектора перемещений $\{U_1, U_2, U_3\}^T$ и потенциала $\Phi = U_4$:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} + i\mathbf{B}\mathbf{U}' - \mathbf{G}\mathbf{U}'' = 0. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} — симметричные матрицы:

$$A_{js} = -C_{rj}^{ns} \alpha_r \alpha_n + \delta_{js} \rho \omega^2, \quad (1.6)$$

$$A_{p4} = A_{4p} = -e_{rpn} \alpha_n \alpha_r, \quad A_{44} = \varepsilon_{nr} \alpha_n \alpha_r,$$

$$B_{jk} = -\alpha_n (C_{3j}^{kn} + C_{nj}^{k3}), \quad G_{jk} = -C_{3j}^{k3},$$

$$B_{m4} = B_{4m} = -\alpha_n (e_{3mn} + e_{nm3}),$$

$$G_{m4} = G_{4m} = -e_{3m3},$$

$$B_{44} = 2\alpha_n \varepsilon_{3n}, \quad G_{44} = e_{33},$$

$$(r, n = 1, 2; j, k, s, m = 1, 2, 3),$$

δ_{jl} — символ Кронекера. Умножая выражение (1.5) слева на \mathbf{G}^{-1} относительно вектора $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_4, \mathbf{U}'_1, \dots, \mathbf{U}'_4\}^T$, можно получить систему первого порядка

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx_3} = \mathbf{M}\mathbf{U}, \quad (1.7)$$

с матрицей \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}^{-1}\mathbf{A} & \vdots & i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

где \mathbf{I} , \mathbf{O} — единичная и нулевая матрицы. Решение системы (1.7) приводит к проблеме на собственные значения вида

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{h} = 0. \quad (1.9)$$

Образум из собственных чисел λ_i и собственных векторов h_i матрицы \mathbf{M} (1.8) матрицу \mathbf{H}

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x_3) &= \\ &= \{\mathbf{h}_1 \exp(\lambda_1 x_3), \dots, \mathbf{h}_8 \exp(\lambda_8 x_3)\}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

столбцы которой являются фундаментальной системой решений (1.7), (предполагается, что канонический вид \mathbf{M} не содержит жордановых клеток выше первого порядка, кратность λ_i при этом может быть произвольной). Матрица \mathbf{K} является решением вспомогательной

задачи: \mathbf{K} должна удовлетворять матричному уравнению (1.7), однородным граничным условиям на поверхности полупространства $x_3 = 0$

$$\mathbf{R} \begin{vmatrix} \mathbf{K}(0) \\ \mathbf{K}'_{x_3}(0) \end{vmatrix} = \mathbf{I} \quad (1.11)$$

(матрица \mathbf{R} описывается далее) и в соответствии с условием (1.3) стремиться к нулю при $x_3 \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \mathbf{K}(x_3) = 0. \quad (1.12)$$

Последнее условие означает, что из восьми решений (1.10) необходимо оставить четыре, которые удовлетворяют условию убывания на бесконечности (в частности, при $x_3 \rightarrow -\infty$) или принципу излучения, рассматриваемому ниже. Очевидно, что частное решение (1.10)

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{h}_m \exp(\lambda_m x_3) \quad (1.13)$$

с $\text{Re } \lambda_m < 0$ не удовлетворяет условию (1.3) при $x_3 \rightarrow -\infty$ и его необходимо отбросить, те же \mathbf{U}_m , которым соответствуют $\text{Re } \lambda_m > 0$, удовлетворяют (1.3). При $\text{Re } \lambda_m = 0$ ситуация сложнее и для отбора чисто мнимых λ_m необходимо привлечь один из принципов излучения, в качестве которого в данной работе выбран принцип предельного поглощения [4]: введение комплексной частоты $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$, ($0 < \varepsilon \ll \omega$), соответствующей малому внутреннему трению, придает всем возмущенным $\lambda_m(\varepsilon)$ ненулевую действительную часть для любых α_1, α_2 . В конечном решении оставляются λ_m , являющиеся соответствующими пределами $\lambda_m(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сами же $\lambda_m(\varepsilon)$ легко определяются, так как $\text{Re } \lambda_m(\varepsilon) \neq 0$. Итак, согласно принципу предельного поглощения, условия, определяющие принцип отбора λ_m для полупространства $x_3 \leq 0$, формулируются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \lambda_m(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0, \\ \lambda_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_m(\varepsilon)), \end{aligned} \right\} \leftrightarrow x_3 \leq 0, \quad (1.14)$$

а условия

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \lambda_m(\varepsilon) < 0, \quad \varepsilon > 0, \\ \lambda_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_m(\varepsilon)), \end{aligned} \right\} \leftrightarrow x_3 \geq 0 \quad (1.15)$$

определяют принцип отбора λ_m для полупространства $x_3 \geq 0$. Далее уравнение (1.11) соответствует следующим граничным условиям:

$$F_{x_1 x_2} [\sigma_{j3}] = 1, \quad F_{x_1 x_2} [S_3] = 1. \quad (1.16)$$

Матрица \mathbf{R} в (1.11) получена преобразованием $F_{x_1 x_2}$ из выражений (1.1)–(1.2):

$$\begin{aligned} R_{jk} &= -i\alpha_n C_{j3}^{kn}, & R_{j(k+4)} &= C_{j3}^{k3}, & (1.17) \\ R_{j4} &= -i\alpha_n e_{nj3}, & R_{j8} &= e_{3j3}, \\ R_{4j} &= -i\alpha_n e_{3nj}, & R_{44} &= i\varepsilon_{3n}\alpha_n, \\ R_{48} &= -\varepsilon_{33}, & R_{4(k+4)} &= e_{33k} \\ & & (j, k &= 1, 2, 3; n = 1, 2). \end{aligned}$$

Будем строить \mathbf{K} в виде линейных комбинаций столбцов \mathbf{H} (1.10)

$$K_{ij} = H_{in}(x_3)N_{nj} \quad (i, j, n = \overline{1, 4}), \quad (1.18)$$

с неизвестной матрицей \mathbf{N} . Уравнение для матрицы \mathbf{N} имеет вид

$$\begin{aligned} R_{jk}H_{ki}(0)N_{im} &= \delta_{jm} \\ (i, j, m &= \overline{1, 4}; k = \overline{1, 8}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Обозначим через $\mathbf{\Delta}$ матрицу с элементами

$$\begin{aligned} \Delta_{jk} &= R_{jn}H_{nk}(0) \\ (j, k &= \overline{1, 4}; n = \overline{1, 8}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из формул (1.18), (1.19) \mathbf{N} выражается в виде

$$\mathbf{N} = \mathbf{\Delta}^{-1}, \quad (1.21)$$

что и завершает построение \mathbf{K} для однородного полупространства.

2. Асимптотики объемных упругих и электроупругих волн

Анализ волновых полей и электрического потенциала, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в пьезоэлектрическом полупространстве в данной работе основывается на асимптотическом исследовании в дальней зоне интегрального представления (1.4) упругих перемещений и электрического потенциала.

Используя метод стационарной фазы и метод перевала [8], из осциллирующих интегралов Фурье (1.4) при больших расстояниях от источника можно выделить вполне определенные структуры, имеющие признаки, характерные для объемных волн. Эти структуры, также как и в изотропном случае [4], связываются со стационарными точками показателей экспонент. По построению символ

матрицы Грина пьезоэлектрического полупространства может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) &= \\ &= \sum_{n=1}^4 \mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \omega) \exp(\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega)x_3) = \\ &= \sum_{n=1}^4 \mathbf{K}^{(n)}(\alpha, \gamma, \omega) \exp(\lambda_n(\alpha, \gamma, \omega)x_3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где α_1, α_2 и α, γ связаны соотношениями

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, \quad (2.2)$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \gamma = \arctg(\alpha_1/\alpha_2).$$

Четыре комплекснозначных поверхности $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega)$ собственных значений (1.9) являются непрерывными функциями в общем случае комплексных переменных $\alpha_1, \alpha_2, \omega$ и обладают свойством однородности по совокупности этих параметров

$$\lambda(k\alpha_1, k\alpha_2, k\omega) = k\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \omega). \quad (2.3)$$

При фиксированном значении $\omega = \omega_0$ (учитывая свойство (2.3), достаточно рассмотреть случай $\omega = 1$) в вещественнозначной плоскости ($\text{Re } \alpha_1, \text{Re } \alpha_2$) свяжем с каждой поверхностью $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega)$ три области $D_n^{(1)}, D_n^{(2)}, D_n^{(3)}$, такие что

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0) &= 0, \\ \text{Im}_1 \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0) &\neq 0, \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\in D_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0) &\neq 0, \\ \text{Im}_1 \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0) &\neq 0, \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\in D_n^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0) &\neq 0, \\ \text{Im}_1 \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0) &= 0, \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\in D_n^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Разбивая плоскость α_1, α_2 на области $D_n^{(j)}$, выражение (1.4) с учетом формулы (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_m(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^4 \sum_{j=1}^3 \iint_{D_n^{(j)}} K_{mp}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \omega) Q_p(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\times \exp(\lambda_n x_3 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$(m, p = \overline{1, 4}).$$

В интегральном представлении (2.7) перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \beta \sin \psi, & x_2 &= R \sin \beta \sin \psi, \\ x_3 &= R \cos \psi, & & (2.8) \\ 0 &\leq \beta \leq 2\pi, & \frac{\pi}{2} &\leq \psi \leq \pi, \\ R &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \end{aligned}$$

и перепишем для них выражение (2.7), тогда

$$\begin{aligned} u_m(R, \beta, \psi) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^4 \sum_{j=1}^3 \iint_{D_n^{(j)}} K_{mp}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \omega) Q_p(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\times \exp(R\theta_n^{(j)}) d\alpha_1 d\alpha_2 = \sum_{n=1}^4 \sum_{j=1}^3 F_n^{(j)}, \quad (2.9) \\ &(m, p = \overline{1, 4}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_n^{(1)} &= i(\operatorname{Im} \lambda_n \cos \psi - \\ &- (\alpha_1 \cos \beta + \alpha_2 \sin \beta) \sin \psi), \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_n^{(2)} &= \operatorname{Re} \lambda_n \cos \psi - \\ &- i[(\alpha_1 \cos \beta + \alpha_2 \sin \beta) \sin \psi + \\ &+ \operatorname{Im} \lambda_n \cos \psi], \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_n^{(3)} &= \operatorname{Re} \lambda_n \cos \psi - \\ &- i(\alpha_1 \cos \beta + \alpha_2 \sin \beta) \sin \psi. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Интегралы по $D_n^{(1)}$ в (2.9) при $R \rightarrow \infty$ можно оценить по методу стационарной фазы, интегралы по $D_n^{(2)}$, $D_n^{(3)}$ — с помощью метода перевала [8]. При выводе асимптотик интеграла (2.9) $F_n^{(j)}$ предполагается, что частота ω фиксирована, R , выраженное в длинах волн, намного больше единицы, угол ψ в (2.8) строго больше $\pi/2$.

Асимптотику $F_n^{(1)}$ при $R \rightarrow \infty$ интегралов по $D_n^{(1)}$ можно получить по методу стационарной фазы при условии, что $D_n^{(1)}$ ограничены. Для фазовой функции $\theta_n^{(1)}$ (2.10) ($\operatorname{Re} \lambda_n = 0$)

$$\begin{aligned} \theta_n^{(1)} &= i(\operatorname{Im} \lambda_n \cos \psi - \\ &- (\alpha_1 \cos \beta + \alpha_2 \sin \beta) \sin \psi) = \\ &= i\tilde{\theta}_n^{(1)} = i \operatorname{Im} \theta_n^{(1)} \quad (2.13) \end{aligned}$$

уравнения для определения стационарных точек α_0 в $D_n^{(1)}$ (2.4)

$$\begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Im} \lambda_n}{\partial \alpha_1} = \cos \beta \operatorname{tg} \psi, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} \lambda_n}{\partial \alpha_2} = \sin \beta \operatorname{tg} \psi. \end{cases} \quad (2.14)$$

Отметим, что в силу свойства (2.3) решения α_0 системы (2.14), если они существуют, зависят от частоты ω линейно: $\alpha_0(\beta, \psi, \omega) = \alpha_0(\beta, \psi, 1)\omega$.

Для невырожденной внутренней стационарной точки $\alpha_0(\beta, \psi)$ главный член асимптотики $F_n^{(1)}$ при $R \rightarrow \infty$ имеет вид [8]

$$\begin{aligned} F_{n,m}^{(1)}(R, \beta, \psi) &= \frac{2\pi}{R} K_{mp}^{(n)}(\alpha_0) Q_p(\alpha_0) \times \\ &\times \exp(iR\tilde{\theta}_n^{(1)}(\alpha_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \tilde{\theta}_n^{(1)''}(\alpha_0)) \times \\ &\times \left| \det \tilde{\theta}_n^{(1)''}(\alpha_0) \right|^{-\frac{1}{2}} (1 + O(R^{-1})), \quad (2.15) \\ &R \rightarrow \infty; \quad (n, m, p = \overline{1, 4}), \end{aligned}$$

где $\tilde{\theta}_n^{(1)''}$ — матрица

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n^{(1)''} &= \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_n^{(1)}(\alpha_0)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \\ &= \operatorname{Im} \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \lambda_n(\alpha_0)}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 \lambda_n(\alpha_0)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \\ \frac{\partial^2 \lambda_n(\alpha_0)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \lambda_n(\alpha_0)}{\partial \alpha_2^2} \end{array} \right\| \cos \psi, \quad (2.16) \end{aligned}$$

а $\operatorname{sgn} \tilde{\theta}_n^{(1)''}$ — разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы $\tilde{\theta}_n^{(1)''}$ (2.16).

В частном случае вырожденной стационарной точки α_0 , когда $\operatorname{rank}(\tilde{\theta}_j^{(1)''}(\alpha_0)) = 1$, главный член асимптотики $F_n^{(1)}(R, \beta, \psi)$ при $R \rightarrow \infty$ согласно [8] имеет вид

$$\begin{aligned} F_{n,m}^{(1)}(R, \beta, \psi) &= \frac{1}{R} \sqrt{\pm \frac{2\pi}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \\ &\exp\left[\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \mu_1(\alpha_0) + \frac{i\pi}{4}\right] |\mu_1(\alpha_0)|^{-1/2} \times \\ &\times \exp\left[iR\tilde{\theta}_n^{(1)}(\alpha_0)\right] K_{mp}^{(n)}(\alpha_0) Q_p(\alpha_0), \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$R \rightarrow \infty; \quad (n, m, p = \overline{1, 4}),$$

где $\mu_1 = \mu_1(\alpha_0(\beta, \psi))$ — ненулевое собственное значение $\tilde{\theta}_n^{(1)'}(\alpha_0(\beta, \psi))$, параметр $a > 0$ явного представления в общем случае не имеет. Невырожденные точки α_0 на границе $\partial D_n^{(1)}$ дают либо половину вклада внутренней стационарной точки (стационарная точка первого рода [8]), либо вклад от нее в $F_n^{(1)}$

$$F_n^{(1)}(R) \sim R^{-3/2} \exp(iR\tilde{\theta}_n^{(1)}(\alpha_0)), \quad (2.18)$$

$$R \rightarrow \infty.$$

Главный член асимптотик (2.15), (2.17) описывает сферическую волну, амплитуда которой убывает с удалением от источника как R^{-1} .

Определим поляризацию асимптотик $F_n^{(1)}$ (2.15) в системе координат, связанной с направлением распространения волны. Векторы

$$\mathbf{n}_R = \{\cos \beta \sin \psi, \sin \beta \sin \psi, \cos \psi\}^T, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{n}_\psi = \{\cos \beta \cos \psi, \sin \beta \cos \psi, -\sin \psi\}^T,$$

$$\mathbf{n}_\beta = \{-\sin \beta, \cos \beta, 0\}^T$$

определяют орты новой системы, в которой векторы

$$u_{k,1}^{(1)} = n_{R,i} F_{k,i}^{(1)}, \quad u_{k,2}^{(1)} = n_{\psi,i} F_{k,i}^{(1)}, \quad (2.20)$$

$$u_{k,3}^{(1)} = n_{\beta,i} F_{k,i}^{(1)}, \quad (u_{k,4}^{(1)} = F_{k,4}^{(1)} = \phi_k^{(1)}),$$

$$(k, i = 1, 2, 3)$$

будут соответствовать объемной квазипродольной волне, когда угол между $u_n^{(1)}$ и $\{1, 0, 0\}^T$ мал, или квазипоперечной в противном случае. Фазовые скорости $v_i(\beta, \psi)$ плоских объемных волн в однородном пространстве определяются собственными значениями $\chi_i(\beta, \psi)$ тензора Кристоффеля \bar{g}_{im} [2]

$$\bar{g}_{im} = g_{im} + \frac{\gamma_i \gamma_m}{\tilde{\varepsilon}}, \quad g_{im} = C_{km}^{ij} n_j n_k, \quad (2.21)$$

$$\gamma_i = e_{kij} n_j n_k, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{jkm} n_j n_k,$$

$$v_i(\beta, \psi) = \sqrt{\frac{\chi_i}{\rho}}, \quad L_i = \frac{1}{v_i} = \sqrt{\frac{\rho}{\chi_i}},$$

$$(i, j, k, m = \overline{1, 3}),$$

где в качестве единичного вектора \mathbf{n} , определяющего направление, можно взять вектор $\mathbf{n}_R(\beta, \psi)$ (2.19). Функции L_i , обратно пропорциональные v_i , являются медленностями плоских объемных волн. Уравнение

$$R\theta_n^{(1)} - i\omega t = i(R\tilde{\theta}_n^{(1)} - \omega t) = \text{const} \quad (2.22)$$

описывает распространение сферической волны с фазовой скоростью

$$v_n^{(a)}(\beta, \psi) = \dot{R} = \frac{\omega}{\tilde{\theta}_n^{(1)}(\alpha_0(\beta, \psi))}. \quad (2.23)$$

В направлении, отличном от горизонтального, стационарные точки (2.14) дают главный вклад в асимптотику волнового поля и формулы (2.15) позволяют строить диаграммы направленности объемных волн, излучаемых в полупространство произвольным поверхностным гармоническим источником $q_j(x_1, x_2)$, ($j = \overline{1, 4}$), заданным в некоторой области Ω поверхности полупространства $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Аналогичные (2.15) асимптотики интегралов $F_n^{(2)}$ по $D_n^{(2)}$ и $F_n^{(3)}$ по $D_n^{(3)}$ при $R \rightarrow \infty$ можно получить по методу перевала [8]. Однако, действительная часть аргументов экспонент $\exp[R\theta_n^{(j)}(\alpha_0)]$ в асимптотиках для $F_n^{(2)}$ и $F_n^{(3)}$ отрицательна, поэтому $F_n^{(2)}$, $F_n^{(3)}$ при $R \rightarrow \infty$ будут убывать значительно быстрее, чем R^{-1} и вкладом их в асимптотику интеграла (2.9) при больших R можно пренебречь по сравнению со вкладом $F_n^{(1)}$ (2.15). Вкладом граничных точек вида (2.18) в асимптотику $F_n^{(1)}$ в силу их более быстрого убывания по R также можно пренебречь.

3. Численные примеры

Первым этапом построения асимптотик (2.15) является нахождение областей $D_n^{(1)}$ (2.4), являющихся проекциями поверхностей $L_n \omega$, ($n = 1, 2, 3$) (2.21) (или, соответственно, чисто мнимых собственных значений $\text{Im } \lambda_n$ (1.7)) на плоскость $O\alpha_1\alpha_2$ при фиксированном ω . На рис. 1а $D_n^{(1)}$ изображены при $\omega = 1$. При расчетах использовались следующие значения материальных констант ниобата лития [2]:

$$C_{11} = 2,03; \quad C_{12} = 0,53; \quad C_{13} = 0,75;$$

$$C_{14} = 0,09; \quad C_{33} = 2,45;$$

$$C_{44} = 0,6 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

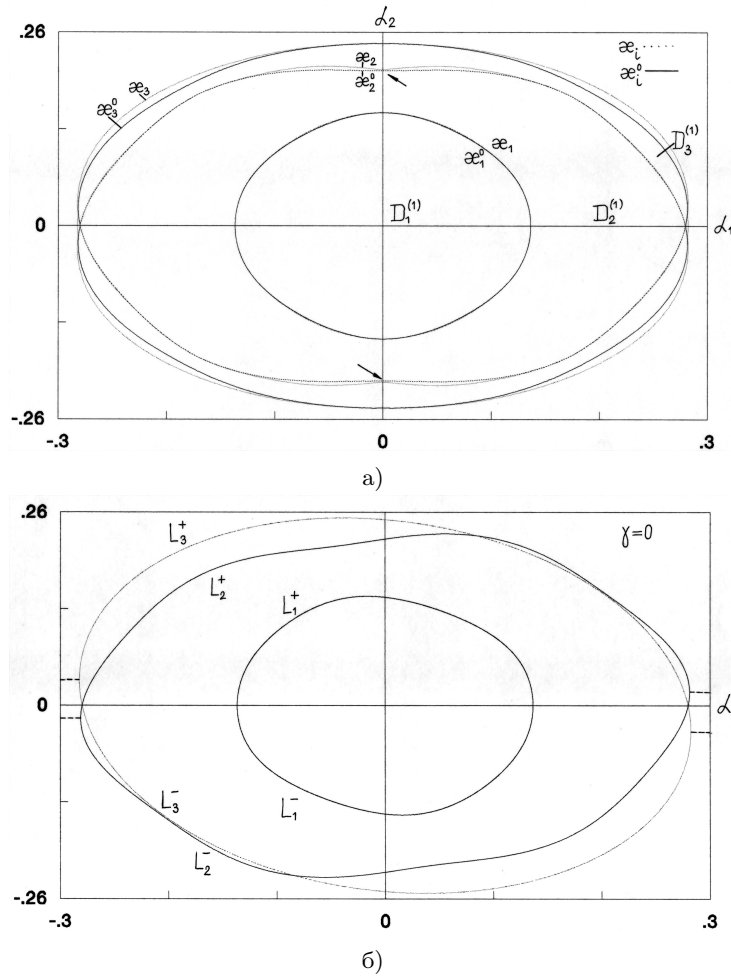


Рис. 1. а) области $D_j^{(1)}$; б) кривые медленностей L_j^\pm , $\omega = 1$

$$\begin{aligned}
 e_{15} &= 3,7; & e_{22} &= 2,5; & e_{31} &= 0,2; \\
 e_{33} &= 1,3 \text{ Кл/м}^2; \\
 \varepsilon_{11} &= 38,9; & \varepsilon_{33} &= 25,7 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}; \\
 \rho &= 4700 \text{ кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Мнимые части собственных значений (1.9) λ_j , в области, где они чисто мнимые, можно рассчитать по формулам (2.21), при этом

$$\lambda_j(\alpha_1, \alpha_2, \omega) = i\omega L_j(\mathbf{n}_j), \quad (3.1)$$

$$j = 1, 2, 3,$$

где единичный вектор \mathbf{n}_j определяется вектором $\{\alpha_1, \alpha_2, \text{Im } \lambda_j\}^T$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_j(\alpha_1, \alpha_2, \text{Im } \lambda_j) &= \\
 &= \frac{\{\alpha_1, \alpha_2, \text{Im } \lambda_j\}^T}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\text{Im } \lambda_j)^2}}. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Различие между формулами (1.9) и (3.1) состоит в том, что формулы (1.9) описывают $\text{Im } \lambda_j$ в декартовых координатах, а формулы (3.1), (2.21) — в сферических. Для поиска стационарных точек α_0 (2.14) достаточно формул (2.21), но для построения асимптотик (2.15) необходимы также формулы (1.9).

В выбранной в данной работе кристаллофизической системе координат ось $OX_1 \leftrightarrow O\alpha_1$ совпадает с осью OZ , ось $OX_2 \leftrightarrow O\alpha_2$ — с осью OY , ось $OX_3 \leftrightarrow O\alpha_3$ — с осью OX . Плоскость OX_1X_3 (YZ -срез) является единственной плоскостью симметрии [2].

Обозначим четыре решения, удовлетворяющие условиям излучения (1.14) в нижней полуплоскости через λ_j^- , через λ_j^+ — удовлетворяющие (1.15) в верхней полуплоскости. Линии κ_j^0 пересечения λ_j^\pm с плоскостью $O\alpha_1\alpha_2$ и границы проекций λ_j^\pm на ту же плос-

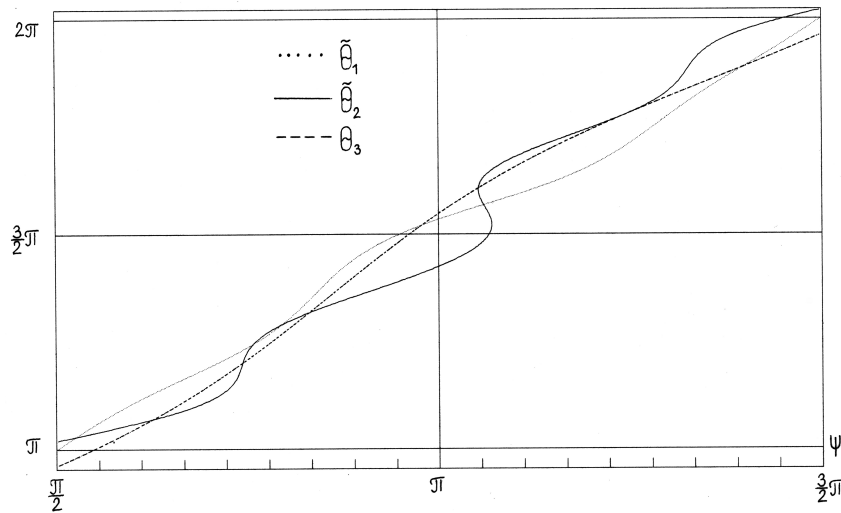


Рис. 2. Фазовые функции $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \theta_3$

кость κ_j изображены на рис. 1а сплошными и точечными линиями соответственно. В силу однородности λ_j (2.3), кривые $\kappa_j(\gamma)$ также будут однородными функциями (в смысле (2.3)).

Для всех γ и $\alpha \neq 0$ (2.2) существуют два решения λ_4^+, λ_4^- , обусловленные наличием пьезоэффекта, с действительными частями противоположных знаков (при $\alpha = 0$ появляются два нулевых собственных значения и шесть мнимых). Стационарные точки для этих поверхностей могут быть только в областях $D_4^{(2)}$ (2.5), $D_4^{(3)}$ (2.6).

Решение системы уравнений (2.14) для определения стационарных точек $\alpha_0(\beta, \psi)$ для произвольных β и ψ является достаточно громоздкой вычислительной задачей, требующей детального предварительного анализа поверхностей медленностей объемных волн L_j^+, L_j^- , ($j = 1, 2, 3$) (особенности поверхностей медленности объемных волн в общем случае упругой анизотропии исследуются в [5]). В данной работе асимптотики объемных волн строились в плоскости симметрии OX_1X_3 , соответствующей YZ -срезу, когда $\beta = 0$ в (2.8) и второе уравнение (2.14) выполняется в этом случае автоматически. При этом необходимо решать только первое уравнение (2.14) относительно кривых $\text{Im } \lambda_j = \omega L_j$ ($j = 1, 2, 3$).

На рис. 1б показаны медленности объемных волн L_j^\pm (2.21) (или мнимые части λ_j^\pm для $\omega = 1$); L_1^\pm соответствует продольной волне; L_2^\pm — соответствует квазипоперечной с поляризацией в плоскости симметрии; L_3^\pm —

квазипоперечной с поляризацией, перпендикулярной плоскости симметрии.

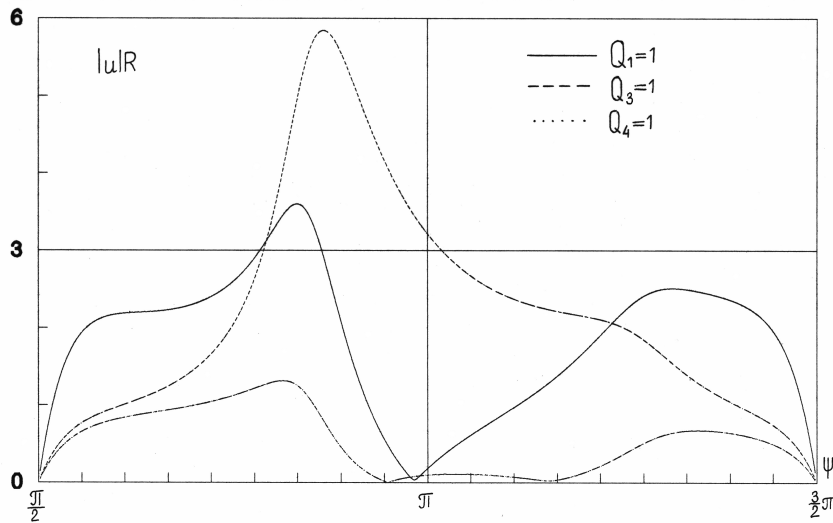
На рис. 2 показаны фазовые функции $\tilde{\theta}_n^{(1)}(\psi)$, соответствующие решениям $\alpha_0(\beta, \psi)$ системы уравнений (2.14) при $\beta = 0$. Решение $\tilde{\theta}_1^{(1)}(\psi)$ (2.13), соответствующее L_1 , однозначно: каждому значению $\frac{\pi}{2} < \psi \leq \frac{3\pi}{2}$ соответствует единственное значение $\tilde{\theta}_1^{(1)}(\psi)$, вырожденных стационарных точек нет.

При построении асимптотик квазипоперечных волн L_2 , поляризованных в плоскости симметрии, возникают три осложнения. Первое связано с появлением λ_2^\pm одного знака, соответствующих кривой L_2 , в некоторых диапазонах α_1 : $\kappa_2(0) \leq \alpha_1 \leq \kappa_2^0(0)$; $\kappa_2(\pi) \leq \alpha_1 \leq \kappa_2^0(\pi)$. Разрешается данное осложнение применением принципа (1.14)–(1.15). Второе связано с многозначностью решений уравнения (2.14) в интервале углов (ψ_1, ψ_2) (см. рис. 2, табл. 1). Третье определяется появлением четырех вырожденных стационарных точек $\tilde{\theta}_2^{(1)}(\psi_{2,i}^0)$, соответствующих нулям определителя $\det \tilde{\theta}_2^{(1)''}$ (2.15) (см. табл. 1).

Кроме того, область $D_2^{(1)}$ в данном случае неоднозначна (на рис. 1а стрелками указаны места расположения малых несвязных частей области $D_2^{(1)}$). Далее, неоднозначность $\tilde{\theta}_2^{(1)}(\psi)$ на интервале (ψ_1, ψ_2) (рис. 2), приводит к неоднозначности асимптотического представления: в интервале углов (ψ_1, ψ_2) плоскости симметрии существуют три различных решения, соответствующие одному типу квазипо-

Таблица 1. Особенности квазипоперечных объемных волн

Тип волны в плоскости симметрии OX_1X_3 ; поляризация	Интервал многозначности (рад)	Вырожденные стационарные точки (рад)			
		$\psi_{j,1}^0$	$\psi_{j,2}^0$	$\psi_{j,3}^0$	$\psi_{j,4}^0$
Квазипоперечная, L_2 ; поляризация в плоскости симметрии	(3,3062–3,3585)	2,3544	2,8884	3,3032	3,3602
Квазипоперечная, L_3 ; поляризация нормальна плоскости симметрии	–	1,665	2,796	–	–

Рис. 3. Нормированные диаграммы амплитуд продольных волн (L_1), возбуждаемых механическими источниками $Q_1 = Q_3 = 1$ и электрическим источником $Q_4 = 1$

перечной волны, которые формально можно рассматривать как три различные волны, в данном случае поперечные, с очень близкими скоростями и поляризациями.

Вырожденные стационарные точки $\psi_{2,i}^0$ для L_2 (табл. 1, строка 1) дают в данном случае при $\psi \rightarrow \psi_{2,i}^0$ решение вида (2.15) с амплитудой, растущей в некоторой окрестности $\psi_{2,i}^0$ приблизительно как $\approx |\psi - \psi_{2,i}^0|^{-\frac{1}{2}}$, при $\psi = \psi_{2,i}^0$ описываемое формулой (2.17) и ограниченное (более подробный анализ асимптотического представления в окрестностях особых направлений см. [8]). Точки вырожденных направлений $\psi_{2,3}^0, \psi_{2,4}^0$ относительно близки к границам интервала многозначности $\psi_1 = 3,3062, \psi_2 = 3,3585$.

При расчете асимптотик квазипоперечных волн, поляризованных перпендикулярно плоскости симметрии, и определяемых медленностями L_3 , также возникают λ_3^\pm одного знака (см. рис. 16) и вырожденные стац-

онарные точки (табл. 1, строка 2), но нет многозначности стационарных точек.

Зависимости нормированных амплитуд колебаний $|u|R$ продольных волн, соответствующих L_1 , как функции угла ψ изображены на рис. 3 для трех типов точечных источников q_1, q_3, q_4 (источник q_2 не возбуждает продольную волну в плоскости симметрии).

Аналогичная серия диаграмм для квазипоперечной волны, соответствующей L_2 , поляризованной в плоскости симметрии, приведена на рис. 4. Поведение нормированных амплитуд $|u|R$ в интервале многозначности (ψ_1, ψ_2) зависит не только от типа источника, но и от радиуса R (для рис. 4 принято $R = 10^2$). Как видно, для вырожденной точки $\psi_{2,4}^0$ при возбуждении сосредоточенными источниками q_1, q_3, q_4 не возникает особого направления.

Для квазипоперечных волн, соответствующих L_3 , поляризованных перпендикулярно плоскости симметрии и возбуждаемых источ-

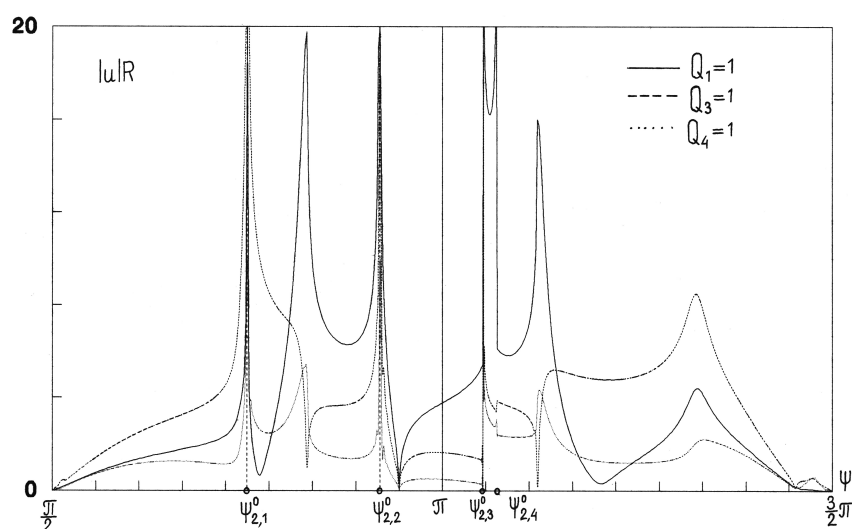


Рис. 4. Нормированные диаграммы амплитуд поперечных волн (L_2), возбуждаемых механическими источниками $Q_1 = Q_3 = 1$ и электрическим источником $Q_4 = 1$

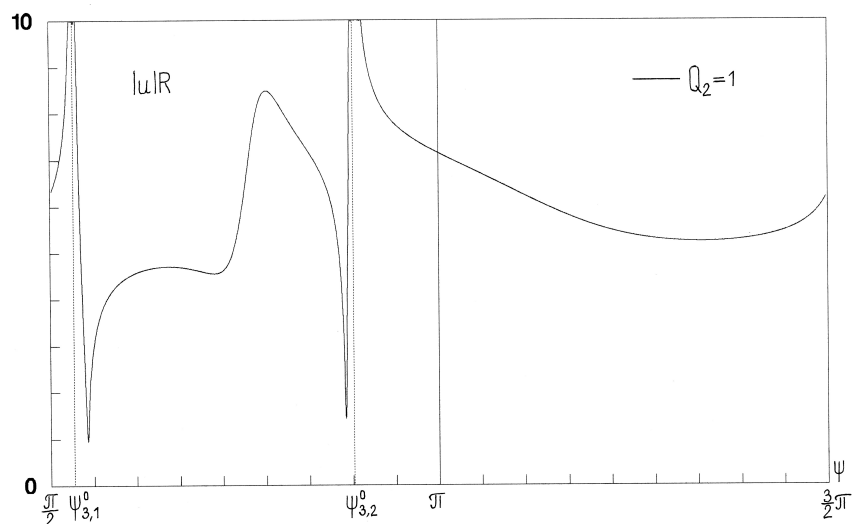


Рис. 5. Нормированные диаграммы амплитуд поперечных волн (L_3), возбуждаемых механическим источником $Q_2 = 1$

ником q_2 , нормированные диаграммы изображены на рис. 5.

Выводы

В работе на основе метода стационарной фазы и метода перевала разработан численно-аналитический метод построения асимптотик упругих и электроупругих объемных волн, возбуждаемых поверхностным гармоническим механическим или электрическим источником в пьезоэлектрическом полупространстве с произвольной анизотропией упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

Необходимым элементом метода является детально разработанный алгоритм построения символа матрицы Грина пьезоэлектрического полупространства.

В качестве конкретного материала для расчетов был выбран ниобат лития. Проведена серия расчетов диаграмм направленности амплитуд продольных и квазипоперечных волн в плоскости симметрии Y -среза ниобата лития, возбуждаемых тремя сосредоточенными механическими и электрическими источниками.

Для плоскости симметрии обнаружены шесть каустик квазипоперечных волн, опреде-

ляемых вырожденными стационарными точками фазовых функций.

Найден интервал многозначности асимптотических представлений квазипоперечных волн, поляризованных в плоскости симметрии. Многозначные решения для объемных волн имеют сходство с аналогичными многозначными решениями для поверхностных упругих волн в анизотропных полуграниченных средах.

Метод не требует модификации при отсутствии пьезоэффекта.

Литература

1. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками / Отв. ред. Г.М. Цибульчик. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, Филиал «Гео» Издательства СО РАН, 2004. 387 с.
2. Royer D., Dielesant E. Elastic waves in solids II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications. Springer, 2000. 474 p.
3. Кузнецов В.М., Жуков А.П., Шнеерсон М.Б. Введение в сейсмическую анизотропию: теория и практика. М: Технологии сейсморазведки, 2006. 159 с.
4. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. Musgrave M.S., Payton R.G. Criteria for elastic waves in anisotropic media – a consolidation // J. of Elasticity. 1984. Vol. 14. Iss. 3. P. 269–287.
6. Karmazin A., Syromyatnikov P. et al. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates // Ultrasonics. 2013. Vol. 53. Iss. 1. P. 283–293.
7. Бабешко В.А., Сыромятников П.В. Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 5. С. 35–47.
8. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 386 с.

References

1. Cibulchik, G.M. (ed.) *Aktivnaya seysmologiya s moshchnymi vibratsionnymi istochnikami* [Active seismology with powerful vibration sources]. ICM & mg SB RAS, Branch “Geo” Publishing house SB RAS, Novosibirsk, 2004. (In Russian)
2. Royer, D., Dielesant, E. *Elastic waves in solids II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications*. Springer, 2000.
3. Kuznetsov, V.M., Zhukov A.P., Schneerson M.B. *Vvedenie v seysmicheskuyu anizotropiyu: teoriya i praktika* [Introduction to seismic anisotropy: theory and practice]. Technologies of seismic exploration, Moscow, 2006. (In Russian)
4. Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
5. Musgrave, M.S., Payton R.G. Criteria for elastic waves in anisotropic media – a consolidation. *J. of Elasticity*, 1984, vol. 14, iss. 3, pp. 269–287.
6. Karmazin, A., Syromyatnikov P. et al. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates. *Ultrasonics*, 2013, vol. 53, iss. 1, pp. 283–293.
7. Babeshko, V.A., Syromyatnikov P.V. Metod postroeniya simvola Fur'e matritsy Grina mnogoslonoynogo elektrouprugogo poluprostranstva [Method of constructing the Fourier symbol of the green matrix of a multilayer electroelastic half-space]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Solid state mechanics], 2002, no. 5, pp. 35–47. (In Russian)
8. Fedoryuk, M.V. *Metod perevala* [Saddle-Point Method]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)