Математика

УДК 517.9 (531/534)

DOI: 10.31429/vestnik-18-1-14-22

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЁННОГО УСЛОВИЯ ЛАПЛАСА

Щербаков М. Е., Щербаков Е. А.

LOCAL EXISTENCE THEOREM FOR THE SOLUTION OF THE GENERALIZED LAPLACE CONDITION

M. E. Shcherbakov, E. A. Shcherbakov

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

Abstract. The generalized Laplace condition describing equilibrium surface of pendant drop with intermediate layer is considered and the corresponding Cauchy problem is formulated. The main part of the generalized Laplace condition is not linear. We construct non-linear differential operator of the first order and formulate Cauchy problem for it. Using Shauder theorem we prove that it has analytic positive solution. We prove that the coefficients of the series representing this solution can be used as upper bounds for the moduli of the coefficients of the series formally representing a solution of the generalized Laplace condition. Thus, the existence of analytic solution of nonlinear equation representing generalized Laplace condition is proved. The theorem we proved gives a possibility to calculate with any degree of approximation the form of the drop. The method without any serious alterations can be used in order to investigate sessile drops.

Keywords: equilibrium surface, Laplace condition, intermediate layer, generalized Laplace condition, mean curvature, Gauss curvature, Cauchy problem, Shauder theorem, majorizing series.

1. Постановка задачи

Классическое условие Лапласа [1],

$$\sigma H = P_2 - P_1 \tag{1.1}$$

определяет форму поверхности, разделяющей две среды, находящиеся в состоянии равновесия.

Здесь H — средняя кривизна равновесной поверхности, P_2, P_1 — давления в средах, а коэффициент σ – коэффициент капиллярных сил.

Рассмотрим жидкую осесимметричную каплю, свисающую с плоской поверхности. Введём в её меридиональном сечении систему координат, направив ось u по вертикали, а ось r — по горизонтали. Будем считать, что образующая поверхности капли представляет собой график функции $u = u\,(r)$.

В работе [1] с помощью вариационного метода было получено уравнение для образующей равновесной капли заданного объёма в виде

$$H = -\kappa u + \lambda. \tag{1.2}$$

Здесь λ — множитель Лагранжа, величина которого соответствует заданному объёму [1], а коэффициент κ определяется коэффициентом капиллярности и полем гравитационных сил.

Исследования капель малого размера показали, что формулы (1.1), (1.2) непригодны для исследования их формы [2, 3]. В соответствии с идеей Максвелла о необходимости учёта промежуточного слоя, состоящего из молекул сред, находящихся в состоянии равновесия, в работах [2, 3] было получено следующее обобщённое условие Лапласа

$$\sigma\,(H + l_p K) = P_2 - P_1. \tag{1.3}$$

Здесь l_p — толщина промежуточного слоя, K — Гауссова кривизн равновесной поверхности.

В работе [5] с помощью вариационного метода было установлено, что поверхность равновесной капли в модели, учитывающей промежуточный слой, удовлетворяет уравнению

$$H + l_p K = -\kappa u + \lambda. \tag{1.4}$$

Множитель Лагранжа в новой модели зависит от толщины промежуточного слоя [5].

Щербаков Михаил Евгеньевич, преподаватель кафедры функционального анализа и алгебры Кубанского государственного университета; e-mail: latiner@mail.ru.

Щербаков Евгений Александрович, профессор кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: echt@math.kubsu.ru.

С помощью сдвига системы координат вдоль оси u можно избавиться от множителей Лагранжа как в уравнении (1.2), так и в уравнении (1.4).

Обозначим через $\psi = \psi(r)$ угол наклона к оси r касательной к образующей в точке $(r, u(r))$. Пусть $v = \sin\psi$. Нетрудно убедиться, что функция v в случае классического условия Лапласа удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + \kappa u = 0. \tag{1.5}$$

Из определения функции v мы получаем

$$\frac{du}{dr} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{1.6}$$

В работе [1] с помощью мажорирующих рядов была доказана локальная теорема существования решения квазилинейной системы уравнений (1.5), (1.6).

Это означает, что существуют капли, представляемые графиками аналитических функций, удовлетворяющих классическому условию Лапласа.

Целью настоящей работы является построения локального аналитического решения нелинейной системы уравнений, порождаемой обобщённым условием Лапласа (1.4).

2. Обобщённое условие Лапласа и задача Коши для функции v

2.1. Обобщённое условие Лапласа

Прежде всего, исходя из обобщённого условия Лапласа , выведем нелинейную систему уравнений, аналогичную системе (1.5), (1.6).

Лемма 1. Пусть $u = u(r)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, r_A]$ функция, график которой является образующей равновесной поверхности, определяемой условием (1.4), $\psi = \psi(r)$ — угол наклона к оси r касательной к образующей в точке $(r,\ u(r))$ и $v = \sin\psi$. Тогда функции uv являются решением следующей системы уравнений

$$-\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(rv) + l_p\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(v^2\right) = -\kappa u + \lambda, \tag{2.1}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим естественную параметризацию образующей равновесной поверхности

$$r = r(s), \quad u = u(s), \quad s \in [0, l].$$

Здесь l — длина образующей поверхности. Параметрическое представление поверхности при этом приобретает вид

$$(s, \varphi) \to (r(s)\cos\varphi, r(s)\sin\varphi, u(s)). \tag{2.3}$$

Используя параметрическое представление (2.3), получаем следующие формулы для средней и Гауссовой кривизны [6]:

$$2H = -\frac{\acute{u}}{r} + \dot{u}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{u}, \quad K = -\frac{\ddot{r}}{r}. \tag{2.4}$$

В случае естественной параметризации имеем

$$\dot{u}^2 + \dot{r}^2 = 1. \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) получаем

$$2H = -\frac{\acute{u}}{r} + \frac{\ddot{r}}{\dot{u}} = -\frac{\acute{u}}{r} - \frac{d\acute{u}}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\acute{u}). \tag{2.6}$$

Далее [6]

$$K = -\frac{\ddot{r}}{r} = \frac{\sqrt{1-\dot{r}^2}}{r}\frac{d}{dr}\sqrt{1-\dot{r}^2} = \\ = \frac{\acute{u}}{r}\frac{d\acute{u}}{dr} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(\dot{u}^2\right). \tag{2.7}$$

Подставляя (2.4), (2.5) в (1.4) и учитывая (1.6), получим

$$-\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(r\acute{u}) + l_p\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(\dot{u}^2\right) = -\kappa u + \lambda, \tag{2.8}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{du/ds}{dr/ds}. \tag{2.9}$$

Так как

$$\acute{u} = du/ds = v, \quad dr/ds = \sqrt{1-(du/ds)^2},$$

то система (2.8)–(2.9) представляет собой систему (2.1), (2.2).

Лемма доказана. □

Система (2.1)–(2.2) в отличие от системы (1.5), (1.6), соответствующей классическому условию Лапласа, является нелинейной системой.

Используя (2.1), (2.2), выведем уравнение для функции v и сформулируем для неё задачу Коши. При этом будем считать, что $\lambda = 0$. Как уже было сказано, этого можно достичь за счёт сдвига системы координат вдоль оси u.

Лемма 2. Допустим, что функция из (2.1) является дважды непрерывно дифференцируемой. В таком случае она удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)-\frac{1}{r}v\right]-$$
$$-l_p\left\{\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{v^2}{r}\right]\right\}=$$
$$=2\kappa r\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Дифференцируя обе части (2.1), в котором полагаем $\lambda=0$, получим

$$-\frac{d^2}{dr^2}(rv)+l_p\frac{d^2}{dr^2}\left(r\frac{v^2}{r}\right)=$$
$$=-2\kappa u-2\kappa r\frac{du}{dr}. \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.11) представление для u из (2.1), а из (2.2) представление для du/dr, придём к следующему уравнению

$$-\frac{d^2}{dr^2}(rv)+l_p\frac{d^2}{dr^2}\left(r\frac{v^2}{r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv)-l_p\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{v^2}{r}\right)=$$
$$=-2\kappa r\frac{v}{\sqrt{1-v^2}},$$

эквивалентному уравнению

$$-r\frac{d^2v}{dr^2}-2\frac{dv}{dr}+\frac{dv}{dr}+\frac{v}{r}+$$
$$+l_pr\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{v^2}{r}\right)+2l_p\frac{d}{dr}\frac{v^2}{r}-$$
$$-l_p\frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{r}\right)-\frac{\frac{v^2}{r}}{r}=-2\kappa\,r\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Последнее уравнение после элементарных преобразований приводится к уравнению (2.10).

Лемма доказана. □

Для того, чтобы сформулировать задачу Коши для уравнения второго порядка, которому удовлетворяет функция v, выясним, какими должны быть начальные значения $v(0)$ функции v и её производной $v'(0)$.

Поскольку меридиональное сечение капли симметрично относительно оси r, то значение $v(0)$ должно быть равно нулю. Относительно $v'(0)$ докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть функция v удовлетворяет уравнению (2.1), в котором $\lambda=0$, а функция u непрерывна в нуле. Допустим, что функция v имеет в нуле производную $v'(0)$. В таком случае $v'(0)$ удовлетворяет уравнению

$$l_pz^2-z=-\kappa u(0). \quad (2.12)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольно малую окрестность нуля. Из (2.1) получаем

$$rv(r)-l_pv^2(r)=$$
$$=-\int_0^r\{2\kappa[u(t)-u(0)]\}\,tdt-$$
$$-2\kappa u(0)\int_0^r tdt. \quad (2.13)$$

Функция u непрерывна в нуле, а функция v, как и функция v^2, имеет производную в нуле. Поделив обе части (2.13) на r^2 и переходя к пределу, — получим

$$v'(0)-l_pv'^2(0)=-\frac{\kappa}{2}u(0).$$

Лемма доказана. □

Примечание. Уравнение (2.12) имеет два корня. Обозначим нужный корень через $\mathbf{z_a}$ и положим

$$z_a=\frac{1}{2l_p}\left\{1-\sqrt{1-2\kappa l_pu_0}\right\},\quad u_0=-u(0).$$

Такой выбор корня будет ясен из рассмотрения вспомогательной задачи Коши.

Итак, приходим к следующей задаче Коши для функции v.

2.2. Задача Коши для функции $\mathbf{v}$

В классе аналитических функций v, заданных в фиксированной окрестности нуля и удовлетворяющих в ней условию

$$|v(x,y)|\leqslant\vartheta_0<\infty, \quad (2.14)$$

найти ту, которая является решением уравнения (2.10) и удовлетворяет начальным условиям

$$v(0)=0,\quad v'(0)=z_a. \quad (2.15)$$

Примечание. Решение поставленной задачи позволит нам по заданной наперёд высоте $u_0 := |u(0)|$ капли найти радиус r_A пятна прилипания, а также функции uv, являющиеся решением системы (2.1), (2.2) и удовлетворяющие условиям

$$u(0) = -u_0, \qquad (2.16)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = z_a. \qquad (2.17)$$

Подчеркнём здесь, что величина r_A определяется по заданным ϑ_0 и u_0.

3. Рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда, представляющего функцию v

Предположим теперь, что в некоторой односторонней окрестности $[0, r_A[$ нуля существует аналитическое решение уравнения (2.10), представленное во внутренних её точках равномерно сходящимся рядом

$$v(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n. \qquad (3.1)$$

Здесь $a_0 = 0$ в силу первого из условий (2.13).

В соответствие с (3.1) разложение в ряд функции v^2/r имеет вид

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu r^\mu = \frac{1}{r}\sum_{n=2}^{\infty} r^n \left(\sum_{\substack{\nu,\, \mu\, :\, \nu+\mu=n \\ \nu\geqslant 1,\, \mu\geqslant 1}} a_\nu a_\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\sum_{\substack{\nu, \mu\, :\, \nu+\mu=n+1 \\ \nu\geqslant 1, \mu\geqslant 1}} a_\nu a_\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n, \qquad (3.2)$$

$$A_n = \sum_{\substack{\nu, \mu\, :\, \nu+\mu=n+1 \\ \nu\geqslant 1, \mu\geqslant 1}} a_\nu a_\mu.$$

В силу аналитичности функции v^2/r ряд (3.2) сходится равномерно на любом компакте из односторонней окрестности нуля.

Пусть L — дифференциальный оператор вида

$$L[\omega] := \frac{d}{dr}(r\omega(r)) - \frac{\omega}{r}.$$

В таком случае уравнение (2.10) можно представить в следующем виде

$$L[v] - l_p L\left[\frac{v^2}{r}\right] = 2\kappa r \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Результат действия оператора L на ряд (3.1) имеет вид

$$L[v] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2 - 1\right) a_n r^{n-1}. \qquad (3.3)$$

Аналогичным образом получаем

$$L\left[\frac{v^2}{r}\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2-1\right) A_n r^{n-1}, \qquad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) следует

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) - \frac{1}{r}v\right] - l_p \left\{ \frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{v^2}{r}\right]\right\} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2-1\right)\left(a_n - l_p A_n\right) r^{n-1}. \qquad (3.5)$$

Произведём теперь разложение в ряд по степеням r правой части уравнения (2.10). Рассмотрим с этой целью её разложение по степеням v.

Поскольку нас интересуют углы смачивания, отличные от $\pi/2$, то правая часть представляет собой аналитическую функцию от переменной v во внутренних точках отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим её ряд Тейлора

$$r\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = r\sum_{n=1}^{\infty} c_n v^n, \quad c_1 = 1. \qquad (3.6)$$

Далее

$$v^n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k\right)^n = \sum_{l=n}^{\infty} \alpha_l r^l,$$

$$\alpha_l = \sum_{k_1, \ldots k_l : k_1 + \ldots + k_n = l} a_{k_1} \ldots a_{k_l}. \qquad (3.7)$$

Заметим теперь, что степень r^l содержится лишь в тех степенях v^m, для которых $m \leqslant l$. Это означает, что коэффициент β_l при r^l в разложении

$$r\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \sum_{l=2}^{\infty} \beta_l r^l \tag{3.8}$$

по степеням r имеет вид

$$\begin{aligned} &\beta_l = c_1 a_{l-1} + \ldots \\ &\ldots + c_m \sum_{k_1,\ldots k_m\colon k_1+\ldots+k_m=l-1} a_{k_1}\ldots a_{k_m} + \ldots \\ &\qquad \ldots + c_{l-1} a_1^{l-1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Учитывая (3.5), (3.9), перепишем уравнение (2.10) в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2-1\right)\left(a_n - l_p A_n\right) r^{n-1} = \\ &\quad = \sum_{n=2}^{\infty} \Bigg(c_1 a_{n-1} + \ldots \\ &\ldots + c_m \sum_{k_1,\ldots k_m\colon k_1+\ldots+k_m=n-1} a_{k_1}\ldots a_{k_m} + \ldots \\ &\qquad \ldots + c_{n-1} a_1^{n-1} \Bigg) r^n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Равенство (3.10) позволяет получить рекуррентные соотношения для определения коэффициентов a_n в разложения (3.1).

В частности, получаем

$$a_2 - l_p A_2 = a_2 - l_p a_1^2 = 0. \tag{3.11}$$

Принимая во внимание (3.11), определяющее коэффициент a_2 по заданному коэффициенту a_1, равенство (3.10) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2-1\right)\left(a_n - l_p A_n\right) r^{n-1} = \\ &\quad = \sum_{n=2}^{\infty} \Bigg(c_1 a_{n-1} + \ldots \\ &\ldots + c_m \sum_{k_1,\ldots k_m\colon k_1+\ldots+k_m=n-1} a_{k_1}\ldots a_{k_l} + \ldots \\ &\qquad \ldots + c_{n-1} a_1^{n-1} \Bigg) r^n. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (3.12) получаем для $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned} &\left(n^2-1\right)\left(a_n - l_p A_n\right) = \\ &\qquad = c_1 a_{n-2} + \ldots \\ &\ldots + c_m \sum_{k_1,\ldots k_m\colon k_1+\ldots+k_m=n-1} a_{k_1}\ldots a_{k_m} + \ldots \\ &\qquad \ldots + c_{n-1} a_1^{n-2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Используя представление для A_n из формулы (3.2), получим

$$A_n = 2a_1 a_n + \sum_{\substack{\nu,\ \mu\ :\ \nu+\mu=n+1 \\ \nu>1,\, \mu>1}} a_\nu a_\mu. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.13), находим

$$\begin{aligned} &\left(n^2-1\right)\left(1 - 2a_1 l_p\right) a_n = \\ &= \left(n^2-1\right) l_p \sum_{\substack{\nu,\ \mu\ :\ \nu+\mu=n \\ \nu>1,\, \mu>1}} a_\nu a_\mu + c_1 a_{n-2} + \ldots \\ &\ldots + c_m \sum_{k_1,\ldots k_m: k_1+\ldots+k_m=n-2} a_{k_1}\ldots a_{k_m} + \ldots \\ &\qquad \ldots + c_{n-1} a_1^{n-2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Формула (3.15) представляет собой рекуррентное соотношение, позволяющее по найденным коэффициентам $a_1, \ldots, a_n$ и известным коэффициентам $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ вычислить коэффициентт a_{n+1} разложения (3.1) функции v в ряд.

4. Вспомогательная задача Коши. Метод Уэнта построения сходящегося ряда, мажорирующего ряд для функции v

Идея Уэнта [1] применительно к построению аналитического решения классического условия Лапласа состоит в том, чтобы с помощью задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка построить ряд, мажорирующий ряд, определяющий решение классического условия Лапласа.

Воспользуемся идеей Уэнта для построения сходящегося ряда, мажорирующего ряд (3.1).

Пусть

$$L_1\left[w\right] \ := \ \frac{dw}{dr} - l_p \frac{d}{dr}\left(\frac{w^2}{r}\right) + \frac{\kappa}{2} u_0, \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} M_1\left[w\right] := Cr\frac{\frac{w}{\rho}}{1-\frac{w}{\rho}}, \\ C>0, \quad 0<\rho<1. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Вспомогательная задача Коши. В окрестности нуля найти решение уравнения

$$L_1[w] = M_1[w], \tag{4.3}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$w(0) = 0. \tag{4.4}$$

Лемма 4. Существует правосторонняя окрестность нуля и аналитическая в ней функция, являющаяся решением задачи (4.3), (4.4). При этом функция w дифференцируема в нуле и

$$w'(0) = \frac{1}{2l_p}\left\{1 - \sqrt{1 - 2\kappa l_p u_0}\right\}.$$

Функция w положительна в$(0, r_d]$.

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство $\mathfrak{A}([0, r_d])$ функций w, аналитических внутри $[0, r_d]$, непрерывных на отрезке $[0, r_d]$ и нормированных нулём в нуле, норма в котором определяется стандартным образом

$$\|w\| = |w(t)|.$$

Рассмотрим замкнутый шар

$$B_d \subset \mathfrak{A}([0, r_d]),$$

$$B_d = \{w \in \mathfrak{A}([0, r_d]) \mid \|w\| \leqslant d\},$$

$$d \leqslant (\rho - \varepsilon)/\rho, \quad 0 < \varepsilon < \rho.$$

Запишем уравнение (4.3) как условие существования неподвижной точки для некоторого оператора, действующего в B_d.

С этой целью, предполагая, что решение (1.3) существует, проинтегрируем обе части этого уравнения, получая в результате

$$l_p w^2(r) - rw(r) + \kappa u_0 r^2 + \\ + r\int_0^r Ct\frac{\frac{w}{\rho}}{1 - \frac{w}{\rho}}dt = 0. \tag{4.5}$$

Из (4.5) получаем

$$w(r) = \frac{1}{2l_p}\left\{r \pm \sqrt{\xi}\right\}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{A}[w] := \frac{1}{2l_p}\left\{r - \sqrt{\xi}\right\}, \tag{4.7}$$

$$\xi = r^2 - 2\kappa l_p u_0 r^2 - 4rl_p\int_0^r Ct\frac{\frac{w}{\rho}}{1 - \frac{w}{\rho}}dt.$$

Ясно, что $\mathfrak{A}[w]$ является вполне непрерывным оператором на B_d.

Нетрудно убедиться в том, что решение задачи Коши (4.3), (4.4) является неподвижной точкой оператора (4.7),

$$w = \mathfrak{A}[w]. \tag{4.8}$$

Так как

$$|\mathfrak{A}[w]| = \left(r^2 - \xi\right) : \left[r + (\xi)^{\frac{1}{2}}\right]2 \leqslant \\ \leqslant \left(2\kappa l_p u_0 + 4rCl_p\frac{\rho - \varepsilon}{\rho}\right)r,$$

то выбирая r_d достаточно малым, получим, что $\mathfrak{A}$ преобразовывает B_d в себя. По теореме Шаудера при таком преобразовании существует неподвижная точка, т.е. уравнение (4.8) имеет решение. Как уже было сказано, это влечёт разрешимость вспомогательной задачи Коши.

Заметим теперь, что из (4.6) следует, что производная $w'(0)$ существует и удовлетворяет условию

$$w'(0) = \frac{1}{2l_p}\left\{1 - \sqrt{1 - 2\kappa l_p u_0}\right\}$$

(см. примечание лемме 3).

В завершение доказательства леммы заметим, что функция

$$w - l_p\frac{w^2}{r}$$

положительна в $(0, r_d]$.

Лемма доказана. □

Доказанная лемма определяет решение вспомогательной задачи Коши в виде ряда

$$w = w(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n. \tag{4.9}$$

Лемма 5. Пусть $w = w(r)$ — решение вспомогательной задачи Коши, представимое рядом (4.9). Тогда все коэффициенты b_n положительны и для них имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$b_1 - l_p b_1^2 = -\frac{\kappa}{2}u_0,$$

$$2\,(1-l_pb_1)\,b_2 = 2l_pb_1^2,$$

$$n\,(1-l_pb_1)\,b_n = \\ = l_pn \sum_{\substack{\nu,\mu:\ \nu+\mu=n\\ \nu\geqslant1,\ \mu\geqslant1}} b_\nu b_\mu + \frac{1}{\rho}b_{n-2} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^m} \sum_{k_1,\ldots k_m:\ k_1+\ldots+k_m=n-2} b_{k_1}\ldots b_{k_m} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^{n-2}}b_1^{n-2}, \quad n\geqslant 3. \quad (4.10)$$

Доказательство. Заменяя в формулах (3.1), (3.2) a_n на b_n, получим

$$\frac{w^2}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} B_nr^n, \\ B_n = \sum_{\substack{\nu,\mu:\ \nu+\mu=n+1\\ \nu\geqslant1,\ \mu\geqslant1}} b_\nu b_\mu. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.9), (4.11) в (4.3), приходим к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_nr^{n-1} - l_p\sum nB_nr^{n-1} + \frac{\kappa}{2}u_0 = \\ = Cr\left(w\frac{1}{\rho} + \ldots + w^n\frac{1}{\rho^n} + \ldots\right). \quad (4.12)$$

Правая часть в формуле (4.12) переходит в выражение (3.6) при замене w на v и $1/\rho^n$ на c_n.

Поэтому коэффициент при r^n в её разложении по степеням r имеет вид

$$\frac{1}{\rho}b_{n-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^m} \sum_{k_1,\ldots k_m:k_1+\ldots+k_m=n-1} b_{k_1}\ldots b_{k_m} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^{n-1}}b_1^{n-1}. \quad (4.13)$$

При $n=1$ получаем из (4.12)

$$b_1 - l_pb_1^2 = -\frac{\kappa}{2}u_0$$

Последнее равенство означает, что коэффициенты b_1, a_1 в рядах, представляющих функции w, v, совпадают.

Далее из (4.12), (4.13) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_nr^{n-1} - l_p\sum_{n=1}^{\infty} nB_nr^{n-1} + \frac{\kappa}{2}u_0 = \\ = Cr\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{\rho}b_{n-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^m} \sum_{k_1,\ldots k_m:k_1+\ldots+k_m=n-1} b_{k_1}\ldots b_{k_m} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^{n-1}}b_1^{n-1}\Bigg),$$

$$(n+1)\,b_{n+1} - l_p(n+1)\,B_{n+1} = \frac{1}{\rho}b_{n-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^m} \sum_{k_1,\ldots k_m:k_1+\ldots+k_m=n-1} b_{k_1}\ldots b_{k_m} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^{n-1}}b_1^{n-1}. \quad (4.14)$$

Из (4.14) в соответствие с (4.11) получаем

$$b_2 - l_pb_1^2 = 0,$$

$$n\,(1-l_pb_1)\,b_n = \\ = l_pn \sum_{\substack{\nu,\mu:\ \nu+\mu=n\\ \nu\geqslant1,\ \mu\geqslant1}} b_\nu b_\mu + \frac{1}{\rho}b_{n-2} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^m} \sum_{k_1,\ldots k_m:k_1+\ldots+k_m=m} b_{k_1}\ldots b_{k_m} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\rho^{n-2}}b_1^{n-2}, \quad n\geqslant 3. \quad (4.15)$$

Соотношения (4.15) представляют собой рекуррентные соотношения для последовательного определения коэффициентов b_n

Из соотношений (4.15) следует, что все коэффициенты b_n положительны, а из сотношений (4.14) следует, что положительны все коэффициенты $b_n - l_pB_n$.

Лемма доказана. □

Теорема 6. Существует решение задачи Коши (2.12), (2.13).

Доказательство. Прежде всего заметим, что при фиксированном ρ рекуррентные соотношения во вспомогательной задаче Коши зависят лишь от начальных данных и величины ρ Это означает, что величина r_d представляет собой радиус сходимости ряда (4.9).

Далее, радиус сходимости ряда (3.6) равен единице. Поэтому

$$|c_n \rho^n| < C < \infty.$$

Для любого ρ из интервала (0,1), т.е.

$$\frac{C}{\rho^n} \geqslant |c_n|\,. \tag{4.16}$$

В соответствие с определениями операторов $L_1[w]\,M_1[w]$ для решения w уравнения (4.3), учитывая положительность w и b_n, получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2-1\right)\left(b_n-l_pB_n\right)r^{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=2}^{\infty} n\left(b_n-l_pB_n\right)r^{n-1} = C\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho}b_{n-1}+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{1}{\rho^m}\sum_{k_1c,\ldots k_m:\,k_1+\ldots+k_m=n-1} b_{k_1}\ldots b_{k_m}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\rho^{n-1}}b_1^{n-1}\right)r^n. \tag{4.17}$$

Из равенства (4.17) следует

$$n\left(b_n-l_pB_n\right)=\frac{C}{\rho}b_{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{C}{\rho^m}\sum_{k_1c,\ldots k_m:k_1+\ldots+k_m=n-2} b_{k_1}\ldots b_{k_m}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{C}{\rho^{n-2}}b_1^{n-2}. \tag{4.18}$$

Учитывая положительность коэффициентов $b_n - l_pB_n$, неравенства (4.16) и (3.15), получаем из (4.18)

$$\left(n^2-1\right)\left(1-2l_pb_1\right)b_n \geqslant$$
$$\geqslant \left(n^2-1\right)l_p \sum_{\substack{\nu,\mu:\ \nu+\mu=n\\ \nu>1,\,\mu>1}} b_\nu b_\mu + |c_1|\,b_{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+|c_m|\sum_{k_1,\ldots k_m:\,k_1+\ldots+k_m=n-2} b_{k_1}\ldots b_{k_m}+\ldots$$
$$\ldots+|c_{n-1}|\,b_1^{n-2}. \tag{4.19}$$

Отправляясь от значения $|a_1| = b_1$, последовательно получим из (4.19) неравенства

$$|a_n| \leqslant b_n, \quad n \geqslant 2. \tag{4.20}$$

Из оценок (4.20) следует абсолютная сходимость ряда (3.1).

Теорема доказана. □

Заключение

В работе выведено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка и сформулирована задача Коши, решение которой определяет равновесную поверхность висящей капли. С помощью вспомогательной задачи Коши для уравнения первого порядка, ассоциированного с обобщённым условием Лапласа, доказано существование аналитического решения обобщённого условия Лапласа, определяющее равновесную поверхность висящей капли.

Заметим здесь, что второй коэффициент разложения в ряд в обобщённом случае отличен от нуля. Он обращается в нуль, как в классическом случае, когда толщина промежуточного слоя равна нулю.

Полученные результаты дают возможность обобщить результаты, представленные в работах [8, 9].

Литература

1. *Finn R.* Equilibrium Capillary Surfaces. New York, Springer, 1986. 245 p. (Им. перевод *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989, 310 с.)
2. *Boruvka L., Neumann A.W.* Generalization of Classical Theory of Capillarity // J. Chem. Phys. 1977. Vol. 66. DOI: 10.1063/1.433866
3. *Коровкин В.П., Сажин Ф.М., Секриеру Г.В.* О зависимости между капиллярными и расклинивающими силами // Матем. исслед. (Кишинёв). 1989. № 108. С. 28–32.
4. *Maxwell G.C.* Capillary Attraction // Encyclopedia Britannica. 9th. Ed., Vol. 5. Samuel L. Hall, New York, 1978 (I.3, I.6)
5. *Shcherbakov E.* Equilibrium State of a Pendant Drop with Inter-phase Layer // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 2012. Vol. 31. C. 1–15. DOI: 10.4171/ZAA
6. *Manfredo P. do Carmo.* Differential Geometry of Curves and Surfaces. New Jersey, Prentice Hall, 1976. 503 p.
7. *Hutson V., Pym J., Cloud M.* Applications of Analysis and Operator Theory. London, Academic Press, 1980. 390 pp. (Им. перевод *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов / Под ред. А.А. Кириллова. М.: Мир, 1989. 431 с.)
8. *Матюхин С.И., Фроленков К.Ю.* Форма капель, помещенных на твердую горизонтальную поверхность // Конденсированные среды и межфазные границы. 2013. Т. 15. № 3. С. 292–304.
9. *Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigorieva E.G.* Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium capillary Surface //

Scientific Visualization. 2016. Quart. 2. Vol. 8. No. 2. P. 37–52.

References

1. Finn R. *Equilibrium Capillary Surfaces.* New York, Springer, 1986.
2. Boruvka L., Neumann A.W. Generalization of Classical Theory of Capillarity. *J. Chem. Phys.*, 1977, vol. 66. DOI: 10.1063/1.433866
3. Korovkin V.P., Sazhin F.M., Sekrieru G.V. O zavisimosti mezhdu kapillyarnymi i rasklinivayushchimi silami [On the relationship between capillary and wedging forces]. Matematicheskie issledovaniya [Mathematical research], 1989, no. 108, pp. 28–32. (In Russian)
4. Maxwell G.C. Capillary Attraction. *Encyclopedia Britannica.* Vol. 5. Samuel L. Hall, New York, 1978 (I.3, I.6)
5. Shcherbakov E. Equilibrium State of a Pendant Drop with Inter-phase Layer. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2012, vol. 31, pp. 1–15. DOI: 10.4171/ZAA
6. Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey, Prentice Hall, 1976.
7. Hutson V., Pym J., Cloud M. *Applications of Analysis and Operator Theory.* London, Academic Press, 1980.
8. Matyukhin S.I., Frolenkov K.Yu. Forma kapel', pomeshchennykh na tverduyu gorizontal'nuyu poverkhnost' [Form of droplets placed on a solid horizontal surface]. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy* [Condensed media and interphase boundaries], 2013, vol. 15, no. 3, pp. 292–304. (In Russian)
9. Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigorieva E.G. Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium capillary Surface. *Nauchnaya vizualizatsiya* [Scientific Visualization], 2016, quart. 2, vol. 8, no. 2, pp. 37–52.

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2021
© Щербаков М. Е., Щербаков Е. А., 2021

Статья поступила 1 марта 2021 г.