

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-18-1-23-31

О РОЛИ ДЕФЕКТОВ ПОКРЫТИЯ В ВИДЕ ТРЕЩИН НА ПРЕДМЕТ  
РАЗРУШЕНИЯ ПРЕДОПЛЗНЕВОЙ СТРУКТУРЫБабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Хрипков Д. А., Бушуева О. А.,  
Евдокимов В. С., Телятников И. С., Уафа С. Б.ON THE ROLE OF COATING DEFECTS IN THE FORM OF CRACKS  
FOR THE DESTRUCTION OF THE PRE-LANDSLIDE STRUCTUREV. A. Babeshko<sup>1,2</sup>, O. V. Evdokimova<sup>2</sup>, O. M. Babeshko<sup>1</sup>, D. A. Khripkov<sup>1</sup>, O. A. Bushueva<sup>1</sup>,  
V. S. Evdokimov<sup>2</sup>, I. S. Telyatnikov<sup>2</sup>, S. B. Uafa<sup>2</sup><sup>1</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia<sup>2</sup> Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia  
e-mail: babeshko41@mail.ru

*Abstract.* In this paper, the block element method is used to construct a model of the pre-landslide state of a block structure consisting of a water-saturated medium and an elastic coating, taking into account the formation of a crack in the coating. The spatial pre-landslide structure occupies an unlimited cylindrical region, in the cross section of which is the third quadrant. It is filled with a medium described by the anisotropic Helmholtz equation, which is extremely fluid among other water-saturated media. Taking into account the physical and mechanical properties of the pre-landslide structure, it is a vertical deformable containment wall with a deformable horizontal coating, called the sarcophagus of the landslide environment. To construct a model that is adequately formulated, we consider the boundary value problem for the three-dimensional Helmholtz equation in the specified domain, taking into account the presence of deformable walls and coverings. The block element method is used to construct an exact solution of the boundary value problem for the accepted coatings on the membrane boundary. The properties of the crack formed in the sarcophagus membrane and the consequences of its development for the destruction of the pre-landslide structure in the constructed model are investigated. All the results constructed for the Helmholtz equations, thanks to the approach outlined in the authors' latest publication in the Reports of the Russian Academy of Sciences, are transferred to materials of various rheological properties.

*Keywords:* landslide phenomena, block element method, boundary value problem, crack membrane surface, anisotropic Helmholtz equation, pseudodifferential equations.

---

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, руководитель научных направлений математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: vestnik@fpm.kubsu.ru.

Бушуева Ольга Алексеевна, студентка магистратуры факультета компьютерных технологий и математики Кубанского государственного университета; e-mail: olyabushueva@gmail.com.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok\_vova@mail.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux\_t@list.ru.

Уафа Самир Баширович, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: uaafa70@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2021 г. Минобрнауки (проект FZEN-2020-0022), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-05-80008).

## Введение

Оползневые и селевые явления относятся к числу сложнейших для прогноза процессов, наносящих огромный ущерб обществу, как материальный, так и связанный с жертвами. Сложность прогнозирования событий этих явлений связана с большим комплексом физических, механических, гидромеханических, реологических, пластических явлений, зависящих в том числе от геометрических параметров рельефа и ландшафта территорий. Именно это обстоятельство не позволяет, кроме отдельных частных случаев, построить строго обоснованную математическую теорию и модель этих процессов. Создание теории и моделей этих явлений позволит как получить достаточно достоверные данные о процессах, протекающих в оползневой зоне так и оценить шаги, позволяющие штатно инициировать оползневые явления или их предупредить. Медленное продвижение в моделировании оползневых явлений в значительной степени было связано с отсутствием удобного для этих целей математического аппарата. В настоящее время достигнут определенный прогресс в этом направлении в связи с созданием метода блочного элемента, который дает возможность моделировать сложные процессы, описываемые линейными и нелинейными граничными задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Математически этот раздел механики сплошных сред относится к числу самых сложных и наименее развитых разделов смешанных задач, так и не решенных до конца.

Часто в этих проблемах ставилась крайне упрощенная задача, предполагавшая рассмотрение лишь растекающейся среды, без оценки условий возникновения подобных явлений. Сами области, занятые средой, предполагались простейшими. Лишь небольшое количество исследований посвящено попыткам учета деформируемости как внутренней массы предоползневой структуры, так и сдерживающих их покрытий. В настоящей статье применяется новый, разработанный в России, в Кубанском госуниверситете, метод блочного элемента. Среди 10 типов предоползневых структур строится модель наименее исследованного из них типа, называемого горизонтально распространяющимся. Область этого типа предоползневой структуры представляет вертикальную сдерживающую стенку с горизонтальным покрытием. В этой обла-

сти сосредоточена оползневая масса, которая представляет размягченную текучую водонасыщенную среду. Предельным случаем наибольшей текучести является анизотропная модель, описываемая анизотропным уравнением Гельмгольца. Стенка и покрытие являются деформируемыми и сдерживают растекание массы. В начале оползневого процесса происходит либо прорыв вертикальной стенки, либо разрыв верхнего покрытия. Задача рассматривается предельно приближенная к реальной. Учитывается деформирование всех контактирующих объектов, а среда обладает реологией предельной текучести, описываемой анизотропным уравнением Гельмгольца. Кроме того, учитывая, что начало оползневого процесса может быть спровоцировано внешним динамическим воздействием, рассматривается возможность его наличия на покрытии и стенке при гармонической вибрации с произвольной частотой.

В настоящее время разработана строгая теория блочных структур, в основе которой лежит метод блочного элемента. Ее достоинством является возможность исследования граничных задач практически в любых областях, так как любой объект или конструкцию можно рассматривать как некоторую реальную либо виртуальную блочную структуру. В то же время случаев применения этой теории к реальным задачам мало, что затрудняет ее использование в прикладных задачах. В настоящей работе этот подход применяется к часто используемому в приложениях уравнению Гельмгольца в области трехмерного прямоугольного клина при наличии произвольных граничных условий. Следует отметить, что исследованию уравнения Гельмгольца, возникающего в различных фундаментальных и прикладных проблемах, посвящено большое количество работ. В первую очередь это работы в слоистых областях [1], где для исследования использован метод интегральных преобразований и приведен достаточно полный список цитируемой литературы этого направления исследований. В работах [2, 3] разработан и применен лучевой метод, эффективный при высоких частотах в граничных задачах для произвольных областей, в том числе для уравнения Гельмгольца.

В работах [4–7] развивается метод представления решений граничных задач теории упругости термоэлектроупругости, поронасыщенных сред Био с использованием решений уравнения Гельмгольца. В [8–11] граничные задачи для уравнения Гельмгольца и Лапласа

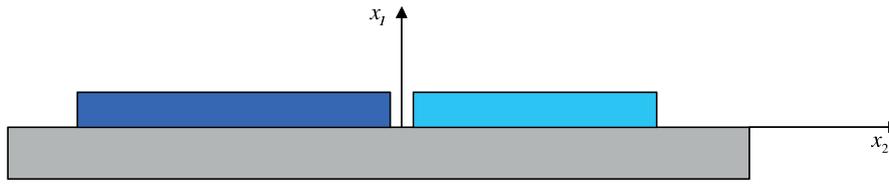


Рис. 1

исследуются в приложениях гидродинамики, в частности, поведения льдин и пластин на поверхности жидкости, изучения их акустических свойств. В работе [11] рассматривается плоская задача гидродинамики в прямоугольном клине. Автор находит оригинальный прием исследования граничной задачи путем сведения ее к задаче в полупространстве, используя зеркальное отображение граничной задачи на симметричный прямоугольный клин. Имеются и другие работы, в которых исследователи уходят от решения граничной задачи в прямоугольном клине, путем использования зеркальных отражений и переходом в слоистую среду.

В то же время исследований и точных решений трехмерного уравнения Гельмгольца в виде упакованных блочных элементов при произвольных граничных условиях в области типа неограниченного прямоугольного клина авторы не встречали. Возможность исследования этих задач изложена в [12, 13]. В настоящей работе рассматривается трехмерная граничная задача Неймана для уравнения Гельмгольца, для которой методом блочного элемента строятся решения для произвольных граничных условий. Решение строится в интегральном виде в клиновидной области в форме упакованного и распакованного блочных элементов. Метод блочного элемента достаточно просто применяется и может быть использован для исследования более сложных задач. Все результаты, построенные для уравнений Гельмгольца, благодаря результату, полученному авторами в [14], переносятся на материалы различных реологических свойств.

### 1. Постановка задачи

Введем прямоугольную систему координат, направив оси  $ox_1$ ,  $ox_3$  горизонтально, а ось  $ox_2$  — вертикально вверх (рис. 1). Рассматривается в условиях гармонических воздействий граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в прямоугольной области  $\Omega(|x_3| \leq \infty, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0)$ . На гра-

ницах области  $\Omega$  задаются условия Неймана. Задачи такого рода возникают при исследовании акустических свойств неограниченных областей типа клина, а также при подготовке исходных данных для исследования более сложных граничных задач для уравнений Ламе, Навье–Стокса, Максвелла и др. в таких областях. Построение решений в форме упакованных блочных элементов — необходимая часть исследования при изучении блочных структур. Указанная граничная задача в ограниченной области (прямоугольнике), рассматривалась в [15], где методом блочного элемента с введением касательного расслоения границы были построены псевдодифференциальные уравнения. Приведем одно из них для граничной задачи

$$[A_{11}\partial^2 x_1 + A_{22}\partial^2 x_2 + A_{33}\partial^2 x_3 + A]\phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$\begin{aligned} K_1\Phi_1 = & \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\phi'_{13} - i\alpha_3^1 \phi_1) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ & + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\phi'_{22} + i\alpha_1^1 \phi_2) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 (x_1^2 - b)] dx_1^2 dx_2^2 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\phi'_{33} + i\alpha_3^1 \phi_3) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b] dx_1^3 dx_2^3 - \\ & - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\phi'_{43} - i\alpha_1^1 \phi_4) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\phi'_{53} + i\alpha_2^1 \phi_5) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp i [\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\phi'_{63} - i\alpha_2^1 \phi_6) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b)] dx_1^6 dx_2^6. \end{aligned}$$

Здесь постоянные  $a, b, c$  определяют прямоугольник, ограниченный, если все постоянные ограничены, или полуограниченный, если среди постоянных имеются бесконечные.

В настоящей работе применяется вариант метода блочного элемента, основанный на привязке локальных систем координат к единой координатной системе, что, в связи с формой области  $\Omega$ , позволяет выполнить исследование более наглядно. Ниже рассматривается трехмерное анизотропное уравнение Гельмгольца после сокращения временного множителя  $e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned} & [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \\ & + A_{33} \partial^2 x_3 + Ap^2] u(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{aligned}$$

в области  $\Omega (|x_3| \leq \infty, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0)$ . Здесь  $p$  может быть комплексным числом.

Для применения метода блочного элемента к граничной задаче в блочной структуре необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построение фактор-топологии. Ввиду рассмотрения лишь одного блочного элемента, необходимость в последнем алгоритме отпадает.

Рассмотрим для этого уравнения граничную задачу Неймана.

Считаем, что граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, x_2, x_3)}{\partial x_1} &= f_2(x_2, x_3), \\ \frac{\partial u(x_1, 0, x_3)}{\partial x_2} &= f_1(x_1, x_3). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь произвольные функции  $f_n$  обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций, которые будут оговорены ниже. Поскольку область  $\Omega$  содержит бесконечно удаленные точки, в том случае, если в граничной задаче появляются волновые функции, ищется решение с применением принципа излучения.

Применением преобразования Фурье к дифференциальному уравнению по параметру  $x_3$  получаем дифференциальное уравнение

с параметром  $\alpha_3$  вида

$$\begin{aligned} & (\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2) u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \\ & k^2 = Ap^2 - A_{33} \alpha_3^2. \end{aligned}$$

## 2. Метод решения

Используя в области  $\Omega$  один из способов касательного расслоения границы, с учетом принятия единой системы координат, после использования двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм приходим к функциональному уравнению вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_{\partial\Omega} \omega,$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 - \\ & - i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 + \\ & + \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - \\ & - i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\ & = \iiint_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3) e^{i\langle \alpha \mathbf{x} \rangle} dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\langle \alpha \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= \\ & = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{R^3} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-i\langle \alpha \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \end{aligned}$$

С учетом вида системы координат правую часть в функциональном уравнении можно представить в форме

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \omega &= \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 - \\ & - i\alpha_1 \int_{-\infty}^0 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 + \\ & + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - \\ & - i\alpha_2 \int_{-\infty}^0 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1. \end{aligned}$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, функциональное уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\
 &= \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\
 &+ \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3). \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

В дальнейшем прописной буквой будут обозначаться преобразования Фурье, вычисленные от функций, представленных соответствующей строчной буквой. Внесем в правую часть функционального уравнения (2.2) значения функций (1.1), предварительно вычислив преобразования Фурье по всем координатам. Имеем

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\
 &= F_2(\alpha_2, \alpha_3) - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\
 &+ F_1(\alpha_1, \alpha_3) - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3).
 \end{aligned}$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру, что в данном случае выполняется тривиально

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) &= (\alpha_1 - \alpha_{1-})(\alpha_1 + \alpha_{1-}) = \\
 &= (\alpha_2 - \alpha_{2-})(\alpha_2 + \alpha_{2-}), \\
 \alpha_{1-} &= -i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2}, \\
 \text{Im } \alpha_{1-} &\leq 0, \quad \text{Im } \alpha_{2-} \leq 0.
 \end{aligned}$$

Условие автоморфизма для носителя и функций на нем приводит к псевдодифференциальным уравнениям вида [15]:

$$\begin{aligned}
 F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - i\alpha_1 U(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) + \\
 + F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3) - i\alpha_{2-} U(\alpha_1, 0, \alpha_3) &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) - i\alpha_{1-} U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\
 + F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - i\alpha_2 U(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Неизвестными в псевдодифференциальном уравнении являются функции и функционалы:

$$\begin{aligned}
 U(0, \alpha_2, \alpha_3), \quad U(\alpha_1, 0, \alpha_3), \\
 U(0, \alpha_{2-}, \alpha_3), \quad U(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3).
 \end{aligned}$$

Решение псевдодифференциальных уравнений, ищется с требованием обращения в ноль

вне области  $\Omega$  решений граничных задач. После преобразований это приводит к следующему виду функционального уравнения:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\
 &= \frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}} \left\langle (\alpha_{2-} - \alpha_2) \times \right. \\
 &\times [\alpha_{1-} F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1 F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3)] + \\
 &+ (\alpha_{1-} - \alpha_1) [\alpha_{2-} F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2 F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3)] \left. \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Тогда решение в преобразованиях Фурье, представляющее упакованный блочный элемент, принимает вид

$$\begin{aligned}
 U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}} \times \\
 &\times \left\langle (\alpha_{2-} - \alpha_2) \times \right. \\
 &\times [\alpha_{1-} F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1 F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3)] + \\
 &+ (\alpha_{1-} - \alpha_1) \times \\
 &\times [\alpha_{2-} F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2 F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3)] \left. \right\rangle. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Сократив одинаковые множители, функцию  $U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= i \frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}} \times \\
 &\times \left\langle \frac{[\alpha_{1-} F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1 F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3)]}{(\alpha_2 + \alpha_{2-})} + \right. \\
 &+ \left. \frac{[\alpha_{2-} F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2 F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3)]}{(\alpha_1 + \alpha_{1-})} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Полученное представление позволяет сформулировать условия на задаваемые граничные функции.

Для построения математической модели предоползневой структуры необходимо взять анизотропную среду накрыть мембранным саркофагом, сдерживающим растекание. Для этого построим математическую модель саркофага, включающего вертикальную стенку и горизонтальное покрытие. Применим метод блочного элемента.

Граничная задача для горизонтального покрытия имеет формулировку

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_3 + p_1^2)w_1(x_1, x_3) = t_1(x_1, x_3),$$

$$|x_3| \leq \infty, \quad -\infty < x_1 \leq 0,$$

$$\partial x_1 w_1(0, x_3) = g_1(0, x_3).$$

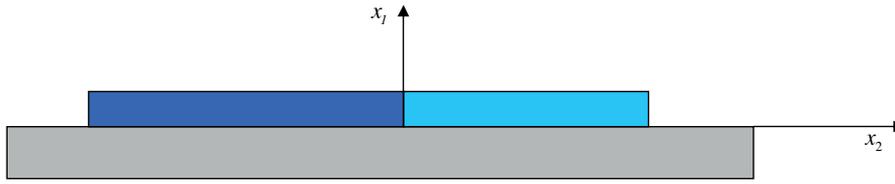


Рис. 2

Граничная задача для вертикальной стенки описывается уравнением и условиями

$$(\partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p_2^2)w_2(x_2, x_3) = t_2(x_2, x_3),$$

$$|x_3| \leq \infty, \quad -\infty < x_2 \leq 0,$$

$$\partial x_2 w_2(0, x_3) = g_2(0, x_3).$$

Здесь  $t_1(x_1, x_3)$  и  $t_2(x_2, x_3)$  амплитуды внешних воздействий на саркофаг,  $g_1(0, x_3)$  и  $g_2(0, x_3)$  — углы поворота угловых концов стенки и покрытия. Стенка и покрытие плотно сопрягаются с удерживаемой массой.

Учитывая, что функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  представляет потенциал водонасыщенной массы, а  $w_1$  и  $w_2$  — нормальные к границе саркофага амплитуды движений, то должны выполняться условия

$$w_1(x_1, x_3) = \partial x_2 u(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_2 = 0, \quad -\infty < x_1 \leq 0,$$

$$w_2(x_2, x_3) = \partial x_1 u(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_1 = 0, \quad -\infty < x_2 \leq 0.$$

После вычислений для модели растекающегося оползня получаем следующее представление:

$$f_1(x_1, x_3) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_1, x_3) \times \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_{1-}^{-1} T_1(\alpha_{1-}, \alpha_3) - T_1(\alpha_1, \alpha_3)}{(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - p_1^2)} - \frac{\alpha_{1-} G_1(0, \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_{1+})} \right],$$

$$f_2(x_2, x_3) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_2, x_3) \times \left[ \frac{\alpha_2 \alpha_{2-}^{-1} T_2(\alpha_{2-}, \alpha_3) - T_2(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_2^2)} - \frac{\alpha_{2-} G_2(0, \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_{2+})} \right],$$

$$G_r(0, \alpha_3) = \int_{-\infty}^0 g_r(0, x_3) e^{i\alpha_3 x_3} dx_3, \quad r = 1, 2.$$

Внесение этих значений функций в формулы (2.3) и (2.1) позволяет получить аналитическое представление в форме интегралов модели горизонтально распространяющегося оползня.

### 3. Оценка влияния трещины в покрытии (саркофаге)

Для исследования образования трещины в покрытии решаются три задачи. Первая, при отсутствии трещины в покрытии, решена выше. Для исследования влияния уже возникшей трещины разных размеров, вначале решается вторая задача. Она состоит в рассмотрении существования трещины бесконечных размеров, левый и правый берега которых сошлись, но зон сплошности между ними нет. Для сплошности необходимо равенство перемещений и углов поворота мембраны или по аналогии с плитами — равенства напряжений (рис. 1, 2). Третья задача состоит в сопряжении до состояния сплошности некоторых участков бесконечной трещины. Вне этих участков будет существовать трещина, описываемая интегральным уравнением. При дальнейших изучениях установлен основной результат исследования: полубесконечные и конечные трещины всегда имеют интегрируемые концентрации напряжений на краях сближения ее берегов, несущие опасность разрушения саркофага предоползневой структуры мембранного типа. Степень разрушения конструкций уменьшается по мере сокращения размера трещины конечной длины. Степень разрушения определяется сочетанием ряда параметров. Последнее установлено путем исследования коэффициентов при особенностях. Имеют место следующие приближенные формулы для решения краевой задачи, которые представлены структурно, без конкретизации всех параметров в связи со сложностью, позволяющие оценить воз-

возможность решения интегральных уравнений. В случае неограниченной по протяженности трещины интегральное уравнение для определения поведения неизвестного параметра сопряжения приближенно имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y - \xi) s(\xi) d\xi = \sigma_2(y), \quad -\infty \leq y \leq \infty,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_6^{-1} k_{\infty}(\alpha_1)} K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1),$$

$$k(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1) K(\alpha_1),$$

$$D(\alpha_1) = -A_{\lambda} Q_{\lambda}(\alpha_1, 0) + A_r Q_r(\alpha_1, 0),$$

$$s(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1) D(\alpha_1),$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(x) K(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Здесь приведены некоторые формулы, вытекающие из решения задачи о сближении берегов трещины по аналогии со сближением берегов литосферных плит, позволяющие вывести интегральное уравнение и его ядро для случая старения материала саркофага, приводящего к разным его свойствам на берегах трещины

$$K_0(\alpha_1) = -D \left( 1 + \frac{\xi_1}{\xi_2} \right),$$

$$\xi_1 = B_{\lambda} L_{-}(\alpha_{2\lambda-}) + B_r L_{+}(\alpha_{2r+}),$$

$$\xi_2 = (B_r L_{+}(\alpha_{2r+}) + B_{\lambda} L_{-}(\alpha_{2\lambda-})) - \varepsilon_6^{-1} k_{\infty}(\alpha_1),$$

$$D = -A_{\lambda} Q_{\lambda}(\alpha_1, -\theta) + A_r Q_r(\alpha_1, \theta), \quad \theta \geq 0,$$

$$G_{-}(\alpha_1, \alpha_2) = L_{-}(\alpha_2) \frac{1}{\varepsilon_6^{-1} k_{\infty}(\alpha_1)} K_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$G_{+}(\alpha_1, \alpha_2) = L_{+}(\alpha_2) \frac{1}{\varepsilon_6^{-1} k_{\infty}(\alpha_1)} K_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$A_{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{e^{-i\alpha_2\theta}}{\alpha_{2\lambda-}},$$

$$B_{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{-i(\alpha_2 - \alpha_{2\lambda-})\theta}}{\alpha_{2\lambda-}},$$

$$A_r(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{e^{i\alpha_2\theta}}{\alpha_{2r+}},$$

$$B_r(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{i(\alpha_2 - \alpha_{2r+})\theta}}{\alpha_{2r+}},$$

$$k_{\infty}(\alpha_1) = \lim_{|\alpha_2| \rightarrow \infty} |\alpha_2|^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha_2| \rightarrow \infty$$

Если имеет место равенство свойств частей саркофага на обоих берегах, то есть

$$A_{\lambda}(\alpha_1) = A_r(\alpha_1),$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(x_1) Q_{\lambda}(\alpha_1, 0) = -\mathbf{F}_1^{-1}(x_1) Q_r(\alpha_1), \\ -\infty \leq y \leq c_1, \quad c_2 \leq y \leq \infty,$$

тогда

$$D = \frac{1}{\alpha_{2\lambda-}(\alpha_1)} [Q_{\lambda}(\alpha_1, 0) + Q_r(\alpha_1, 0)],$$

$$s_0(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1) [Q_{\lambda}(\alpha_1, 0) + Q_r(\alpha_1, 0)], \\ c_1 \leq x_1 \leq c_2,$$

$$\int_{c_1}^{c_2} k_1(y - \xi) s_0(\xi) d\xi = \sigma_2(y), \quad c_1 \leq y \leq c_2,$$

$$k_1(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1) \frac{K(\alpha_1, 0)}{\alpha_{2\lambda-}(\alpha_1)}.$$

В том случае, если  $c_2 = \infty$ , получается интегральное уравнение для полубесконечной трещины

$$\int_{c_1}^{\infty} k_1(y - \xi) s_0(\xi) d\xi = \sigma_2(y), \quad c_1 \leq y \leq \infty.$$

С помощью этих интегральных уравнений можно определять степень воздействия на берега разлома, чтобы снизить или увеличить коэффициент концентрации в контактных характеристиках мембраны.

### Выводы

По построению функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  представляет потенциал, который пропорционален давлению или углу поворота края мембраны. Построенное решение задачи позволяет его оценивать в любой точке рассматриваемой области, в том числе вблизи границы трещины. В модели можно выбирать различные постановки задач, меняя воздействия на стенки и саркофаг, а также варьировать параметрами анизотропии, тем самым выявляя предельно критические состояния оползневой структуры, после чего будет расти трещина разрыв саркофага и начнется оползневый процесс.

Все результаты, полученные для уравнений Гельмгольца, благодаря результату, представленному в [14], переносятся на материалы различных реологических свойств.

## Литература

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
2. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Математический сборник. 1964. Т. 65. С. 577–630.
3. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
4. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
5. *Молотков Л.А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.-М.: Наука, 2001. 348 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
8. *Ткачева Л.А.* Колебания плавающей упругой пластины, при периодических смещениях участка дна // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 5 (273). С. 166–179.
9. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 5 (273). С. 136–145.
10. *Ткачева Л.А.* Поведение плавающей пластины при колебаниях участка дна // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 2 (270). С. 98–108.
11. *Ткачева Л.А.* Взаимодействие поверхностных и изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове с вертикальной стенкой // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 4 (320). С. 158–170.
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Рядчиков И.В.* Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014
13. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т. 468. № 2. С. 154–158.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики // ДАН. 2020. Т. 495. С. 34–38. DOI: 10.31857/S2686740020060048
15. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О проблеме блочных структур академика М.А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.

## References

1. *Brekhovskikh L.M.* *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)
2. *Babich V.M.* O korotkovolnovoy asimptotike funktsii Grina dlya uravneniya Gel'mgol'tsa [On the short-wave asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1964, vol. 65, pp. 577–630. (In Russian)
3. *Babich V.M., Buldyrev V.S.* *Asimptoticheskie metody v probleme difraktsii korotkikh voln* [Asymptotic methods in the problem of short wave diffraction]. Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)
4. *Mukhina I.V.* Priblizhennoe svedenie k uravneniyam Gel'mgol'tsa uravneniy teorii uprugosti i elektrodinamiki dlya neodnorodnykh sred [Approximate reduction to the Helmholtz equations of the equations of the theory of elasticity and electrodynamics for inhomogeneous media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1972, vol. 36, pp. 667–671. (In Russian)
5. *Molotkov L.A.* *Issledovanie rasprostraneniya voln v poristykh i treshchinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Bio i sloistykh sred* [Study of wave propagation in porous and fractured media based on effective Biot models and layered media]. Nauka, St.-Petersburg, Moscow, 2001. (In Russian)
6. *Novatskiy V.* *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)
7. *Novatskiy V.* *Elektromagnitnye efekty v tverdykh telakh* [Electromagnetic effects in solids]. Mir, Moscow, 1986. (In Russian)
8. *Tkacheva L.A.* Kolebaniya plavayushchey uprugoy plastiny, pri periodicheskikh smeshcheniyakh uchastka dna [Vibrations of a floating elastic plate, with periodic displacements of the bottom section]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2005, vol. 46, no. 5 (273), pp. 166–179. (In Russian)
9. *Tkacheva L.A.* Ploskaya zadacha o kolebaniyakh plavayushchey uprugoy plastiny pod deystviem periodicheskoy vneshney nagruzki [Plane problem of vibrations of a floating elastic plate under the action of a periodic external load]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2004, vol. 45, no. 5 (273), pp. 136–145. (In Russian)
10. *Tkacheva L.A.* Povedenie plavayushchey plastiny pri kolebaniyakh uchastka dna [Behavior of a floating plate during vibrations of the bottom section]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2005, vol. 46, no. 2 (270), pp. 98–108. (In Russian)
11. *Tkacheva L.A.* Vzaimodeystvie poverkhnostnykh i izgibno-gravitatsionnykh voln v ledyanom

- pokrove s vertikal'noy stenкой [Interaction of surface and flexural-gravity waves in an ice cover with a vertical wall]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2013, vol. 54, no. 4 (320), pp. 158–170. (In Russian)
12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O. M., Ryadchikov I.V. Metod proektirovaniya neodnorodnykh materialov i blochnykh konstruksiy [Method of designing heterogeneous materials and block structures]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2018, vol. 482, no. 4, pp. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014 (In Russian)
  13. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O stadiyakh preobrazovaniya blochnykh elementov [About the stages of transformation of block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2016, vol. 468, no. 2, pp. 154–158. (In Russian)
  14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Metod blochnogo elementa v razlozhenii resheniy slozhnykh granichnykh zadach mekhaniki [Block element method in the expansion of solutions of complex boundary value problems in mechanics]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2020, vol. 495, pp. 34–38. DOI: 10.31857/S2686740020060048 (In Russian)
  15. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. O probleme blochnykh struktur akademika M.A. Sadovskogo [On the problem acad. M.A. Sadovskii's block structures]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2009, vol. 427, no. 4, pp. 480–485. (In Russian)

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2021

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Хрипков Д. А., Бушueva О. А., Евдокимов В. С., Телятников И. С., Уафа С. Б., 2021

Статья поступила 23 февраля 2021 г.