

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-18-1-36-45

## РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ФАКТОРИЗАЦИИ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ-РАСПАДА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

Сыромятников П. В., Кривошеева М. А., Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г.

SOLUTION BY THE FACTORIZATION METHOD OF A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DIFFUSION-CONVECTION-DECAY FOR A HOMOGENEOUS LAYER BASED ON THE EQUATIONS OF TURBULENT DIFFUSION

P. V. Syromyatnikov<sup>1,2</sup>, M. A. Krivosheeva<sup>2</sup>, O. N. Lapina<sup>2</sup>, A. G. Nesterenko<sup>2</sup>, Yu. G. Nikitin<sup>2</sup><sup>1</sup> Federal Research Center Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia<sup>2</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru

*Abstract.* Mixed boundary value problems of diffusion-convection-decay are of great interest to researchers, since they describe different physical processes most accurately in comparison with solutions of similar homogeneous problems. The investigated boundary value problems can have different physical interpretations. In this work, they are considered as processes of propagation of substances in a diffusion layer with different properties of reflection and absorption of impurities by the boundaries of the layer. The constructed mathematical model of a mixed stationary boundary value problem of diffusion-convection-decay for a homogeneous layer and numerical algorithms allow solving the problem with the Dirichlet and Neumann boundary conditions and conditions of the third kind (in their various combinations) with high accuracy. In a two-dimensional formulation, the mixed boundary value problem for the diffusion layer is reduced to the Wiener-Hopf integral equation. The integral equation is solved by the factorization method. A large number of numerical examples are presented. The influence of the solution to the integral equation most significantly affects the nature of the distribution of the substance in the near zone. The influence of boundary conditions is more global in nature. The developed model is applicable without fundamental changes for solving a mixed problem with a multilayer package of layers with different properties of each layer.

*Keywords:* equations of turbulent diffusion, mixed stationary boundary value problem, Wiener-Hopf integral equation, factorization method.

## Введение

Смешанные краевые задачи диффузии-конвекции-распада представляют большой интерес для исследователей, поскольку они наиболее точно описывают различные физи-

ческие процессы, часто давая качественно новые свойства решения по сравнению с решениями аналогичных однородных задач [1, 7, 8]. Это касается прямых и обратных задач в различных постановках [1, 2], как стационарных, так и нестационарных [2, 3]. Смешан-

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики краснодарского отделения Южного научного центра РАН, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru.

Кривошеева Маргарита Александровна, магистрант второго года обучения кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: margarita.krivosheeva@gmail.com.

Лапина Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: olga\_ln@mail.ru.

Нестеренко Александр Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: agnest@mail.ru.

Никитин Юрий Геннадиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: yug@fpm.kubsu.ru.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2021 г. (№ г.р. 01201354241) при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (проект 19-41-230011 п\_а).

ные задачи могут оказаться полезными также в связи с изучением эффектов аномальной диффузии [4, 5]. В большинстве случаев решение смешанных задач сводится к решению различных интегральных или интегродифференциальных уравнений [1, 6–8], и, как правило, решение таких уравнений (или систем уравнений) оказывается сложным в аналитическом и численном отношении. Метод факторизации и метод блочного элемента для решения плоских и пространственных краевых задач диффузии-конвекции-распада впервые был предложен академиком Бабешко В.А. [6] и получил дальнейшее развитие в работах его учеников [7, 8]. В двумерной постановке смешанная краевая задача для диффузионного слоя может быть сведена к интегральному уравнению Винера–Хопфа [9], которое достаточно просто решается методом факторизации. В данной работе методом факторизации исследуется смешанная задача, аналогичная рассмотренной в [6], но в более общей постановке граничных условий. Постановка задачи позволяет моделировать условия Дирихле, Неймана или условия третьего рода в разных комбинациях. Получено большое количество численных примеров. Исследуемые уравнения, как известно, могут иметь самую разную физическую интерпретацию [2–5], но в данном случае они рассматриваются как процессы распространения загрязняющих веществ в диффузионном слое с различными свойствами отражения и поглощения границами слоя примеси. В значительной степени данная работа основана на аналитических и численных результатах, полученных в работе [10].

### 1. Постановка задачи и общая схема решения

Рассмотрим однородный слой  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,  $0 \leq z \leq h$ , в котором происходят процессы диффузии-конвекции-распада однокомпонентного вещества. Для среднемасштабного приближения уравнение турбулентной диффузии, описывающее данные процессы, имеет вид [3]

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \phi = \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\phi$  — концентрация вещества,  $u$ ,  $w$  — скорости конвекции в горизонтальном и вертикальном направлениях,  $\sigma \geq 0$  — коэффициент распада,  $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$  — коэффициенты

горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно. В плоскостях  $z = 0$ ,  $z = h$  заданы смешанные граничные условия достаточно общего вида:

$$a_0 \phi(x, z)|_{z=0} + b_0 \left. \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$x < 0,$$

$$\phi(x, z)|_{z=0} = b e^{-\eta x}, \quad (1.3)$$

$$b > 0, \quad \eta > 0, \quad x \geq 0,$$

$$a_1 \phi(x, h) + b_1 \left. \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (1.4)$$

$$-\infty \leq x \leq +\infty.$$

Считаем, что коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  неотрицательны и в каждой паре  $(a_0, b_0)$ ,  $(a_1, b_1)$  не равны нулю одновременно. Из физических соображений требуется выполнение условия убывания на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(x, z) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (1.5)$$

Введем одномерное преобразование Фурье  $F_x$  по  $x$  с параметром  $\alpha$  и применим его к функциям концентрации  $\phi$  и источника  $q$  (заданного на положительной полуоси), их символы Фурье обозначим  $\Phi = F_x[\phi]$ ,  $Q = F_x[q]$ . Введем также символ Фурье функции Грина  $K = F_x[k]$ , соответствующей краевой задаче (1.1)–(1.4). Решение в образах Фурье будем искать в виде

$$\Phi(\alpha, z) = K(\alpha, z)Q(\alpha). \quad (1.6)$$

Решение исходной краевой задачи представим в виде обратного преобразования Фурье

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, z) \times Q(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha. \quad (1.7)$$

Функция  $Q(\alpha)$  будет строиться в п. 3 методом факторизации [6, 9]. После определения функции  $Q(\alpha)$  вычисление интеграла (1.7) достаточно просто можно реализовать численно или численно-аналитически, на основе теории вычетов, как это подробно описано в [10].

## 2. Решение вспомогательной краевой задачи

Найдем символ Фурье функции Грина  $K(\alpha, z)$  для следующей вспомогательной однородной краевой задачи:

$$\nu \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - w \frac{\partial K}{\partial z} - K(\alpha^2 \mu - i\alpha u + \sigma) = 0, \quad (2.1)$$

$$0 \leq z \leq h,$$

$$a_0 K(\alpha, z)|_{z=0} + b_0 \left. \frac{\partial K(\alpha, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 1, \quad (2.2)$$

$$a_1 K(\alpha, z)|_{z=h} + b_1 \left. \frac{\partial K(\alpha, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (2.3)$$

Функцию  $K$  будем искать в виде

$$K(\alpha, z) = t_1 \exp(\lambda_1 z) + t_2 \exp(\lambda_2 z), \quad (2.4)$$

где  $t_j$  — неизвестные коэффициенты,  $\lambda_j$  — собственные значения характеристического уравнения

$$\nu \lambda^2 - w \lambda - (\alpha^2 \mu - i\alpha u + \sigma) = 0. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{w + \sqrt{D}}{2\nu}, \quad \lambda_2 = \frac{w - \sqrt{D}}{2\nu}, \quad (2.6)$$

$$D = w^2 + 4\nu(\mu\alpha^2 - i\alpha u + \sigma). \quad (2.7)$$

С учетом (2.4) относительно коэффициентов  $t_i$  получаем систему уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$a_{11} = (a_0 + b_0 \lambda_1), \quad a_{12} = (a_0 + b_0 \lambda_2),$$

$$a_{21} = (a_1 + b_1 \lambda_1) \exp(\lambda_1 h),$$

$$a_{22} = (a_1 + b_1 \lambda_2) \exp(\lambda_2 h).$$

Решая систему (2.8), находим

$$t_1 = \frac{(a_1 + b_1 \lambda_2) \exp(\lambda_2 h)}{\Delta}, \quad (2.9)$$

$$t_2 = \frac{-(a_1 + b_1 \lambda_1) \exp(\lambda_1 h)}{\Delta},$$

$$\begin{aligned} \Delta = \det(\mathbf{A}) &= \\ &= (a_0 + b_0 \lambda_1)(a_1 + b_1 \lambda_2) \exp(\lambda_2 h) - \\ &- (a_0 + b_0 \lambda_2)(a_1 + b_1 \lambda_1) \exp(\lambda_1 h). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Символ функции Грина  $K$  задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$$K(z) = \frac{(a_1 + b_1 \lambda_2) \exp(\lambda_2 h + \lambda_1 z)}{\Delta} - \frac{(a_1 + b_1 \lambda_1) \exp(\lambda_1 h + \lambda_2 z)}{\Delta}. \quad (2.11)$$

Найдем вычет  $\operatorname{res} K(\xi_m, z)$  в простом полюсе  $\xi_m$ , для этого определим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} &= (b_0 \lambda_1') (a_1 + b_1 \lambda_2) e^{\lambda_2 h} + \\ &+ (a_0 + b_0 \lambda_1) (b_1 \lambda_2') e^{\lambda_2 h} + \\ &+ (a_0 + b_0 \lambda_1) (a_1 + b_1 \lambda_2) \lambda_2' h e^{\lambda_2 h} - \\ &- (b_0 \lambda_2') (a_1 + b_1 \lambda_1) e^{\lambda_1 h} - \\ &- (a_0 + b_0 \lambda_2) (b_1 \lambda_1') e^{\lambda_1 h} - \\ &- (a_0 + b_0 \lambda_2) (a_1 + b_1 \lambda_1) \lambda_1' h e^{\lambda_1 h}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} = \frac{(2\mu\alpha - iu)}{\sqrt{w^2 + 4\nu(\mu\alpha^2 + \sigma - i\alpha u)}}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \operatorname{res} K(\xi_m, z) &= \\ &= \frac{(a_1 + b_1 \lambda_2(\xi_m)) e^{\lambda_2(\xi_m)h + \lambda_1(\xi_m)z}}{\Delta'(\xi_m)} - \\ &- \frac{(a_1 + b_1 \lambda_1(\xi_m)) e^{\lambda_1(\xi_m)h + \lambda_2(\xi_m)z}}{\Delta'(\xi_m)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 3. Формулировка и решение интегрального уравнения Винера-Хопфа

Введем еще одну вспомогательную задачу, продолжив правую часть (1.2) в область  $x > 0$  функцией  $q(x)$ . Граничные условия (1.2), (1.4) принимают вид

$$a_0 \Phi(\alpha, z)|_{z=0} + b_0 \left. \frac{\partial \Phi(\alpha, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = Q(\alpha), \quad (3.1)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx, \quad (3.2)$$

$$a_1 \Phi(\alpha, h) + b_1 \left. \frac{\partial \Phi(\alpha, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \quad (3.3)$$

Очевидно, что построенная функция  $K(\alpha, z)$  (2.11) такова, что

$$\Phi(\alpha, z) = K(\alpha, z) Q(\alpha). \quad (3.4)$$

Беря обратное преобразование Фурье от (3.4), где получаем интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = be^{-\eta x}, \quad (3.5)$$

$$x \geq 0.$$

Используя представление (3.2), уравнение (3.5) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} k(x - \xi)q(\xi)d\xi = be^{-\eta x}, \quad x \geq 0, \quad (3.6)$$

$$k(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{-i\alpha(x-\xi)}d\alpha. \quad (3.7)$$

Из вида функции  $K(\alpha)$  (2.11) следует, что она является мероморфной в комплексной плоскости функцией параметра  $\alpha$ . Известно [6], что ядро уравнения Винера–Хопфа (3.6) соответствует средам с сильным затуханием, само уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода, и, следовательно, оно может решаться любыми известными методами. При корректной постановке краевой вспомогательной задачи (3.1)–(3.3) нули  $z_m$  и полюсы  $\xi_m$  функции  $K(\alpha)$  являются чисто мнимыми, однократными, регулярно чередующимися в верхней и нижней полуплоскостях и быстро выходящими на асимптотику вида

$$\xi_m = \pm i(m - 1/2)\pi + p, \quad (3.8)$$

$$p = \text{const}, \quad m \gg 1.$$

Перечисленные свойства нулей и полюсов позволяют легко реализовать их численное нахождение. Найдя нули и полюса, мероморфную функцию  $K(\alpha)$  (2.11) можно представить в следующем виде

$$K(\alpha) = A \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{z_m^+}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\xi_m^+}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\alpha}{z_m^-}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\xi_m^-}\right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Функцию  $K(\alpha)$  можно факторизовать в виде произведения двух функций

$$K(\alpha) = K^+(\alpha)K^-(\alpha), \quad (3.10)$$

$$K^+(\alpha) = \sqrt{A} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{z_m^-}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\xi_m^-}\right)^{-1}, \quad (3.11)$$

$$K^-(\alpha) = \sqrt{A} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{z_m^+}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\xi_m^+}\right)^{-1},$$

$$A = K(0).$$

Функция  $K^+(\alpha)$  регулярна в верхней комплексной полуплоскости и не имеет там нулей, функция  $K^-(\alpha)$  обладает такими же свойствами в нижней полуплоскости. Для решения интегрального уравнения (3.6) продолжим его на всю ось и представим в виде

$$\int_0^{\infty} k(x - \xi)q(\xi)d\xi =$$

$$= be^{-\eta x}\chi(x) + e(x)[1 - \chi(x)] \quad (3.12)$$

Здесь  $\chi(x)$  — функция Хевисайда

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Применяя к (3.12) преобразование Фурье на всей прямой, получаем следующие соотношения

$$K(\alpha)Q^+(\alpha) = E^-(\alpha) - \frac{ib}{\alpha + i\eta}, \quad (3.14)$$

$$Q^+(\alpha) = \int_0^{\infty} q(x)e^{i\alpha x}dx,$$

$$E^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 e(x)e^{i\alpha x}dx.$$

Несложно показать, что функции  $Q^+(\alpha)$ ,  $E^-(\alpha)$  регулярны в верхней и нижней плоскостях соответственно. Используя факторизацию (3.10), запишем (3.14) в виде

$$K^+(\alpha)Q^+(\alpha) =$$

$$= \frac{E^-(\alpha)}{K^-(\alpha)} - \frac{ib}{(\alpha + i\eta)K^-(\alpha)}. \quad (3.15)$$

Последний член (3.15) можно факторизовать в виде суммы

$$\frac{ib}{(\alpha + i\eta)K^-(\alpha)} = f^+(\alpha) + f^-(\alpha), \quad (3.16)$$

$$f^+(\alpha) = \frac{ib}{(\alpha + i\eta)K^-(-i\eta)}, \quad (3.17)$$

$$f^-(\alpha) = \frac{ib}{(\alpha + i\eta)} \left[ \frac{1}{K^-(\alpha)} - \frac{1}{K^-(-i\eta)} \right]. \quad (3.18)$$

Представим теперь уравнение (3.15) в следующем виде

$$K^+(\alpha)Q^+(\alpha) + f^+(\alpha) = \frac{E^-(\alpha)}{K^-(\alpha)} - f^-(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha). \quad (3.19)$$

Используя метод аналитического продолжения, можно показать, что  $\Gamma(\alpha) \equiv 0$ . Тогда

$$Q^+(\alpha) = -\frac{f^+(\alpha)}{K^+(\alpha)}, \quad (3.20)$$

$$E^-(\alpha) = K^-(\alpha)f^-(\alpha). \quad (3.21)$$

Запишем оригиналы функций  $Q^+(\alpha)$ ,  $E^-(\alpha)$

$$q(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (3.22)$$

$$e(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^-(\alpha)f^-(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.23)$$

Внося представление (3.20) или (3.21) в (1.7), получаем окончательные (эквивалентные) выражения для функции концентрации

$$\begin{aligned} \phi(x, z) &= \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, z) \frac{f^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, z) K^-(\alpha) f^-(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad 0 \leq z \leq h.$$

#### 4. Численные примеры

Интеграл (3.24) или (3.25) легко вычисляется либо численно, либо численно-аналитически, с помощью теории вычетов. Так, замыкая контур в верхнюю или нижнюю полуплоскость, в зависимости от знака  $x$ , получаем

$$\phi(x, z) = \begin{cases} \omega^+, & x \leq 0; \\ \omega^-, & x > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\omega^+ = -i \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{res} K(\xi_m^+, z) \frac{f^+(\xi_m^+)}{K^+(\xi_m^+)} e^{-i\xi_m^+ x},$$

$$\omega^- = -i \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{res} K(\xi_m^-, z) K^-(\xi_m^-) f^-(\xi_m^-) e^{-i\xi_m^- x}.$$

При  $z \neq 0$ , вычисление  $\operatorname{res} K(\xi_m^\pm, z)$  получается по формуле (2.14). При  $z = 0$  вычисление вычета, учитывая формулу (3.9), можно получить, подставляя  $\alpha = \xi_m^\pm$  и делая замену одного члена

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\xi_m^\pm}\right)^{-1} \leftrightarrow \xi_m^\pm. \quad (4.2)$$

Для расчетов рассматривалось несколько различных вариантов безразмерных параметров задачи (1.1)–(1.4). Учитывая большое число входных параметров задачи, были выбраны некоторые наиболее интересные варианты (рис. 1–8):

Вариант 1:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 0, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,02, & \nu &= 0,01, & u &= 0,2, & w &= 0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,5. \end{aligned}$$

Вариант 2:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 0, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,02, & \nu &= 0,01, & u &= -0,2, & w &= 0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,5. \end{aligned}$$

Вариант 3:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,3, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 1, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,02, & \nu &= 0,01, & u &= 0,2, & w &= 0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,5. \end{aligned}$$

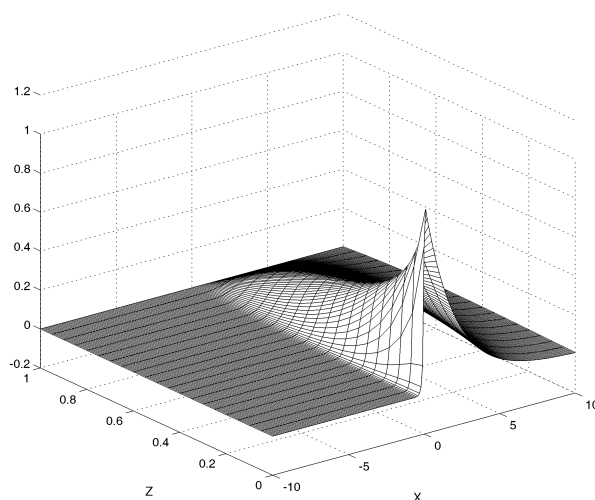


Рис. 1. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 1

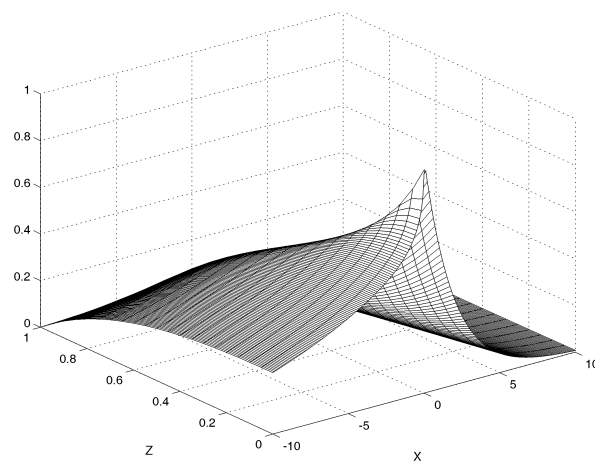


Рис. 2. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 2

Вариант 4:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,3, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 1, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,02, & \nu &= 0,01, & u &= -0,2, & w &= 0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,5. \end{aligned}$$

Вариант 5:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 0, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,03, & \nu &= 0,01, & u &= 0,2, & w &= 0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,1. \end{aligned}$$

Вариант 6:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 0, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,03, & \nu &= 0,01, & u &= -0,2, & w &= 0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,1. \end{aligned}$$

Вариант 7:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 0, & h &= 1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 0,03, & \nu &= 0,01, & u &= -0,2, & w &= -0,025, \\ b &= 1, & \eta &= 0,1. \end{aligned}$$

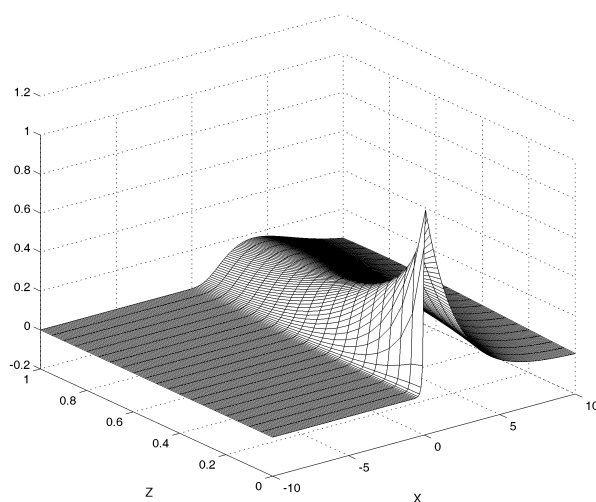


Рис. 3. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 3

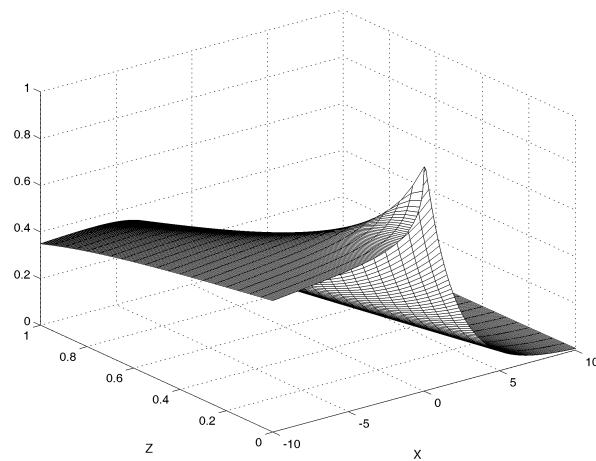


Рис. 4. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 4

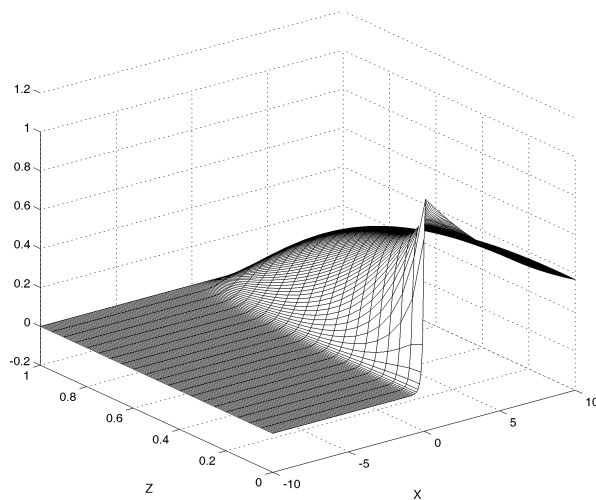
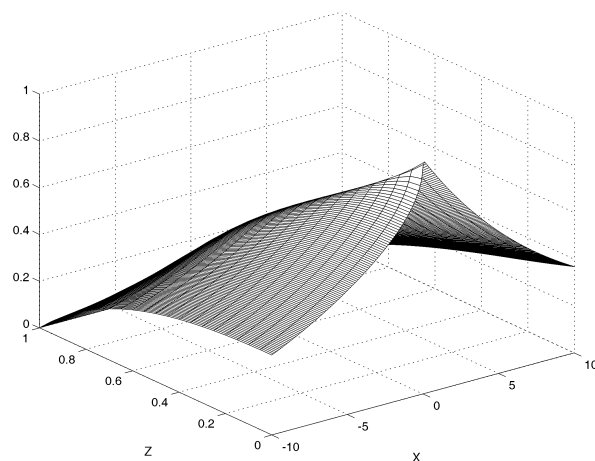
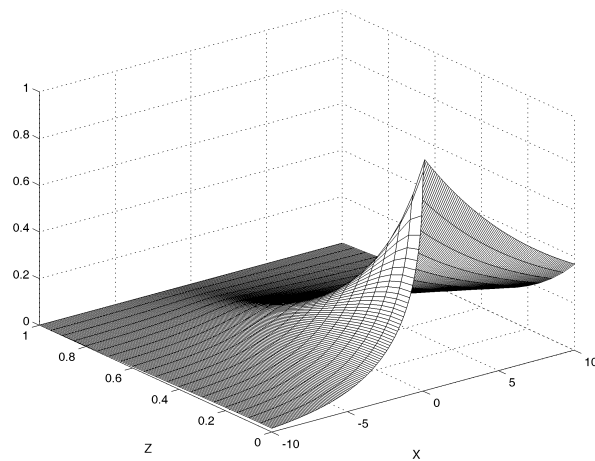
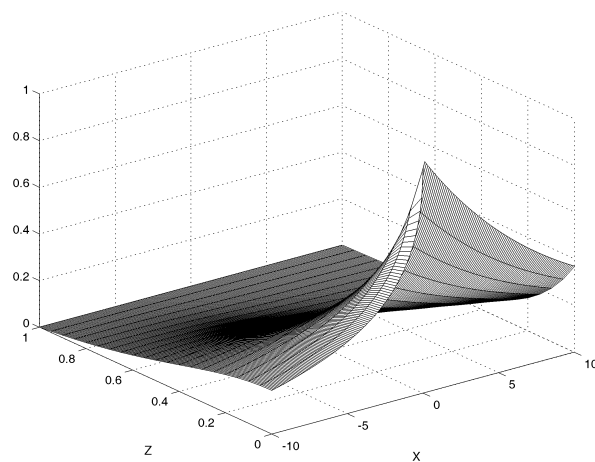


Рис. 5. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 5

Рис. 6. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 6Рис. 7. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 7Рис. 8. Функция концентрации  $\phi(x, z)$  для задачи (1.1)–(1.4), вариант 8



Вариант 8:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_0 &= 0, & h &= 1, \\ \mu &= 0,03, & \nu &= 0,01, & u &= -1, & w &= -0,025, \\ & & b &= 1, & \eta &= 0,1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

### Заключение

1. Построенная математическая модель смешанной стационарной краевой задачи диффузии-конвекции-распада для однородного слоя и численные алгоритмы позволяют с высокой точностью решать задачу с граничными условиями Дирихле, Неймана и условиями третьего рода в их различных комбинациях.

2. При вычислении функций  $K^\pm(\alpha)$  требуется порядка 20 членов в формулах (3.11), в тоже время при вычислении  $\phi(x, z)$  (4.1) достаточно нескольких ближайших к нулю полюсов  $\xi_m^\pm$  из-за быстрого убывания экспонент  $\exp(-i\xi_m^\pm x)$  по  $x$ .

3. При больших значениях  $\eta \gg 1$  (1.3) правая часть интегрального уравнения приближается к точечному источнику с конечной амплитудой, при  $\eta \rightarrow +0$  правая часть стремится к функции Хевисайда  $\chi(x)$  (3.13). В обоих случаях функция  $q(x)$  (3.22) имеет экспоненциально убывающий характер по  $x > 0$  с показателем, пропорциональным параметру  $\eta$ .

4. Влияние решения интегрального уравнения  $q(x)$  наиболее существенно сказывается на характере распределения  $\phi(x, z)$  в ближней зоне. Влияние граничных условий, задаваемых параметрами  $a_j, b_j$  (1.2), (1.4) носит более глобальный характер.

5. Разработанная модель применима без принципиальных изменений для решения смешанной задачи с многослойным пакетом слоев с различными свойствами каждого слоя. При этом явные выражения для решения вспомогательной задачи  $K(\alpha, z)$  (2.11) могут быть легко найдены численно [11].

### Литература

1. Самаров Ш.Ш. Точные и приближенные аналитические методы решения прямых, контактных и обратных задач теплопроводности // Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. Душанбе. 2004. 20 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.

3. Hundsdorfer W.H., Verwer J.G. Numerical solution of time-dependent advection-diffusion reaction equations. Springer, Berlin, 2003. 472 p.
4. Бекман И.Н. Высшая математика: математический аппарат диффузии. М.: Издательство Юрайт. 2018. 397 с.
5. Драников И.Л. Аномальная диффузия в простых физических моделях // Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. Москва. 2007. 23 с.
6. Бабешко В.А., Павлова А.В., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Математическое моделирование экологических процессов распространения загрязняющих веществ. Краснодар, Кубанский государственный университет. 2009. 138 с.
7. Бабешко О.М. Метод факторизации в проблеме напряженно-деформированного состояния литосферных плит // Автореферат дисс. докт. физ.-мат. наук. Краснодар. 2005. 41 с.
8. Зарецкая М.В. Влияние внутренней активности Земли на напряженно-деформированное состояние литосферных плит // Автореферат дисс. докт. физ.-мат. наук. Краснодар. 2010. 43 с.
9. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Издательство иностранной литературы. 1962.
10. Кривошеева М.А., Лапина О.Н., Нестеренко А.Г., Никитин Ю.Г., Сыромятников П.В. Аналитическое и численное моделирование стационарной краевой задачи диффузии-конвекции-распада третьего рода для однородного слоя на основе уравнений турбулентной диффузии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2020. Т. 17. № 3. С. 37–47. DOI: 10.31429/vestnik-17-3-37-47
11. Сыромятников П.В. Матричный метод построения символа функции Грина для стационарных задач турбулентной диффузии в многослойных средах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2018. Т. 15. № 3. С. 62–71. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-62-71

### References

1. Samarov, Sh.Sh. *Exact and approximate analytical methods for solving direct, contact and inverse problems of heat conduction*. Abstract of thesis. Cand. phys.-mat. sciences. Dushanbe. 2004. (In Russian)
2. Samarskiy, A.A., Vabishchevich, P.N. *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*. Moscow: LKI Publishing House, 2009. (In Russian)
3. Hundsdorfer, W.H., Verwer, J.G. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion reaction equations*. Springer, Berlin, 2003.

4. Beckman, I.N. *Higher mathematics: the mathematical apparatus of diffusion*. Yurayt Publishing House, Moscow, 2018. (in Russian)
5. Dranikov, I.L. *Anomalous diffusion in simple physical models*. Abstract of thesis. Cand. phys.-mat. sciences. Moscow, 2007. (In Russian)
6. Babeshko, V.A., Pavlova, A.V., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. *Mathematical modeling of environmental processes of the spread of pollutants*. Krasnodar, Kuban State University, 2009. (In Russian)
7. Babeshko, O.M. *The method of factorization in the problem of the stress-strain state of lithospheric plates*. Abstract of the thesis. doct. phys.-mat. sciences. Krasnodar, 2005. (In Russian)
8. Zaretskaya, M.V. *Influence of the Earth's internal activity on the stress-strain state of lithospheric plates*. Abstract of the thesis. doct. phys.-mat. sciences. Krasnodar, 2010. (In Russian)
9. Noble, B. *Application of the Wiener-Hopf method for solving partial differential equations*. Foreign Literature Pub., Moscow, 1962. (In Russian)
10. Krivosheeva, M.A., Lapina, O.N., Nesterenko, A.G., Nikitin, Yu.G., Syromyatnikov, P.V. *Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie stacionarnoy kraevoy zadachi diffuzii-konveksii-raspada dlya odnorodnogo sloya na osnove uravneniy turbulentnoy diffuzii* [Analytical and numerical modeling of a stationary boundary-value problem of diffusion-convection-decay of the third kind for a homogeneous layer based on the equations of turbulent diffusion]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2020, vol. 17, no. 3, pp. 37–47. DOI: 10.31429/vestnik-17-3-37-47 (In Russian)
11. Syromyatnikov, P.V. *Matrichnyy metod postroeniya simvola funktsii Grina dlya stacionarnykh zadach turbulentnoy diffuzii v mnogosloynnykh sredakh* [Matrix method for constructing the symbol of the Green's function for stationary problems of turbulent diffusion in multilayer media]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2018, vol. 15, no. 3, pp. 62–71. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-62-71 (In Russian)