УДК 575:636.082.22:639.3

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТРАНСГРАНИЧНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСЕЙ[1]

Г. И. Марчук[2], ***А. Е. Алоян***[3], ***В. О. Арутюнян***[4]

ADJOINT EQUATIONS AND TRANSBOUNDARY TRANSPORT OF POLLUTANTS

Marchuk G. I., Aloyan A. E., Arutyunyan V. O.

A 3D mathematical model of transboundary transport of atmospheric pollutants has been developed on the basis of fundamental and adjoint equations. The transformation of sulfur dioxide in the atmosphere has been considered with the application of generalized parameterization methods. Numerical experiments were conducted using ECMWF meteorological data and EMEP 1992 sulfur-dioxide emission data. With the help of adjoint functions, sensitivity functions were obtained characterizing the transboundary pollution for the territories of a few European countries and the Black Sea basin.

Введение

При решении глобальных задач физики атмосферы и окружающей среды требуется детальное описание структуры метеорологических полей и процессов распространения примесей в атмосфере. Особенно остро эта проблема стоит в последние годы в связи с активным воздействием человека на окружающую среду. При оценке возможных последствий этой деятельности важную роль играют математические модели. С их помощью можно оценить возмущения основных параметров, характеризующих изменения состояния климатической системы под влиянием естественных и антропогенных факторов. Проблема моделирования оказывается существенной еще и потому, что эксперименты в экологии и в социально-экономических областях могут привести к необратимым последствиям. Математическое моделирование позволяет рассмотреть различные сценарии влияния деятельности человека на окружающую среду и оценить их последствия. Полученная в результате информация позволяет следить за поведением исследуемой системы в динамике. Важнейшей задачей является также поиск оптимальных решений при планировании хозяйственной деятельности с учетом допустимых нагрузок на окружающую среду и социально-экономических критериев с конечной целью — определить границы устойчивости и пределы ее допустимых изменений.

Для оценки областей влияния удаленных источников загрязнений на экологическое состояние отдельных регионов Земли использу-

[1]Работа выполнена при поддержке администрации Краснодарского края и РФФИ р2003юг (03-05-64484), а также проекта МНТЦ (1908).

[2]Марчук Гурий Иванович, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, Институт вычислительной математики РАН, советник Президиума РАН.

[3]Алоян Арташ Еремович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института вычислительной математики РАН.

[4]Арутюнян Вардан Оганесович, канд. физ.-мат.наук, научный сотрудник Института вычислительной математики РАН.

ются уравнения переноса примесей в атмосфере с учетом турбулентного обмена и взаимодействия примесей с подстилающей поверхностью. Будем осуществлять моделирование глобального распространения примесей в атмосфере, с помощью которого можно получить оценку общего количества загрязнения подстилающей поверхности.

Расчеты по модели переноса примесей обычно проводятся на длительные сроки. С целью повышения достоверности результатов расчетов информация о поле скорости ветра и других метеоэлементов используется на основе фактического материала наблюдений. Образование кислотных осадков является одной из ключевых проблем в охране окружающей среды в современных индустриальных странах. Эти осадки обусловлены наличием сульфатных частиц, состоящих в основном из капелек серной кислоты, которая образуется в атмосфере из двуокиси серы двумя путями (через SO_3 и H_2SO_3). В последние годы накопилось много свидетельств вредного воздействия двуокиси серы (и серных соединений в целом) на растительность и здоровье людей. Необходимость борьбы за уменьшение выбросов окислов серы предполагает выработку надежных оценок. Поэтому разработка математических моделей трансграничного переноса примесей и проведение соответствующих численных расчетов представляется очень важным для выработки надежных стратегий контроля уровня их концентраций. После эмиссии в атмосферу двуокись серы распространяется по ветру (адвекция) и рассеивается в горизонтальной плоскости (горизонтальная диффузия) и по вертикали (вертикальная диффузия). Сульфатные частицы могут захватываться осадками и осаждаться на земную поверхность («влажное» осаждение) или же выпадать вследствие захвата подстилающей поверхностью («сухое» осаждение), при этом крупные частицы с характерными размерами более микрона — выпадают из-за гравитационного осаждения.

В течение последних десятилетий было разработано много моделей дальнего трансграничного переноса загрязнителей и их оседания. В рамках программ Организации по экономическому сотрудничеству и развитию в Европе (OECD) использовались ориентированные на приемник двумерные лагранжевые модели, разработка которых продолжалась в исследованиях западного центра программы ЕМЕП (EMEP/MSC-W) [1]. Последующие модели этого типа были применены для оценки годовых концентраций и выпадений окисляющихся веществ, содержащих оксиды серы и азота [2,3], а также концентраций озона в пограничном слое атмосферы [4].

1. Описание модели

В настоящей работе на базе [5,6] используется иной подход к решению задачи трансграничного переноса примесей, основанный на использовании сопряженных уравнений [7,8]. Исходные уравнения трансграничного переноса примесей двуокиси серы в сферической системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{u}{a\sin\psi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi}+(w-w_g)\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\\ -\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{1}{a^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mu-\\ -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}-\frac{1}{a^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\mu\sin\psi\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi}+\\ +(k_1+k_2+k_3)\,\varphi_1=F_1, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{u}{a\sin\psi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\psi}+(w-w_g)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\\ -\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{1}{a^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}-\\ -\frac{1}{a^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\mu\sin\psi\frac{\partial\varphi_2}{\partial\psi}+\\ +k_3\varphi_1+(k_4+k_5+k_6)\,\varphi_2=F_2, \quad (1.2)$$

где λ — долгота, ψ — дополнение до широты, z — высота от подстилающей поверхности, $\varphi_1=[SO_2]$, $\varphi_2=[H_2SO_4]$, w_g — скорость гравитационного оседания, u, v, w — компоненты скорости ветра в направлении λ,ψ, z соответственно, μ, ν — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях, $F_1(\lambda,\psi,z)$, $F_2(\lambda,\psi,z)$ — функции размещения и мощности источников, a — средний радиус Земли. Мощности источников и их распределения задаются как функции от пространственных координат. Трансформации SO_2 и H_2SO_4 опишем с помощью обобщенных коэффициентов трансформации и выведения (k_i, $i=1,\ldots,6$), соответствующих константам скорости этих процессов для SO_2 и H_2SO_4 (ч$^{-1}$) (табл. 1).

Таблица

Процесс	SO_2	H_2SO_4
Поглощение подстилающей поверхностью	k_1=0,015	k_4=0,005
Вымывание осадками	k_2=0,01	k_5=0,012
Окисление	k_3=0,027	
Нейтрализация		k_6=0,02

Задача (1.1)–(1.2) рассматривается в области $D_t = G \times [0,T]$, $G = S \times [b,H]$, $S = \{\Lambda_1 \le \lambda \le \Lambda_2,\ \Psi_1 \le \psi \le \Psi_2\}$, где $b = b(\lambda,\psi)$ — функция, описывающая рельеф подстилающей поверхности, H – верхняя граница расчетной области.

Сформулирем краевое условие задачи на уровне высоты приземного слоя атмосферы $z = b + h$.

Область определения решения заменим на $G = S \times [b+h, H]$, имея в виду, что приземный слой, как было указано выше, может быть исключен из рассмотрения, используя соответствующую параметризацию для задания граничного условия. Как известно из теории подобия Монина–Обухова, в приземном слое атмосферы турбулентный поток пассивной примеси (наряду с потоками тепла и количества движения) допустимо считать постоянными по высоте. Тогда при $z \le b + h$ будут выполняться соотношения [9]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_*}{z}\eta(\zeta), \quad \varphi = \varphi_1, \varphi_2, \tag{1.3}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_* \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\eta(\zeta)}{\zeta} d\zeta \equiv \varphi_* = f_\varphi(\zeta,\zeta_0), \tag{1.4}$$

$$\nu(\zeta) = \frac{u_*\kappa z}{\eta(\zeta)}, \quad u_* = \frac{\kappa|u|}{f_u(\zeta,\zeta_0)} = c_u|u|, \tag{1.5}$$

где φ_* — масштаб для изменения концентрации примеси, η, f_u и f_φ — универсальные функции, ζ — безразмерная длина, характеризующая устойчивость атмосферы ($\zeta = z/L$), индекс «ноль» означает, что соответствующие величины берутся при $z = b+z_0$, z_0 — параметр шероховатости, L — масштаб турбулентного слоя, κ – постоянная Кармана, u^* — масштаб скорости ветра, $c_u = \kappa/f_u(\zeta,\zeta_0)$. Из (1.3)–(1.4) получаем

$$\varphi_* = \frac{\varphi - \varphi_0}{f_\varphi(\zeta,\zeta_0)}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\eta(\zeta)}{z}\frac{\varphi - \varphi_0}{f_\varphi(\zeta,\zeta_0)}. \tag{1.7}$$

Умножая уравнение (1.7) на ν, придем к соотношению

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha(\varphi - \varphi_0),$$

где $\alpha = c_u c_\varphi |u|$, $c_\varphi = \kappa/f_\varphi(\zeta,\zeta_0)$. Рассмотрим это соотношение при $z = b + h$

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha(\varphi - \varphi_0) \quad \text{при } z = b + h. \tag{1.8}$$

Параметр $\alpha = \alpha(\zeta)$ характеризует взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью и является функцией от безразмерного параметра ζ, вид которого приведен в [9, 10]. Таким образом, единственной неизвестной величиной в граничном условии (1.8) остается функция φ_0. Определим концентрации примеси на уровне шероховатости (φ_0) из уравнения баланса примеси на подстилающей поверхности

$$-\left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 + (\beta_i - w_g)\,\varphi_0 = \\ = \sum_{k=1}^{K} Q_{0k}\delta(x - x_k)\delta(y - y_k). \tag{1.9}$$

Здесь K — число всех наземных источников с координатами (x_k, y_k); Q_{0k} — мощность k-го источника, т.е. количество примеси, поступающей в единицу времени на единичную площадь подстилающей поверхности; β_i $(i = 1, 2)$ — коэффициенты, характеризующие взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью ($\beta_1 = 0,01$ м/с соответствует суше, а $\beta_2 = 1$ м/с — водной поверхности).

Для удобства уравнение (1.9) записано в декартовых координатах x, y, поскольку они обычным образом связаны с координатами λ,

ψ. С учетом граничного условия уравнение (1.9) примет вид

$$\varphi_0 = \frac{\Delta}{\beta_i - w_g + c_u c_\varphi \left|u_{b+h}\right|}, \qquad (1.10)$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^{K} Q_{0k}\delta(x - x_k)\delta(y - y_k) + \\ + c_u c_\varphi \left|u_{b+h}\right| \varphi_{b+h},$$

$$\left|u_{b+h}\right| = \left|u\right|\big|_{z=b+h}\ , \quad \varphi_{b+h} = \varphi\big|_{z=b+h}\ .$$

На верхней границе атмосферы при $z = H$ рассмотрим следующее краевое условие задачи (1.1)–(1.2):

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = H. \qquad (1.11)$$

Начальное условие выберем в виде

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad (1.12)$$

$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\lambda, \psi, z)$ — «фоновая» концентрация примеси.

В дальнейшем ради простоты будем считать, что $\bar{\varphi} = 0$. На боковых границах области задаются краевые условия

$$\varphi_i|_\Gamma = \varphi_i^b, \quad \text{если} \quad u_n < 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}|_\Gamma = 0, \quad \text{если} \quad u_n \geq 0, \qquad (1.13)$$

$$i = 1, 2,$$

Γ — боковая поверхность, n — внешняя нормаль к Γ, u_n — нормальная компонента вектора скорости. Значение функции φ^b являются заданными.

Здесь h — высота приземного слоя атмосферы, α характеризует взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью, горизонтальной чертой обозначены фоновые значения; в численных расчетах трансграничного переноса в Европейском регионе приняты $\Lambda_1 = -30°$, $\Lambda_2 = 50°$, $\Psi_1 = 30°$, $\Psi_2 = 80°$.

На основе сделанных предположений будем считать, что решение задачи переноса примеси в форме (1.1)–(1.2), (1.11)–(1.13) — функция $\bar{\varphi}$ — непрерывна в $G \times [0, T]$ и является дифференцируемой функцией по t. Кроме того, пусть для каждого t функция φ принадлежит множеству функций $D(A)$ из вещественного гильбертова пространства $L_2(G)$, непрерывных и дифференцируемых в G и таких, что они подчиняются условию $A\varphi \in L_2(\Omega)$.

При этом каждая функция из $D(A)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (1.11)–(1.13). Относительно вектора скорости $\mathbf{u}$ будем считать, что компоненты этого вектора непрерывны и дифференцируемы, причем ради простоты предположим что $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Такое предположение естественно, поскольку наиболее значимой является субстанция, распространяющаяся в слое 1–3 км. В общем случае вместо этого условия следует принять $\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$. Относительно других функций и параметров задачи предположим, что они достаточно гладкие, так что существует единственное решение задачи (1.1), (1.2), (1.7), (1.11)–(1.13).

Поскольку в глобальных атмосферных моделях пространственное разрешение по вертикали оказывается недостаточным для восстановления полей с нужной точностью в нижних слоях атмосферы, метеорологические характеристики пограничного слоя можно рассчитывать с помощью параметризаций планетарного пограничного слоя атмосферы. С помощью модели планетарного пограничного слоя для каждого узла расчетной сетки в горизонтальной плоскости по известным значениям полей скорости и температуры на первом расчетном уровне определяются следующие внешние параметры:

$$Ro = \frac{|u_{g0}|}{l z_0}, \quad S_T = \frac{\beta\delta\hat{\Theta}}{l\,|\mathbf{u}_{g0}|},$$

$$\eta_x = \frac{\kappa^2}{l}\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\beta\kappa^2}{l^2}\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial y},$$

$$\eta_y = \frac{\kappa^2}{l}\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{\beta\kappa^2}{l^2}\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial x},$$

где R_0 — число Россби, S_φ — параметр стратификации, u_g, v_g — компоненты геострофического ветра $\mathbf{u}_g$, $|\mathbf{u}_{g0}|$ — модуль вектора скорости геострофического ветра у подстилающей поверхности, l — параметр Кориолиса, η_x, η_y — параметры бароклинности, $\hat{\Theta}$ — потенциальная температура, $\beta = g/\hat{\Theta}$ — параметр плавучести, g — ускорение силы тяжести, $\delta\hat{\Theta}$ — разность между значениями потенциальной температуры на границе планетарного пограничного слоя и подстилающей поверхности. По значениям Ro, S_T, η_x, η_y

находим величины: $C_g = u_*/|\mathbf{u}_g|$ — коэффициент «геострофического сопротивления»; α — угол между напряжением турбулентного трения у подстилающей поверхности и $|\mathbf{u}_{g0}|$; $\mu = h_0/L_0$ — безразмерный «внутренний» параметр стратификации. Здесь приняты следующие обозначения: $h_0 = \kappa u_*/l$ — «внутренний» масштаб высоты пограничного слоя; $L_0 = -c_p\rho u_*^3/\kappa\beta q_0$ — «масштаб длины Монина–Обухова»; c_p — теплоемкость воздуха; ρ — плотность воздуха; q_0 — поток тепла у Земли. По значениям C_g, α, μ находится величина q, а затем по C_g и u_g рассчитываются величина u_* и коэффициенты турбулентного обмена на высотах $z \geq h$ по формуле

$$\nu(\mu) = \frac{\kappa^2 u_*^2}{l^2}\begin{cases} h/(1+10\mu h), & \mu \geq 0, \\ h, \quad -2,33 \leq \mu \leq 0, \\ (-0,07/\mu)^{-1/3}h^{4/3}, & \mu \leq -2,33, \end{cases}$$

(h — высота приземного слоя).

Компоненты вектора скорости можно выписать с помощью следующих выражений:

$$u = |\mathbf{u}_{g0}|\cos\alpha + \frac{u_*}{\kappa}a_1,$$

$$v = -|\mathbf{u}_{g0}|\sin\alpha + \frac{u_*}{\kappa}a_2,$$

$$a_1 = \kappa\frac{u-u_g}{u_*} = \\ = -\exp(-a_3)(\cos a_3 - \sin a_3)/a_4,$$

$$a_2 = \kappa\frac{v-v_g}{u_*} = \\ = \exp(-a_3)(\cos a_3 + \sin a_3)/a_4,$$

где a_1 и a_2 — безразмерные «дефекты скорости», $a_3 = (z-h)/a_4$, $a_4 = (2\nu)^{1/2}$.

Для глобального переноса особый интерес представляют примеси с малыми скоростями гравитационного оседания, которые значительное время находятся во взвешенном состоянии и переносятся вместе с воздушными массами. В этом случае для примесей применимы положения теории турбулентности, используемые в моделях общей циркуляции для описания турбулентного обмена температуры и влажности. В частности, для определения коэффициента горизонтального турбулентного обмена используется следующая модель [11]:

$$\mu = k_1^2\Delta S\,|D_N|\,,$$

$$D_N = \left(D_T^2 + D_S^2\right)^{1/2},$$

$$D_T = \frac{1}{a\sin\psi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{\partial v}{2\partial\psi},$$

$$D_S = \frac{1}{a\sin\psi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{\partial u}{2\partial\psi},$$

ΔS — площадь элементарной ячейки сеточной области, k_1 — безразмерный параметр.

Вычислительные алгоритмы, используемые для решения этой задачи, основаны на методе расщепления. При этом на каждом интервале Δt приходим к численной схеме, описывающей дифференциальный оператор переноса примеси по траекториям, и к схеме, аппроксимирующей турбулентную диффузию. На первом этапе используется явная монотонная схема, обладающая свойством консервативности и имеющая второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и по времени. На втором этапе используется схема с неявной аппроксимацией. Более детально численные алгоритмы решения задачи (1.1)–(1.13) изложены в [12].

Для построения модели трансграничного переноса с помощью сопряженных функций введем в рассмотрение функционал от решения φ_i основной задачи (1.1)–(1.13) (здесь приводятся только выкладки для φ_1; аналогичные рассуждения справедливы и для φ_2; индекс при этом опускается)

$$J = \int_0^T dt \int_\omega p\varphi dG, \tag{1.14}$$

где $p = p(\lambda, \psi, z, t)$ — заданная функция. Если, например,

$$p = \begin{cases} p_o, & r \in \omega, \\ 0, & r \notin \omega, \end{cases}$$

то J представляет собой суммарную концентрацию примеси в выделенной подобласти G, взвешенную с весом p_o. Область ω соответствует зоне, где производится оценка загрязнения. В зависимости от этого можно получить различные интегральные характеристики поля загрязнения примесей. Таким образом, задача сводится к оценке функционала вида (1.14), требующей знания поля функции φ, включая фактическую информацию об источниках выбросов примеси, действующих в

области G, и о начальном состоянии загрязнения атмосферы в этой области в момент $t = 0$.

Для оценки функционала J целесообразно использовать подход, основанный на решении сопряженной задачи, позволяющий оценить степень потенциальной опасности загрязнения атмосферы в области ω от всех источников, расположенных в G, при заданных сценариях метеорологического режима атмосферы. Сопряженная задача, соответствующая основной задаче (1.1)–(1.13), будет иметь вид

$$-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t} - \frac{u}{a\sin\psi}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\lambda} - \frac{v}{a}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\psi} - (w - w_g)\frac{\partial\varphi^*}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi^*}{\partial z} - \frac{1}{a^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mu\frac{\partial\varphi^*}{\partial\lambda} + \\ + \frac{1}{a^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\mu\sin\psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial\psi} + \\ + (k_1 + k_2 + k_3)\,\varphi^* = p, \quad (1.15)$$

где p — функция, определяемая функционалом (1.14), а начальные и граничные условия принимают следующий вид:

$$\varphi^* = 0, \quad t = T, \quad (1.16)$$

$$\nu\frac{\partial\varphi^*}{\partial z} = \alpha\varphi^*, \quad z = 0, \quad (1.17)$$

$$\nu\frac{\partial\varphi^*}{\partial z} = 0, \quad z = H, \quad (1.18)$$

$$\varphi^*|_\Gamma = 0, \quad u_n < 0,$$

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}|_\Gamma = 0, \quad u_n \geq 0. \quad (1.19)$$

Так как задача (1.15)–(1.19) корректна при обратном по времени решении, от $t = T$ к $t = 0$, то в качестве «начального» условия здесь выбрано (1.16). Для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма, схема его реализации получается транспонированной по пространству, времени и этапам расщепления относительно схем реализации дискретных аналогов основной задачи (1.1)–(1.13).

Путем несложных преобразований функционал J можно представить в виде

$$J = \int_0^T dt \int_G F\varphi^* dG + \\ + \int_0^T dt \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} d\lambda \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \alpha\varphi_o\varphi^*\,|_{z=b}\, d\psi. \quad (1.20)$$

Учитывая, что при больших T функция φ^* становится малой, вторым членом в (1.20), как правило, можно пренебречь. В результате J приближенно будет записан в виде

$$J = \int_0^T dt \int_G F\varphi^* dG.$$

Для того чтобы оценить трансграничный перенос от области G в данную страну (обозначим ее территорию через ω_0), представим функционал J в виде суммы функционалов

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^{n} J_i,$$

$$J_0 = \int_0^T dt \int_{\omega_0} F\varphi^* dr,$$

$$J_i = \int_0^T dt \int_{\omega_i} F\varphi^* dr, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Естественно требовать, чтобы функция F была отнормирована всюду таким образом, чтобы функционалы J_i описали общее загрязнение региона ω_i в выбранных единицах в промежутке времени $0 \leq t \leq T$.

Поясним физический смысл функции φ^*. Она является весовой функцией, определяющей вклад каждого источника загрязнения F и начального состояния функции $\varphi = \varphi_0$ в величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти ω. Таким образом, она характеризует степень опасности загрязнения атмосферы в области ω от источника, который может находиться в любой точке области D_t, т.е. вклад источника в функционале равен произведению мощности выброса на значение функции φ^* при каждом t в той области, где размещен источник. По значениям функции φ^* можно районировать область D_t, выделяя опасные зоны по отношению к загрязнению атмосферы в области ω. Конструктивно это районирование определяется с помощью функции φ^*, нормированной ради простоты на свое максимальное значение.

Рассмотрим функционалы загрязнения для отдельных регионов в виде

$$J_i = \int\limits_0^T dt \int\limits_G p_i \varphi \, dG = \int\limits_0^T dt \int\limits_G f \varphi_i^* \, dG,$$

где p_i – весовые функции, вообще говоря, различные для разных регионов. Функцию p_i $(i = \overline{1,5})$ определим следующим образом:

$$p_i(\lambda, \psi, z, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta \hat{z} \mathrm{mes}(\omega_i)}, & (\lambda, \psi, z) \in \omega_i, \\ 0, \quad (i = \overline{1,5}), \end{cases}$$

где ω_i соответствуют различным регионам, а $\mathrm{mes}(\omega_i)$ — площадь ω_i $(i = \overline{1,5})$.

Функционалы J целесообразно оценивать, используя решение сопряженной задачи (1.15)–(1.19).

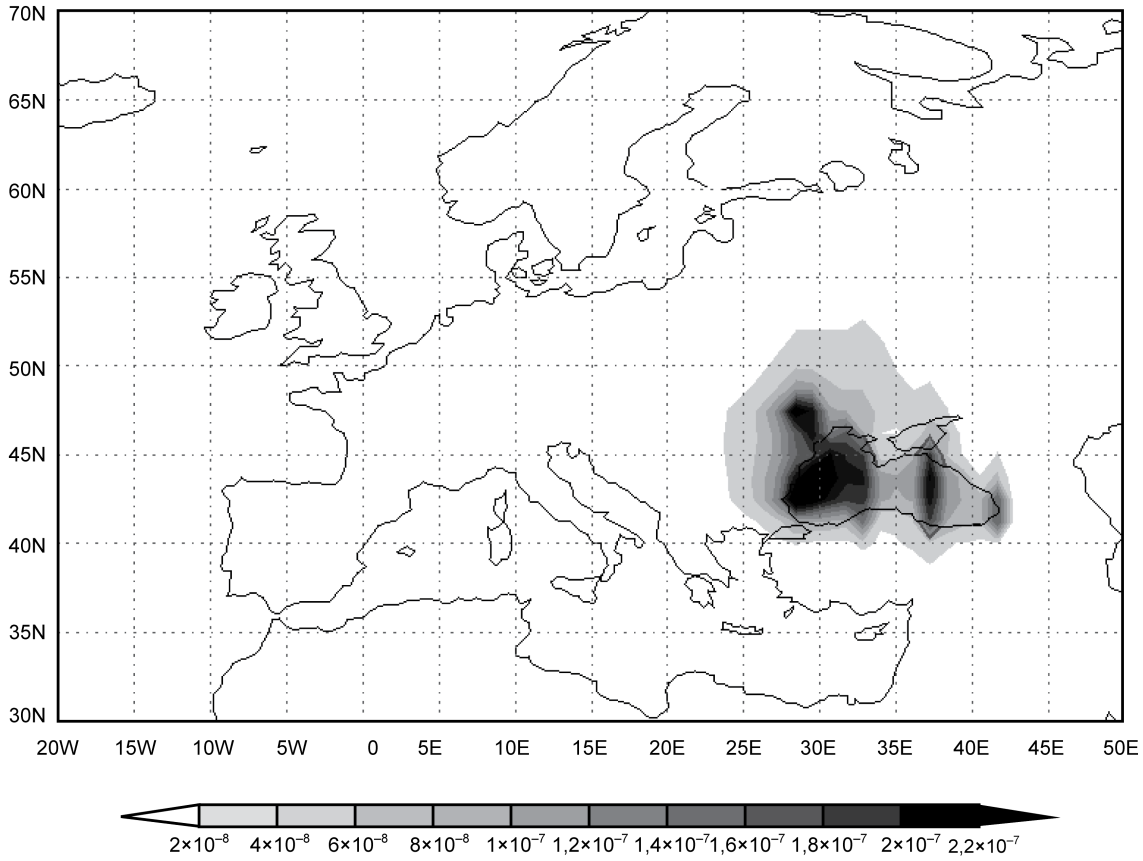
2. Результаты численных расчетов

Численные расчеты с использованием вышеизложенной модели проводились при следующих входных параметрах: число узлов сеточной области по долготе — 65, по широте — 41, по высоте — 15; горизонтальный шаг по обоим направлениям 1,25°, вертикальные уровни на высотах 50, 350, 650, 950, 1 250, 1 550, 3 090, 4 525, 6 615, 9 040, 11 345, 13 545, 15 705, 18 205, 20 705 м; шаг интегрирования по времени 30 мин.

Размер ячейки сетки на широте 60° составляет 90 км × 135 км. Каждая ячейка является одновременно эмиттером и приемником примеси. На входе модели используются метеорологические данные (полученные Европейским центром по среднесрочным прогнозам погоды — ECMWF) и данные EMEP по эмиссиям SO_2 для стран Европы (с определением принадлежности ячеек сетки или их частей конкретным странам или регионам). Данные об источниках SO_2 (килотонн S/год) в Европе взяты из [13].

Численное моделирование распространения и трансформации SO_2 в Европейском регионе ведется в области Северного полушария, ограниченной в пределах $-30° \leq \lambda \leq 50°$, $30° \leq \psi \leq 80°$. Для получения репрезентативных данных о дальнем переносе при большом усреднении требуется оперативный расчет на базе метеоинформации: в модели используется осредненные данные по 12-часовым метеосрокам, что соответствует принятым размерам стандартной ячейки. На рисунках функция влияния φ^* изображена изолиниями с номерами с 1-го по 9-й. Приведем теперь некоторые результаты численных расчетов по определению функций чувствительности для отдельных европейских стран и интервала времени 60 дней, проведенных с помощью описанной выше модели трансграничного переноса. На рис. 1–5 показаны функции чувствительности φ_i^* и соответствующие интегралы, описывающие общее количество SO_2 в области ω_i для акватория Черного моря (рис. 1), а также следующих Европейских стран: Германия (рис. 2), Испания (рис. 3), Италия (рис. 4). Франция (рис. 5). Полученные функции характеризуют относительный вклад каждого источника загрязнения F и начального состояния φ_o в суммарную величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти ω. Таким образом, с их помощью можно оценить степень опасности загрязнения атмосферы в отдельной области от источников, находящихся в любой точке общего региона. При этом учитываются как загрязнение от собственных источников, так и приходящих с других областей из-за трансграничного переноса. На основе анализа функции φ^* можно сделать заключение, что максимальные значения φ^*, как правило, достигаются в выделенном регионе, размеры которого огромны. Это естественно, поскольку вклад ближних источников всегда больше, а степень опасности загрязнения уменьшается по мере удаления их от рассматриваемых регионов. Поскольку в расчетах функционалов участвует произведение функции чувствительности на мощность источника, то может случиться, что источники с низкой степенью опасности дадут больший вклад в суммарный функционал загрязнения региона. Это связано с тем, что может иметь место большой выброс от предприятия. Размеры и конфигурация областей зависят от текущего состояния атмосферы.

Итак, пространственно-временная структура решений сопряженной задачи дает информацию о том, какие зоны могут оказать то или иное влияние на загрязнение конкретного выбранного региона. Если в качестве исследуемых выбрать регионы отдельных государств, то на основе расчета сопряженных функций и функционалов можно оценить трансграничный перенос загрязнения данной области всеми другими регионами.


70N
65N
60N
55N
50N
45N
40N
35N
30N
20W 15W 10W 5W 0 5E 10E 15E 20E 25E 30E 35E 40E 45E 50E
2×10⁻⁸ 4×10⁻⁸ 6×10⁻⁸ 8×10⁻⁸ 1×10⁻⁷ 1,2×10⁻⁷ 1,4×10⁻⁷ 1,6×10⁻⁷ 1,8×10⁻⁷ 2×10⁻⁷ 2,2×10⁻⁷

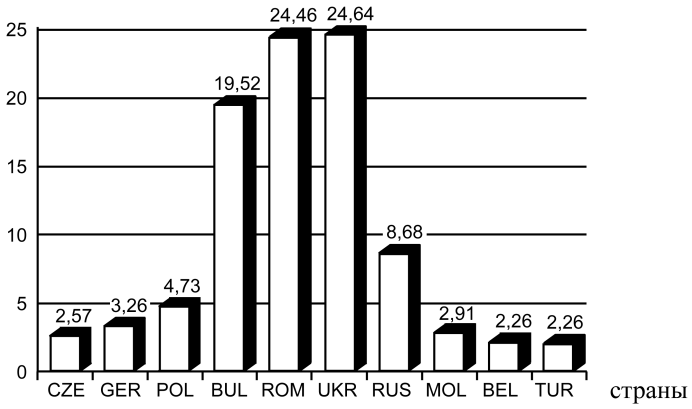
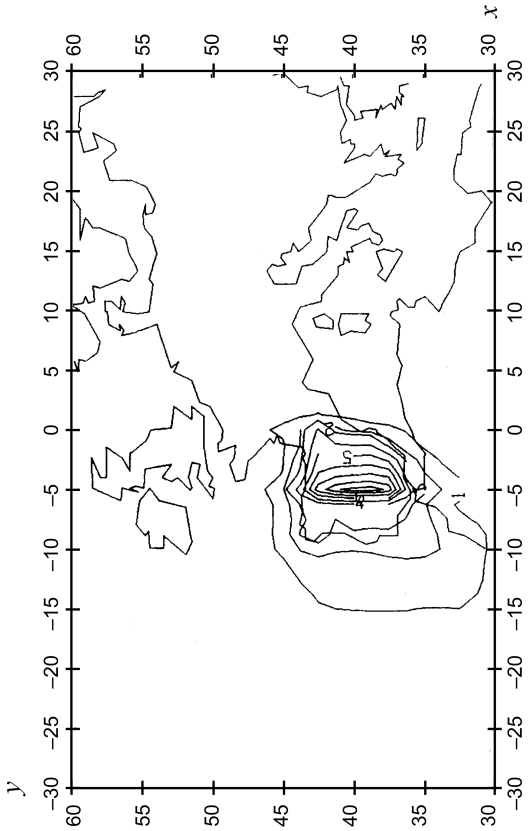

25
20
15
10
5
0
2,57
3,26
4,73
19,52
24,46
24,64
8,68
2,91
2,26
2,26
CZE GER POL BUL ROM UKR RUS MOL BEL TUR
страны

Рис. 1


y
x
1
4
5

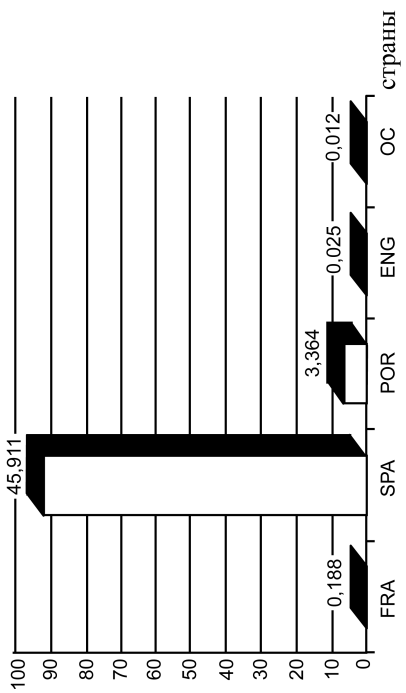
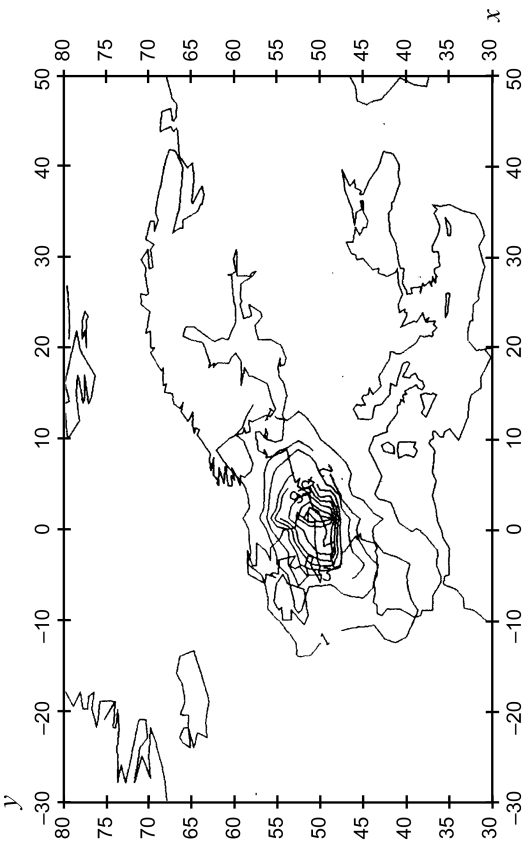

45,911
0,188
3,364
0,025
0,012
FRA
SPA
POR
ENG
OC
страны

Рис. 3


y
x
1
8

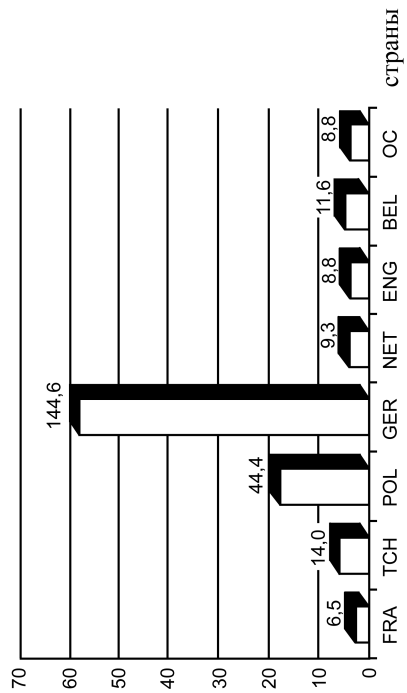
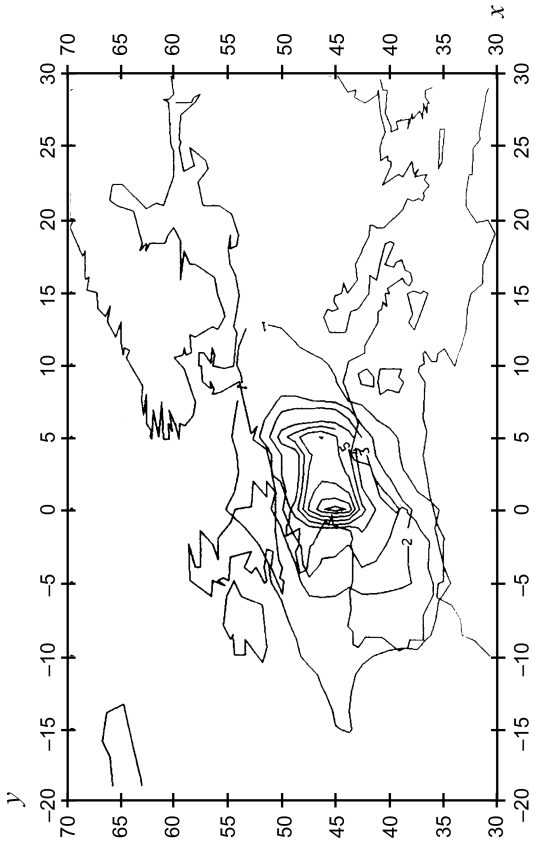
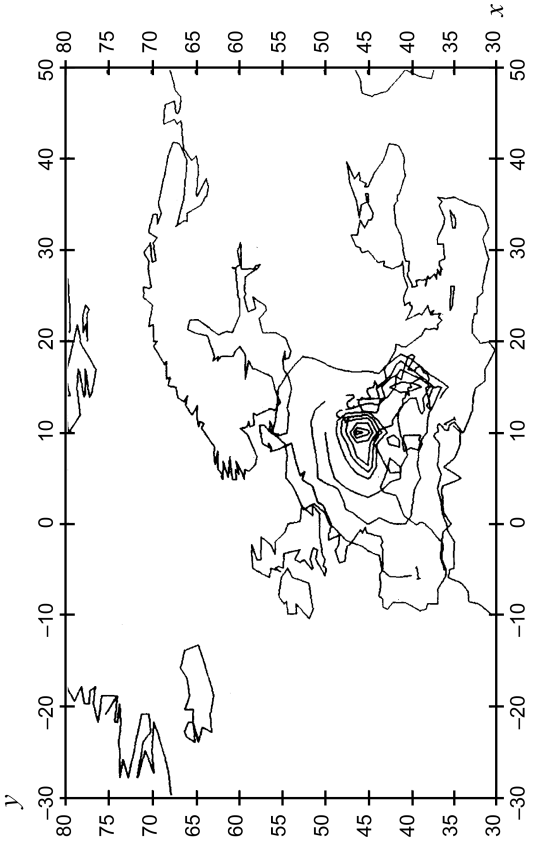

144,6
44,4
6,5
14,0
9,3
8,8
11,6
8,8
FRA
TCH
POL
GER
NET
ENG
BEL
OC
страны

Рис. 2


y
x


y
x

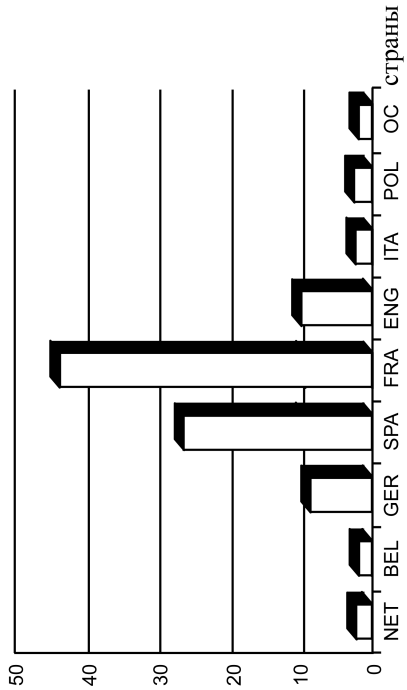

NET
BEL
GER
SPA
FRA
ENG
ITA
POL
OC
страны

Рис. 5

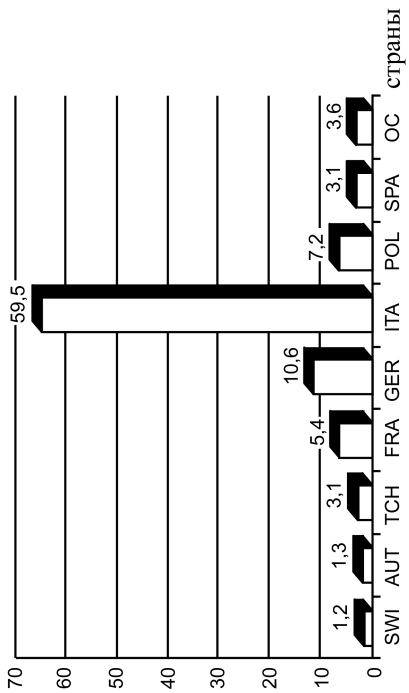

SWI
AUT
TCH
FRA
GER
ITA
POL
SPA
OC
страны
1,2
1,3
3,1
5,4
10,6
59,5
7,2
3,1
3,6

Рис. 4

Литература

1. *Eliassen A., Sabones J.* Modelling of long range transport of sulphur over Europe: A two year model run and some model experiments // Atm. Env. V. 22. P. 1457–1473.
2. *Hov O., Eliassen A., Simpson D.* Calculation of the distribution of NOx compounds in Europe. In: Tropospheric Ozone (ed. by Isaksen I.S.A.). Reidel, Dordrecht. 1988. P. 29–261.
3. *Iversen T.* Modelled and measured transboundary acidifying pollution in Europe — verification and trends // Atm. Env. 1993. V. 27A. No. 6. P. 889–920.
4. *Simpson D.* Photochemical model calculations over Europe for two extended summer periods: 1985 and 1989. Model results and comparisons with observations // Atm. Env. 1993. V. 27A. No. 6. P. 921–943.
5. *Марчук Г. И., Алоян А. Е.* Математическое моделирование в задачах экологии. Препринт № 234. ОВМ АН СССР. М., 1989. 36 с.
6. *Марчук Г. И., Алоян А. Е.* Глобальный перенос примеси в атмосфере // Изв. РАН. ФАО. 1995. Т. 31. № 5. С. 597–606.
7. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 535 с.
8. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
9. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
10. *Алоян А. Е., Иорданов Д. Л., Пененко В. В.* Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 1981. № 8. С. 32–43.
11. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations: The basic experiment // Mon. Wea. Rev. 1963. V. 91. No. 2. P. 99–164.
12. *Алоян А. Е.* Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. М.: ИВМ РАН, 2002. 200 с.
13. Budget materices and maps of SO2, NOx, NHx depositions and O3 concentrations for 1992. App. Ann. Rep. MSC-E (Sept.1992 – August 1993).

Статья поступила 28 мая 2005 г.
Институт вычислительной математики РАН, г. Москва
© Марчук Г. И., Алоян А. Е., Арутюнян В. О., 2005