Механика

УДК 539.375, 531.375

DOI: 10.31429/vestnik-18-3-8-13

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ РАЗВИТИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА

Дунаев В. И., Терещенко И. А., Молдаванов С. Ю., Величко Е. И., Шиян С. И.

ON ONE CONDITION FOR THE DEVELOPMENT OF AN ISOLATED DEFECT

V. I. Dunaev, I. A. Tereshchenko, S. Yu. Moldavanov, E. I. Velichko, S. I. Shiyan

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia
e-mail: ongptr@mail.ru

Abstract. In the case of a plane stress-strain state, a thermodynamically complete energy condition for the development of an isolated defect is obtained, generalizing the classical condition of A. Griffiths, for the case when destructive loads are applied both to the external contour of the body and to the contour of the isolated defect. This problem arises when modeling hydraulic fracturing of an oil reservoir under the influence of lateral pressure. Taking into account the entropy component of the released internal energy in the proposed brittle fracture condition determines the dependence of critical loads on the characteristic dimensions of the isolated defect, which takes into account the temperature and the linear coefficient of thermal expansion of the material. The A. Griffiths condition does not explicitly take into account the temperature and the linear coefficient of thermal expansion of the material and follows from the proposed condition if the entropy component of the internal energy is neglected.

Keywords: brittle fracture, isolated defect, energy condition, internal energy.

Введение

В работах [1, 2] А. Гриффитс сформулировал энергетическое условие хрупкого разрушения, связывающее характерный размер изолированного дефекта и внешние нагрузки, вызывающие его развитие. В работах [3–5] представлено энергетическое условие типа Гриффитса, учитывающее как потенциальную, так и энтропийную составляющую высвобождающейся внутренней энергии, определяющей явную зависимость критических нагрузок от температуры и линейного коэффициента теплового расширения материала.

В данной работе получено энергетическое условие хрупкого разрушения, учитывающее энтропийную составляющую внутренней энергии в случае, когда развитие изолированного дефекта происходит под действием нагрузок, приложенных и к поверхности дефекта, и к внешней поверхности тела. Такая задача возникает, например, при моделировании гидравлического разрыва нефтеносного пласта, находящегося под действием бокового давления, обусловленного горным давлением [6].

1. Энергетическое условие развития изолированного дефекта

Для однократного статического нагружения в изотермическом случае энергетическое условие разрушения имеет вид [3–5]

$$dU + dU^* = dA. \qquad (1.1)$$

Здесь U — внутренняя энергия тела с дефектом (трещиной), U^* — внутренняя энергия, затраченная на образование дефекта, dA — работа внешних сил.

Следуя концепции А. Гриффитса, положим $U^* = \gamma\Sigma$, где γ — удельная внутренняя энергия, «в среднем» затраченная на образование единицы площади поверхности дефекта Σ, имеющего в принятых здесь обозначениях и площадь Σ.

Дунаев Владислав Игоревич, д-р. физ-мат. наук, профессор кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: dunaevatv@mail.ru.

Терещенко Иван Анатольевич, старший преподаватель кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: ongptr@mail.ru.

Молдаванов Сергей Юрьевич, канд. физ-мат. наук, доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

Величко Евгений Иванович, канд. техн. наук доцент, кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: johnbottle@mail.ru.

Шиян Станислав Иванович, канд. техн. наук, доцент кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: akngs@mail.ru.

Условие (1.1) может быть переписано в эквивалентной форме

$$dU - dA = dU^*. \tag{1.2}$$

В выражении (1.2) введены переобозначения: $U = U^{(0)} - U^{(1)}$, $A = A^{(0)} - A^{(1)}$, — индекс (0) относится к соответствующим величинам до образования в теле новой поверхности, а индекс (1) — величинам после ее образования.

Условия (1.1) и (1.2) эквивалентны, поскольку значения $U^{(0)}$ и $A^{(0)}$ не зависят от характерного линейного размера дефекта a. Введение этих величин позволяет получить эффективный подход к вычислению интегралов внутренней энергии.

В качестве модели тела с дефектом на внешней, достаточно удаленной от поверхности дефекта Σ, поверхности S_0 зафиксированы перемещения, соответствующие приложенной нагрузке к внешней поверхности S_0 этого же тела, но без дефекта [3–5]. На поверхности дефекта действуют напряжения.

Рассмотрим случай плоского напряженно-деформированного состояния. Перепишем условие (1.2) в виде

$$\frac{dW}{dA} = 0, \quad W = U - A - \gamma\Sigma. \tag{1.3}$$

Следуя [3–5, 7], для высвобождающейся внутренней энергии U (1.3) имеем

$$U = U^{(0)} - U^{(1)} = \\ = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{V_0} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)} d\mathrm{v} - \int\limits_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)} d\mathrm{v}\right) + \\ + \alpha_{01}T_0k_1\left(\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij} d\mathrm{v} - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)}\delta_{ij} d\mathrm{v}\right) \tag{1.4}$$

$$(i, j = 1, 2).$$

В (1.4) первое слагаемое представляет потенциальную составляющую, а второе — энтропийную составляющую высвобождающейся внутренней энергии при образовании дефекта в теле, занимающем объемы V_0 и V_1 и ограниченного поверхностями S_0 и $S_0 + \Sigma$, соответственно, где Σ поверхность дефекта (имеющего в дальнейшем и длину контура Σ), σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжения и деформаций соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, $\alpha_{01} = \alpha_0$ для плоского напряженного состояния, $\alpha_{01} = \alpha_0(1+\nu)$ для плоской деформации, T_0 — абсолютная температура, $k_1 = E/(1-\nu)$ — для плоского напряженного состояния, $k_1 = E/(1-2\nu)$ — для плоской деформации, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Если в выражении (1.4) пренебречь вторым слагаемым, получим выражение для высвобождающейся потенциальной составляющей внутренней энергии, что соответствует классическому условию А. Гриффитса.

Для принятой модели развития дефекта перемещения

$$u_i^{(1)}(x_i) = u_i^{(0)}(x_i), x_i \epsilon S_0 \quad (i = 1, 2).$$

Тогда для величины A имеем

$$A = A^{(0)} - A^{(1)} = \oint\limits_{S_0} \left(\sigma_i^{(0)} - \sigma_i^{(1)}\right) u_i^{(1)} n_j ds + \\ + \oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(1)} n_j ds. \tag{1.5}$$

В выражении (1.5) u_i — компоненты вектора перемещения, n_j — компоненты вектора внешней нормали к поверхности тела.

Для достаточно удаленной от контура дефекта Σ внешней границы S_0 $\sigma_{ij}^{(0)} \sim \sigma_{ij}^{(1)}$, поэтому можно положить, с учетом выражения (1.5)

$$A = \oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(1)} n_j ds. \tag{1.6}$$

Применяя теорему взаимности

$$\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(0)},$$

для первых двух интегралов (1.4) получим

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{V_1} \left(\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(0)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}\right) d\mathrm{v} + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{V} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)} d\mathrm{v} + \\ + \alpha_{01}T_0k_1\left(\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij} d\mathrm{v} - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)}\delta_{ij} d\mathrm{v}\right). \tag{1.7}$$

В выражении (1.7) V обозначает область $V = V_0/V_1$.

Для дальнейших преобразований выражения (1.7) используем формулу Грина и ее следствия. Согласно этой формуле, для двух функций $P\,(x,y)$ и $Q(xy)$, непрерывных вместе со своими первыми производными в некоторой области D справедливо равенство

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 = \oint\limits_C Pdx_1+Qdx_2. \quad (1.8)$$

Криволинейный интеграл в правой части равенства (1.8) берется по замкнутому контуру C, ограничивающему область D так, что при обходе по границе C область D остается слева. Пусть в начале $Q\,(x_1,x_2)=f\cdot g$ и $P\,(x_1,x_2)=0$, а затем $Q\,(x_1,x_2)=0$ и $P\,(x_1,x_2)=f\cdot g$. Тогда из формулы Грина (1.8) получим, для соответствующих $P\,(x,y)$ и $Q(xy)$, две формулы:

$$\iint\limits_D f\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1dx_2 = -\iint\limits_D g\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1dx_2+\oint\limits_C fgdx_2, \quad (1.9)$$

$$\iint\limits_D f\frac{\partial g}{\partial x_2}dx_1dx_2 = -\iint\limits_D g\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1dx_2+\oint\limits_C fgdx_1.$$

Для преобразования первых двух интегралов в выражении (1.7) используем, последовательно соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (1.10)$$

формулы Грина (1.9) и уравнения равновесия

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j=0 \quad (i,j=1,2). \quad (1.11)$$

Для преобразования третьего и четвертого интегралов в выражении (1.7) используем соотношения Коши (1.10) и формулу Грина (1.8). Проводя указанные преобразования интегралов, в выражении (1.7) с учетом равенств (1.8)–(1.11) получим

$$U=\frac{1}{2}\oint\limits_{S_0+\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)n_jds+ +\frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(0)}n_jds+ +\alpha_{01}T_0k_1\left(\oint\limits_{S_0+\Sigma}\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)\delta_{ij}n_jds+ +\oint\limits_{\Sigma}u_i^{(0)}\delta_{ij}n_jds\right). \quad (1.12)$$

Поскольку на внешней границе S_0 тела с дефектом и без дефекта $u_i^{(0)}=u_i^{(1)}$, с учетом равенств (1.12) и (1.6) получаем выражение для W

$$W=\frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(0)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(1)}\right)n_jds+ +\alpha_{01}T_0k_1\oint\limits_{\Sigma}u_i^{(1)}\delta_{ij}n_jds-\gamma\Sigma. \quad (1.13)$$

Тогда условие разрушения (1.3) с учетом выражения (1.13) при $\gamma=\mathrm{const}$ имеет вид

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(0)}-\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(1)}\right)n_jds+ +\alpha_{01}T_0k_1\oint\limits_{\Sigma}u_i^{(1)}\delta_{ij}n_jds\right)- -\gamma\frac{d}{da}\Sigma\,(a)=0. \quad (1.14)$$

Замечание 1. Если на поверхности дефекта напряжения отсутствуют, то $\sigma_{ij}^{(1)}n_j=0$, $(i,j=1,2)$, и выражения (1.13), (1.14) совпадают с выражениями, полученными в работах [3–5].

Замечание 2. Если на удаленной от дефекта внешней поверхности напряжения отсутствуют, то в выражениях (1.13), (1.14) следует положить $\sigma_{ij}^{(0)}=0$, $u_i^{(0)}=0$ и эти выражения соответствуют формулам полученным в работе [8].

2. Тестовая задача

Рассмотрим модельную задачу об определении зависимости критических нагрузок от характерного размера центрального дефекта радиуса a в круглой пластине радиуса b, когда на контуре дефекта и на внешнем контуре пластины действуют равномерные давления P_a и P_b, соответственно. Объемные силы полагаем равными нулю ($X_r = X_\theta = 0$).

В осесимметричном случае $u_r = u_r(r)$, $u_\theta = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$. Тогда уравнение равновесия, соотношения Коши и закон Гука имеют, соответственно, вид [9]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_r + \nu_1\varepsilon_\theta\right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu_1\varepsilon_r\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

В выражении (2.3) $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$, $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ для плоского деформированного состояния, и $E_1 = E$ и $\nu_1 = \nu$ — для плоского напряженного состояния.

Подставляя закон Гука (2.3) в уравнение равновесия (2.1) и учитывая геометрические соотношения (2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u_r(r)$

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2}u_r = 0. \tag{2.4}$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \tag{2.5}$$

Используя общее решение (2.5) и соотношения (2.2), (2.3), получим компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1}C_1 - \frac{E_1}{(1+\nu_1)\,r^2}C_2, \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1}C_1 + \frac{E_1}{(1+\nu_1)\,r^2}C_2, \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из соответствующих граничных условий.

Если на внешней границе тела без дефекта действует постоянное напряжение (в частности давление), то $\sigma_r^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = -P_b$, $a \leqslant r \leqslant b$, и из равенства (2.6) получаем

$$-P_b = \frac{E_1}{1-\nu_1}C_1, \quad C_2 = 0. \tag{2.7}$$

Подставляя значения коэффицентов C_1 и C_2 (2.7) в выражение (2.5), находим

$$u_r^{(0)} = -P_b\frac{(1-\nu_1)}{E_1}r. \tag{2.8}$$

Для тела с дефектом граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -P_a \text{ при } r = a, \\ u_r^{(1)} &= u_r^{(0)} \text{ при } r = b. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Учитывая выражения (2.5), (2.6) и граничные условия (2.9), находим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1-\nu_1}{E_1}\frac{(1+\nu_1)\,P_a a^2 + (1-\nu_1)\,P_b b^2}{(1+\nu_1)\,a^2 + (1-\nu_1)\,b^2}, \\ C_2 &= -\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\frac{(P_a - P_b)\,a^2 b^2}{(1+\nu_1)\,a^2 + (1-\nu_1)\,b^2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Выражение для W (1.13) при $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $ds = ad\theta$, $\Sigma = 2\pi a$, $\gamma = \text{const}$ принимает вид

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\sigma_r^{(0)}(a)u_r^{(1)}(a) - \sigma_r^{(1)}(a)u_r^{(0)}(a) - \\ - \sigma_r^{(1)}(a)u_r^{(1)}(a)\Big)ad\theta + \\ + \alpha_{01}T_0k_1\int\limits_0^{2\pi}u_r^{(1)}(a)\,ad\theta - 2\pi a\gamma. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Подставляя значения соответствующих напряжений и перемещений в интегралы (2.11), с учетом выражений (2.5), (2.8), (2.10) после интегрирования получаем

$$\begin{aligned} W = \pi\frac{(1-\nu_1)}{E_1}\times \\ \times a^2\Bigg[\frac{(1+\nu_1)\,P_a(b^2-a^2) - 2P_b b^2}{(1+\nu_1)\,a^2 + (1-\nu_1)\,b^2}\times \\ \times (P_a - P_b) - P_a P_b + \\ +2\alpha_{01}T_0k_1\frac{(1+\nu_1)\,P_a(b^2-a^2) - 2P_b b^2}{(1+\nu_1)\,a^2 + (1-\nu_1)\,b^2}\Bigg] - 2\pi a\gamma. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Переходя в выражении (2.12) к пределу при $b \to \infty$, будем иметь

$$W = \pi \frac{a^2}{E_1} \Big[(1+\nu_1) P_a^2 - 4P_a P_b + 2P_b^2 + \\ + 2\alpha_{01} T_0 k_1 ((1+\nu_1) P_a - 2P_b) \Big] - 2\pi a \gamma. \quad (2.13)$$

Дифференцируя равенство (2.13) в соответствии с условием разрушения (1.3), (1.14), получим соотношение между величинами давления P_a и P_b, при которых возможно развитие дефекта с характерным размером a в зависимости от физико-механических параметров материала, линейного коэффициента теплового расширения и стационарной температуры

$$(1+\nu_1) P_a^2 - 4P_a P_b + 2P_b^2 + \\ + 2\alpha_{01} T_0 k_1 ((1+\nu_1) P_a - 2P_b) - E_1 \frac{\gamma}{a} = 0. \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) для любого фиксированного значения a и $\gamma = \mathrm{const}$ представляет квадратичную форму в пространстве переменных P_a и P_b.

Замечание 3. Переходя к пределу при $b \to \infty$ в выражениях (2.10), получаем

$$C_1 = -\frac{1-\nu_1}{E_1} P_b, \quad C_2 = \frac{1+\nu_1}{E_1} (P_a - P_b) a^2,$$

$$u_r^{(1)} = -\frac{1-\nu_1}{E_1} P_b r + \\ + \frac{1+\nu_1}{E_1} \frac{(P_a - P_b)}{r} a^2, \quad (2.15)$$

$$\sigma_r^{(1)} = -P_b - \frac{(P_a - P_b) a^2}{r^2}.$$

Выражения (2.15) соответствуют решению задачи теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной круговым отверстием, когда на контуре дефекта и на бесконечности заданы давления P_a и P_b, соответственно. Проводя вычисление интегралов (2.11) с учетом равенств (2.15), получим выражение (2.14). Этот результат показывает, что для вычисления интегралов (1.13) применимо решение задач теории упругости для бесконечных областей, когда на контуре дефекта и на бесконечности заданы напряжения. Эффективные методы решения плоских задач теории упругости для бесконечной области, ослабленной дефектом произвольной формы, изложены в монографии Н.И. Мусхелишвили [10], систематизировавшего применение теории функции комплексного переменного для построения и исследования решений плоских задач. Интегралы внутренней энергии (1.13) в условии (1.14) с учетом формул Колосова–Мусхелишвили [10] допускают комплексное представление и вычисляются при помощи вычетов [3–5].

Литература

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Philos. T. Roy. Soc. A. 1920. Vol. 211. P. 163–198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture // Proc. of the 1-st Int. Congr. On Appl. Mech. Delft. 1924 / J. Waltman. Jr., Delft. 1925. P. 55–63.
3. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Об энергетическом условии разрушения твердых тел // ДАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 43–45.
4. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Энергетическое условие разрушения твердых тел // Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 69–81.
5. *Dunaev I.M., Dunaev V.I.* Macroscopic Criterion for Brittle Fracture of Solids // Proc. of the 7-th EVROMECH. Solid Mechanics Conference 2009 Portugal, Lisbon. p. 117–118.
6. *Желтов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Известия академии наук СССР. Отделение техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
8. *Дунаев В.И., Терещенко И.А., Величко Е.И., Шиян С.И.* Об одной математической модели в задаче гидроразрыва нефтеносного пласта // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2020. № 10 (334). С. 39–41.
9. *Безухов Н.И.* Теория упругости и пластичности. М.: Гос. из-во технико-теоретической литературы, 1953. 420 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

References

1. Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. T. Roy. Soc. A.*, 1920, vol. 211, pp. 163–198.
2. Griffith, A.A. The theory of rupture. *Proc. of the 1-st Int. Congr. On Appl. Mech. Delft. 1924.* J. Waltman. Jr., Delft. 1925, pp. 55–63.
3. Dunaev, I.M., Dunaev, V.I. Ob energeticheskom uslovii razrusheniya tverdykh tel [On the energy condition for the destruction of solids]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of

Sciences], 2000, vol. 372, no. 1, pp. 43–45. (In Russian)

4. Dunaev, I.M., Dunaev, V.I. Energeticheskoe uslovie razrusheniya tverdykh tel [Energy condition for the destruction of solids]. *Mekhanika tverdogo tela* [Rigid body mechanics], 2003, no. 6, pp. 69–81. (In Russian)
5. Dunaev, I.M., Dunaev, V.I. Macroscopic Criterion for Brittle Fracture of Solids. *Proc. of the 7-th EVROMECH. Solid Mechanics Conference 2009 Portugal, Lisbon.* p. 117–118.
6. Zheltov, Yu.P., Khristianovich, S.A. O gidravlicheskom razryve neftenosnogo plasta [On hydraulic fracturing of oil-bearing strata]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhn. nauk* [Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Department of Engineering Sciences], 1955, no. 5, pp. 3–41. (In Russian)
7. Novatskiy, V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Mir, Moscow, 1970. (In Russian)
8. Dunaev, V.I., Tereshchenko, I.A., Velichko, E.I., Shiyan, S.I. Ob odnoy matematicheskoy modeli v zadache gidrorazryva neftenosnogo plasta [On one mathematical model in the problem of hydraulic fracturing of an oil-bearing reservoir]. *Stroitel'stvo neftyanykh i gazovykh skvazhin na sushe i na more* [Construction of oil and gas wells on land and at sea], 2020, no. 10 (334), pp. 39–41. (In Russian)
9. Bezukhov, N.I. *Teoriya uprugosti i plastichnosti* [The theory of elasticity and plasticity]. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhnikoteoreticheskoy literatury, Moscow, 1953. (In Russian)
10. Muskhelishvili, N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Nauka, Moscow, 1966. (In Russian)

Статья поступила 17 апреля 2021 г.