

Ф И З И К А

УДК 519.63

DOI: 10.31429/vestnik-17-4-43-47

ВАРИАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ СКОРОСТИ
СЕДИМЕНТАЦИИ ВЗВЕШЕННОГО ВЕЩЕСТВА В МОРЕ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

THE VARIATIONAL IDENTIFICATION ALGORITHM OF THE SPEED
SEDIMENTATION OF SUSPENDED MATTER IN THE SEA

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia
e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. Technical capacity information from satellites about the state of the surface of the ocean and seas, the development of methods and algorithms of information processing and mathematical modelling of water circulation, leads to the creation of algorithms for assimilation of such information in dynamic models. The parameters found in this case make it possible to obtain a model solution that best matches the measurements due to the minimization of the forecast quality functional used. Variational algorithms for solving various problems of identifying certain parameters of numerical simulation of passive impurity transfer are based on solving adjoint problems and implementing iterative procedures for finding optimal parameters from measurement data. Such parameters in the passive impurity transfer problem can be the initial data, the flows of matter at the bottom and surface, the power of point sources, the coefficients of turbulent diffusion, and the velocity fields. In this paper, this parameter is the particle sedimentation rate. They are deposited by gravity, which naturally depends on the particle size. However, the task of estimating some averaged values is possible on the basis of assimilation of operational information obtained from the satellite. The algorithm is based on solving the conjugate problem and the problem in variations. The problem is solved by searching for the minimum of the quadratic functional of the forecast quality, and the model acts as constraints when minimizing it. To construct the functional gradient, the solution of the corresponding adjoint problem is used. Expressions for determining the desired functional gradient in the parameter space are given.

Keywords: transfer model, data assimilation, sedimentation rate, parameter identification, functional minimization.

Введение

В последние годы в связи с интенсивным развитием технических возможностей получения информации со спутников о состоянии поверхности океана и морей, созданием методов и алгоритмов обработки такой информации [1], а также методов математического моделирования циркуляции вод, требуется создание и применение современных алгоритмов ассимиляции такой информации в динамических моделях. Существуют разные подходы к решению такой задачи, это динамико-стохастические алгоритмы [2] корректировки модельного решения и вариационные мето-

ды [3–8] ассимиляции данных измерений за счет идентификации используемых в модели параметров. Найденные при этом параметры позволяют получать решение модели, наилучшим образом согласованное с измерениями в силу минимизации используемого функционала качества прогноза.

Если первый подход обладает определенными трудностями корректного определения ковариационной матрицы ошибок, то при реализации второго в случае нелинейных ограничений требуется производить линеаризацию на используемом интервале ассимиляции. В случае линейных ограничений, например, при решении задач переноса пассивной примеси,

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела вычислительной техники и математического моделирования Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

проблемы поиска глобального минимума нет в силу выпуклости самого функционала качества и линейности ограничений, которые не меняют выпуклость общего функционала. Такие алгоритмы для решения различных задач идентификации тех или иных [9] параметров численного моделирования переноса пассивной примеси основаны на решении сопряженных задач и реализации итерационных процедур поиска оптимальных параметров по данным измерений.

Единственность решения сопряженной задачи [10] и выпуклость функционала позволяет уверенно идентифицировать необходимые параметры. Такими параметрами в задаче переноса пассивной примеси могут быть начальные данные, потоки вещества на дне и поверхности, мощность точечных источников, коэффициенты турбулентной диффузии и поля скорости. В данной работе таким параметром является скорость седиментации частиц, т.е. их осаждение под действием силы тяжести, которая естественным образом зависит от размера частиц. Поэтому задача моделирования таких процессов должна осуществляться по ансамблю компонент взвеси, но для этого необходимо наличие данных контактных измерений. Тем не менее, задача оценки некоторых осредненных величин возможна на основе ассимиляции оперативной информации, получаемой с ИСЗ.

В работе [11] предложен и реализован вариационный алгоритм для идентификации начального поля концентрации взвешенного вещества по серии снимков поверхности Азовского моря. И использованные данные [12] соответствуют периоду интенсивного ветрового воздействия и характеризуются сформировавшимся полем концентрации. В данной работе в качестве искомого параметра рассматривается скорость седиментации, а в качестве данных измерений — поля концентрации для периода времени, когда после интенсивного ветрового воздействия происходит резкое его уменьшение, вплоть до штилевых значений [13]. Поэтому появляется возможность оценить требуемый параметр модели на данном интервале времени.

1. Модель переноса примеси

Рассмотрим модель [14] переноса пассивной примеси в σ -координатах

$$\begin{aligned} & \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial (W - W_S)C}{\partial \sigma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0, \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (1.4)$$

где t — время; D — динамическая глубина; C — концентрация примеси; W_S — скорость седиментации примеси; U, V, W — компоненты поля скорости; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно; \mathbf{n} — нормаль к боковой границе, C_0 — начальное поле концентрации.

Кроме этого уравнения, в дальнейшем понадобится аналог уравнения неразрывности в σ -координатах

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.5)$$

2. Вариационный алгоритм идентификации

Пусть данные измерений имеются в моменты времени $t_m \in [0, T]$, тогда задача усвоения данных измерений $C_{t_m}^{\text{изм}}$ состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} (P(RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), P(RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}))_{M_t}, \quad (2.1)$$

где M — область интегрирования модели на интервале времени $[0, T]$, R — оператор проектирования в точки наблюдений, P — оператор расширения нулями функций невязок, заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (2.1) с ограничениями модели (1.1)–(1.3) эквивалентна поиску

экстремума следующего функционала

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial(W - W_S)C}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma^0}, \quad (2.2)$$

где $M_t = M \times [0, T]$.

Записывая вариацию функционала (2.2) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах (1.5), получим

$$\delta I = \left(\delta W_S, \frac{\partial C}{\partial \sigma} C^* \right)_{M_t}, \quad (2.3)$$

где C^* — множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \\ & - \frac{\partial(W - W_S)C^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \\ & - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = \\ & = -P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ t = T : C^* = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из стационарности функционала и определения его градиента имеем

$$\nabla_{W_S} I = \int_{M_t} \frac{\partial C}{\partial \sigma} C^* dM_t. \quad (2.7)$$

Значение мощности источника ищется итерационно

$$W_S^{n+1} = W_S^n + \tau \nabla_{W_S} I, \quad (2.8)$$

где τ — итерационный параметр, который может выбираться следующим образом

$$\tau = \frac{(P(C_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), P\delta C_{t_m})_{M_t}}{(P\delta C_{t_m}, P\delta C_{t_m})_{M_t}}, \quad (2.9)$$

где δC — решение соответствующей задачи в вариациях

$$\begin{aligned} & \frac{\partial D\delta C}{\partial t} + \frac{\partial DU\delta C}{\partial x} + \frac{\partial DV\delta C}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(W - W_S)\delta C}{\partial \sigma} - \nabla_{W_S} I \frac{\partial C}{\partial \sigma} C^* = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D\delta C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D\delta C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (2.10)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial \delta C}{\partial n} = 0, \quad (2.11)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \\ \sigma = -1 : \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

и начальными данными

$$\delta C(0, x, y, \sigma) = 0. \quad (2.13)$$

В целом алгоритм идентификации состоит в следующем:

- в процессе интегрирования модели (1.1)–(1.4) запоминаются невязки прогноза для моментов времени $t_m \in [0, T]$;
- решается сопряженная задача (2.4)–(2.6) и строится градиент функционала (2.7);
- интегрируется задача в вариациях (2.10)–(2.13);
- находится итерационный параметр τ по формуле (2.9);
- осуществляется итерационный спуск (2.8) в пространстве параметров для минимизации функционала (2.1).

Заключение

На основе вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений построена процедура идентификации скорости седиментации взвешенного вещества в море. Процедура построена для модели переноса пассивной примеси по данным измерений, распределенных по времени и пространству и поступающих с поверхности моря. В основе алгоритма лежит решение сопряженной задачи и задачи в вариациях для определения итерационного

параметра. Задача решается за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза, а модель выступает в роли ограничений при его минимизации. Для построения градиента функционала используется решение соответствующей сопряженной задачи. В целом построенный алгоритм идентификации искомого параметра в модели переноса может быть использован при ассимиляции спутниковой информации о концентрации взвешенного вещества в верхнем слое моря.

Литература

1. Кременчуцкий Д.А., Кубряков А.А., Завьялов П.О., Коновалов Б.В., Станичный С.В., Алескерова А.А. Определение концентрации взвешенного вещества в Черном море по данным спутника MODIS // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2014. № 29. С. 1–9.
2. Тимченко И.Е. Динамико-стохастические модели состояния океана. Киев: Наук. думка, 1981. 191 с.
3. Marchuk G.I., Penenko V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // Modelling and Optimization of Complex Systems. In: Marchuk G.I. (ed.) Proc. of the IFIP-TC7 Working conf. P. 240–252. New York: Springer, 1978.
4. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2010. Вып. 22. С. 240–244.
5. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 350 с.
6. Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности её решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С.643–654.
7. Шутяев В.П., Ле Диме Ф., Агошков В.И., Пармузин Е.И. Чувствительность функционалов задач вариационного усвоения данных наблюдений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 3. С.392–400.
8. Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E. Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation // Nonlinear processes in Geophysics. 2018. Vol. 25. Iss. 2. P. 429–439.
9. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Identification of a pollution source power in the Kazantip bay applying the variation algorithm // Physical Oceanography. 2015. No. 2. P. 69–76.
10. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. Наука, 1982. 320 с.
11. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Станичный С.В. Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2020. Т. 17. № 2. С. 40–48.
12. NASA Worldview. Режим доступа: <http://worldview.earthdata.nasa.gov> (дата обращения 12.11.2020).
13. Marine Portal. Marine Hydrophysical Institute of RAS. Режим доступа: <http://dvs.net.ru/mp/data/201507vw.shtml> (дата обращения 12.11.2020).
14. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.

References

1. Kremenchuckij ,D.A., Kubryakov, A.A., Zav'yalov, P.O., Konovalov, B.V., Stanichnyj, S.V., Aleskerova A.A. Opredelenie koncentracii vzveshennogo veshchestva v Chernom more po dannym sputnika MODIS [Determination of the concentration of suspended matter in the Black sea according to the data of the MODIS satellite]. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoj zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* [Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources], 2014, no. 29, pp. 1–9. (In Russian)
2. Timchenko, I.E. *Dinamiko-stohasticheskie modeli sostoyaniya okeana* [Dynamic-stochastic models of the ocean state]. Naukova dumka, Kiev, 1981. (In Russian)
3. Marchuk, G.I., Penenko, V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. Modelling and Optimization of Complex Systems. Marchuk G.I. (ed.) *Proc. of the IFIP-TC7 Working conf.* New York: Springer, 1978, pp. 240–252.
4. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Ispol'zovanie variacionnyh principov i resheniya sopryazhennoj zadachi pri identifikacii vhodnyh parametrov modeli perenosa passivnoj primesi [The use of variational principles and the solution of the conjugate problem in identifying the input parameters of the passive impurity transport model]. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezh-*

- noj i shel'fovoj zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* [Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources], 2010, iss. 22, pp. 240–244. (In Russian)
5. Penenko, V.V. *Metody chislennogo modelirovaniya atmosferyh processov* [Methods of numerical modeling of atmospheric processes]. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1981. (In Russian)
 6. Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Shutyaev, V.P. Assimilyaciya dannyh nablyudenij v zadache cirkulyacii Chernogo morya i analiz chuvstvitel'nosti ego resheniya [Assimilation of observational data in the Black sea circulation problem and sensitivity analysis of its solution]. *Izv. RAN. Fizika atmosfery i okeana* [Izvestiya RAS. Physics of the atmosphere and ocean], 2013, vol. 49, no. 6, pp. 643–654. (In Russian)
 7. Shutyaev, V.P., Le Dime, F., Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I. Chuvstvitel'nost' funkcionalov zadach variacionnogo usvoeniya dannyh nablyudenij [Sensitivity of functional problems of variational assimilation of observational data]. *Izv. RAN. Fizika atmosfery i okeana* [Izvestiya RAS. Physics of the atmosphere and ocean], 2015, vol. 51, no. 3, pp. 392–400. (In Russian)
 8. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X., Parmuzin, E. Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation. *Nonlinear processes in Geophysics*, 2018, vol. 25, iss. 2, pp. 429–439.
 9. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Indentification of a pollution source power in the Kazantip bay applying the variation algorithm. *Physical Oceanography*, 2015, no. 2, pp. 69–76.
 10. Marchuk, G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchej sredy* [Mathematical modeling in the environmental problem] [Mathematical modeling in the environmental problem]. Nauka, Moscow, 1982. (In Russian)
 11. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Stanichnyj, S.V. Variacionnaya assimilyaciya sputnikovyh dannyh poverhnostnoj koncentracii vzveshennogo veshchestva v Azovskom more. *Sovremennye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 40–48.
 12. NASA Worldview. Available at: <http://worldview.earthdata.nasa.gov> (accessed 12.11.2020).
 13. Marine Portal. Marine Hydrophysical Institute of RAS. Available at: <http://dvs.net.ru/mp/data/201507vw.shtml> (accessed 12.11.2020).
 14. Ivanov, V.A., Fomin, V.V. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh processov v zone more – susha* [Mathematical modeling of dynamic processes in the sea – land zone]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol', 2008. (In Russian)