Механика

УДК 51.37

DOI: 10.31429/vestnik-18-1-32-35

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ ВЕТРЕ

Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE TEST PROBLEM OF WIND CURRENTS IN A CONSTANT WIND

V. S. Kochergin[1], S. V. Kochergin[1], S. N. Sklyar[2]

[1] Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, Russia
[2] American University of Central Asia, Bishkek, Kirgizstan
e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. The development of numerical modeling of the dynamics of water bodies for solving environmental problems is of great importance. In recent years, modern computer technology has made it possible to significantly increase the discretization of the problems to be solved for more accurate reproduction of dynamic processes. However, the direction associated with the development of the models themselves, algorithms and methods of their integration is not exhausted, since the joint use of modern computer power and new computational approaches can lead to a positive effect in solving such problems. When choosing a model that describes the dynamics of a reservoir, it is necessary to evaluate the quality of the schemes and algorithms used. Therefore, the presence of an analytical solution to a particular problem allows you to perform such testing. Dynamic models are quite complex. In the literature, some classical analytical solutions for the simplest statements are known, for example, the Stommel model. In this paper, we consider a problem whose solution allows us to obtain an analytical solution for its three-dimensional additional part and vertical component. The solution is obtained for the formulation in a dimensionless form. In this paper, an analytical solution is obtained under constant wind action.

Keywords: wind circulation model, analytical solution, velocity components, vertical velocity, constant wind.

Развитие численного моделирования динамики водоемов для решения задач экологической направленности имеют большое значение. В последние годы современная компьютерная техника позволила существенно увеличить дискретизацию решаемых задач для более точного воспроизведения динамических процессов. Но направление, связанное с развитием самих моделей, алгоритмов и методов их интегрирования не исчерпано, т.к. совместное использование современных компьютерных мощностей и новых вычислительных подходов может привести к положительному эффекту при решении таких задач. При выборе модели, описывающей динамику водоема, необходимо оценить качество используемых схем и алгоритмов. Поэтому наличие аналитического решения той или иной задачи позволяет осуществить такое тестирование. Динамические модели достаточно сложны. В литературе известны некоторые классические аналитические решения для самых простых постановок, например, модель Стоммела [1–4]. В [5] такая задача решается на основе метода обращения динамического оператора [4] для исследования применяемых вычислительных схем специального вида при вычислении полей скорости. В работе [6] рассматривается более сложная задача, решение которой позволяет получить аналитиче-

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела теории волн Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskocher@gmail.com.

Скляр Сергей Николаевич, заведующий кафедры прикладной математики Американского университета в Центральной Азии (AUCA); e-mail: sklyar51@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

ское решение для баротропной компоненты скорости, ее трехмерной добавочной части и вертикальной составляющей при задании касательного напряжения ветра специальным образом. Решение получено для постановки в безразмерном виде. В данной работе получено аналитическое решение при постоянном ветровом воздействии.

1. Задача в безразмерном виде

Пусть поверхность рассматриваемого водоема в плоскости $x0y$ имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q],$$

его глубина $H > 0$. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом: $0x$ — на восток, $0y$ — на север, $0z$ — вертикально вниз. В трехмерной области $\Omega = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in \Omega_0,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$ рассмотрим систему уравнений движения в безразмерной форме

$$\begin{cases} -\ell v = -\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \ell u = -\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$t > 0, \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega},$$

с краевыми условиями

$$\left\{t > 0,\ z = 0,\ (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0\right\}:$$
$$k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y,\ w = 0; \qquad (1.2)$$

$$\left\{t > 0,\ z = H,\ (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0\right\}:$$
$$k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \qquad (1.3)$$

$$\{t > 0,\ 0 \leqslant z \leqslant H,\ (x, y) \in \partial\Omega_0\}:$$
$$U \cdot \mathbf{n}_x + V \cdot \mathbf{n}_y = 0; \qquad (1.4)$$

и начальными данными

$$\{t = 0,\ (x, y, z) \in \Omega\}:$$
$$u = u^o, \quad v = v^o, \quad w = w^o. \qquad (1.5)$$

Здесь $\overset{0}{\Omega}$, $\overset{0}{\Omega}_0$ — внутренние точки соответствующей области.

В (1.4) безразмерные интегральные скорости определяются следующим образом:

$$U(t, x, y) = \int\limits_0^H u(t, x, y, z)dz,$$

$$V(t, x, y) = \int\limits_0^H v(t, x, y, z)dz,$$

а в (1.3) используется следующий вариант параметризации придонного трения

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \qquad (1.6)$$

В соответствии с моделью Стоммела, предположим

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const}; \qquad (1.7)$$
$$\tau_x = \text{const}, \quad \tau_y = \text{const}.$$

Горизонтальные компоненты вектора скорости будем искать в виде

$$u = UH^{-1} + \hat{u}, \quad v = VH^{-1} + \hat{v}, \qquad (1.8)$$

где первые слагаемые называются баротропными, а вторые назовем добавочными составляющими скорости.

2. Аналитические решения. Баротропные составляющие

В системе уравнений (1.1)–(1.5) проинтегрируем каждое уравнение по переменной «z» в пределах от 0 до H, с учетом краевых условий, получим задачу для интегральных скоростей

$$\begin{cases} \mu U - \ell V = -H\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + \tau_x, \\ \ell U + \mu V = -H\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + \tau_y, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ U \cdot \mathbf{n}_x + V \cdot \mathbf{n}_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Из первых двух уравнений в (2.1) исключаем градиенты давления, используя перекрестное дифференцирование получим

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - \beta V = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ U \cdot \mathbf{n}_x + V \cdot \mathbf{n}_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Задача (2.2) имеет единственное решение, а значит, для данной постановки интегральные скорости тождественно равны нулю

$$U \equiv V \equiv 0. \tag{2.3}$$

Таким образом, в силу (2.3) горизонтальные составляющие u, v совпадают, соответственно, с «дополнительными» составляющими $\hat{u}$, $\hat{v}$. Кроме того, в силу (1.6)

$$\tau_x^b = \tau_y^b = 0. \tag{2.4}$$

3. Аналитическое решение. Добавочные составляющие

Подставим в первые два уравнения системы (2.1) горизонтальные компоненты вектора скорости, записанные в форме (1.8). Учитывая (2.3), получаем задачу для добавочных составляющих горизонтальных скоростей

$$\begin{cases} -\ell\hat{v} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial z}\right) - \dfrac{\tau_x}{H}, \\ \ell\hat{u} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial z}\right) - \dfrac{\tau_y}{H}, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$(x,y) \in \Omega_0, \quad 0 < z < H;$$

$$\{z = 0,\ (x,y) \in \Omega_0\}: \quad k\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = -\tau_x, \quad k\frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = -\tau_y; \tag{3.2}$$

$$\{z = H,\ (x,y) \in \Omega_0\}: \quad k\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = 0, \quad k\frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = 0. \tag{3.3}$$

Запишем задачу (3.1)–(3.3) в комплексной форме, вводя следующие функции: $\theta = \hat{u}+i\cdot\hat{v}$, $\tau = \tau_x + i\cdot\tau_y$. Получим

$$\begin{cases} i\ell\theta - k\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\dfrac{\tau}{H}, \quad 0 < z < H; \\ z = 0: \quad k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau; \\ z = H: \quad k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Общее решение уравнения из (3.4) найдем как сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Введем следующие функции:

$$C(z) = \cos(H-z)\eta\cdot\mathrm{ch}(H+z)\eta - {} \\ - \cos(H+z)\eta\cdot\mathrm{ch}(H-z)\eta,$$

$$S(z) = \sin(H-z)\eta\cdot\mathrm{sh}(H+z)\eta - {} \\ - \sin(H+z)\eta\cdot\mathrm{sh}(H-z)\eta;$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{\ell}{2k}},$$

$$L(z) = \frac{C(z)}{C(H)} - \frac{z}{H}, \quad M(z) = \frac{S(z)}{C(H)}.$$

$$Cs(z) = \cos(H-z)\eta\,\mathrm{sh}(H+z)\eta + {} \\ + \cos(H+z)\eta\,\mathrm{sh}(H-z)\eta,$$

$$Sc(z) = \sin(H-z)\eta\,\mathrm{ch}(H+z)\eta + {} \\ + \sin(H+z)\eta\,\mathrm{ch}(H-z)\eta.$$

С учетом краевых условий на поверхности и дне из (3.4) можно получить

$$\begin{aligned} u = \hat{u} = {} & -\frac{\tau_y}{\ell H} + \\ & + \frac{\eta}{\ell C(H)}\big[(\tau_y + \tau_x)\,\mathrm{Cs}(H-z) + \\ & + (\tau_y - \tau_x)\,\mathrm{Sc}(H-z)\big], \\ v = \hat{v} = {} & \frac{\tau_x}{\ell H} + \\ & + \frac{\eta}{\ell C(H)}\big[(\tau_y - \tau_x)\,\mathrm{Cs}(H-z) - \\ & - (\tau_y + \tau_x)\,\mathrm{Sc}(H-z)\big]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Аналитическое решение. Вертикальная компонента вектора скорости

Вертикальную компоненту «w» вектора скорости определяем из уравнения неразрывности. Для этого проинтегрируем уравнение неразрывности по переменной z от 0 до z, учитывая краевое условие (1.2). Имеем

$$\begin{aligned} w(z) = {} & \frac{\beta}{\ell^2}[\tau_x L(H-z) + \tau_y M(H-z)] - \\ & - \frac{\tau_x}{\ell}\left\{CY(H-z) - \right. \\ & \left. - CY(H)\left[L(H-z) + \frac{H-z}{H}\right]\right\} \\ & - \frac{\tau_y}{\ell}\left[SY(H-z) - CY(H)\,M(H-z)\right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

где введены следующие функции:

$$P(z) = (H+z)\left[\cos(H-z)\eta \operatorname{sh}(H+z)\eta + \right.$$
$$\left. + \sin(H+z)\eta \operatorname{ch}(H-z)\eta\right],$$

$$Q(z) = (H+z)\left[\sin(H-z)\eta \operatorname{ch}(H+z)\eta - \right.$$
$$\left. - \cos(H+z)\eta \operatorname{sh}(H-z)\eta\right];$$

$$CY(z) = \frac{\beta}{4k\eta C(H)}\left[P(z) - P(-z)\right],$$

$$SY(z) = \frac{\beta}{4k\eta C(H)}\left[Q(z) - Q(-z)\right].$$

Построено аналитическое решение модели ветровой циркуляции для использования его в качестве тестового решения при анализе схем и алгоритмов при построении динамических моделей водоемов. Полученное аналитическое решение может быть использовано для тестирования различных вычислительных схем при интегрировании моделей. В работе [6] получены аналитические выражения для различных компонент поля скорости, а в [7] произведено сравнение с полученным точным аналитическим решением разнообразных способов вычисления вертикальной компоненты поля скорости [5, 8], что особенно важно при интегрировании динамических моделей водоемов.

Литература

1. *Stommel H.* The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description. University of California Press. 1965.
2. *Стоммел Г.* Гольфстрим. М.: ИЛ, 1965. 227 с.
3. *Stommel H.* The westward intensification of wind-driven ocean currents // Trans. Amer. Geoph. Un. 1948. Vol. 29. P. 202–206.
4. *Кочергин В.П.* Теория и методы океанических течений. М: Наука, 1978. 127 с.
5. *Еремеев В.Н.,Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов, Севастополь, «Экоси-гидрофизика», 2001. 238 с.
6. *Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Аналитическая тестовая задача ветровых течений // Процессы в геосредах. 2019. № 2(20). С. 193–198.
7. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Оценка точности определения вертикальной компоненты скорости при использовании различных вычислительных алгоритмов // Процессы в геосредах. 2019, № 3(21). С. 341–346.
8. *Kochergin V.P., Dunets T.V.* Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins // Physical oceanography. 2001. № 3. Vol. 11. P. 221–232.

References

1. Stommel, H. *The gulf stream. A Physical and Dynamical Description.* University of California Press. 1965.
2. Stommel, G. *Gol'fstrim* [Gulf Stream]. Inostannaya Literatura, Moscow, 1965. (In Russian)
3. Stommel, H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
4. Kochergin, V.P. *Teoriya i metody okeanicheskih techenij* [Theory and methods of ocean streams]. Nauka, Moscow, 1978. (In Russian)
5. Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov* [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol', 2001. (In Russian)
6. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. Analiticheskaya testovaya zadacha vetrovyh techenij [Analytical test problem of wind currents]. *Processy v geosredah* [Processes in geomedia], 2019, no. 2(20), pp. 193–198. (In Russian)
7. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Ocenka tochnosti opredeleniya vertikal'noj komponenty skorosti pri ispol'zovanii razlichnyh vychislitel'nyh algoritmov [Estimation of the accuracy of determining the vertical component of velocity using various computational algorithms]. *Processy v geosredah* [Processes in geomedia], 2019, no. 3(21), pp. 341–346. (In Russian)
8. Kochergin, V.P., Dunets, T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.

Статья поступила 25 января 2021 г.