

МЕХАНИКА

УДК 519.63

DOI: 10.31429/vestnik-18-3-14-18

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ РАСЧЕТА ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ СКОРОСТИ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Кочергин С. В., Фомин В. В.

COMPUTATIONAL ASPECTS OF CALCULATING THE VERTICAL VELOCITY COMPONENT IN A HYDRODYNAMIC MODEL

S. V. Kochergin, V. V. Fomin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, Russia
e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. The paper considers a method for calculating the vertical velocity component in a dynamic model based on the run-through algorithm. The procedure is based on differentiating the continuity equation by the vertical coordinate and solving the resulting equation taking into account both boundary conditions, at the bottom and at the surface. The use of such a procedure allows us to obtain a certain increase in the kinetic energy, the vertical component of vorticity, and especially the maximum velocities due to the lack of circuit viscosity when approximating the second-order derivative vertically.

Keywords: dynamic model, vertical velocity calculation, run-through method of scheme viscosity, the Azov sea.

Введение

Решение задач экологической направленности для оценок воздействия загрязнений природного и техногенного характера на окружающую среду является важной и актуальной задачей. Для решения таких задач необходимо наличие современных моделей динамики вод и переноса загрязнений различной природы. При моделировании распространения тех или иных примесей в водоемах необходимо наличие входных параметров для уравнения переноса. Такими параметрами являются поля скоростей течений, коэффициенты турбулентной диффузии и т.д. При моделировании вертикальных динамических процессов особую роль играет компонента скорости в данном направлении, точность ее вычисления. Для вычисления вертикальной скорости в задачах динамики водоемов обычно используют уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, которое интегрируется по вертикали с учетом краевых условий и тех или иных разностных дискретизаций для адвективных членов в нем. Следует отметить,

что определение вертикальной компоненты скорости путем интегрирования по вертикали уравнения неразрывности содержит значительные ошибки [1, 2], т.к. происходит их суммирование при вычислении разностного аналога интеграла по вертикали. Уменьшение таких ошибок возможно за счет применения специальных алгоритмов [2, 3], основанных на дифференцировании по вертикали уравнения неразрывности и организации процедуры прогонки с учетом обоих однородных краевых условий: на поверхности моря и на дне. При таком подходе аппроксимация второй производной по вертикали, естественно, осуществляется со вторым порядком и схемная вязкость отсутствует. В работе [4], приводится сравнение такого подхода с точным аналитическим решением упрощенной тестовой задачи ветровой циркуляции.

1. Вычисление вертикальной скорости

В работе в качестве базовой используется модель [5] для расчета компонент полей течений и других входных параметров для модели

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник, отдел морских информационных систем и технологий, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskocher@gmail.com.

Фомин Владимир Владимирович, заведующий отделом, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: v.fomin@ukr.net.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

переноса пассивной примеси в Азовском море. Рассматриваемая модель реализована в σ -координатах, а аналог уравнения неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(DU)}{\partial x} + \frac{\partial(DV)}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \quad (1.1)$$

где U, V — горизонтальные компоненты вектора скорости течений $\mathbf{U} = (U, V, W)$, W — нормальная его компонента к поверхности $\sigma = \text{const}$, D — динамическая глубина, $\sigma = 0$ на поверхности моря, $\sigma = -1$ на дне, η — уровенная поверхность. Отметим, что в такой постановке $W = 0$ на поверхности и на дне [6]. Расчет W в данной модели осуществляется стандартным способом, который подробно описан в [5]. Для внутренних σ -уровней ($k = 2, M - 1$) имеем

$$W_{ijk}^{n+1} = -\sigma_k \frac{\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij}^n}{\Delta t} + \sum_{s=k}^{M-1} \left(\frac{U_{i+1/2,j,s} - U_{i-1/2,j,s}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1/2,s} - U_{i,j-1/2,s}}{\Delta y} \right) \Delta \sigma, \quad (1.2)$$

где

$$U = D^n(\bar{U}^{n+1/2} + \tilde{u}^n), \quad V = D^n(\bar{V}^{n+1/2} + \tilde{v}^n);$$

\bar{U}, \bar{V} — баротропные составляющие; \tilde{u}, \tilde{v} — бароклинные составляющие скорости. В операторе дивергенции компоненты потоков на уровнях σ_s берутся как средние между уровнями $\sigma_{s+1/2}$ и $\sigma_{s-1/2}$.

Другой подход для расчета W реализован при помощи метода прогонки [7]. Такой алгоритм предложен в [2, 3]. В его основе лежит дифференцирование (1.1) по σ и расчет W прогонкой с учетом обоих краевых условий на дне и поверхности. С учетом независимости η от σ из (1.1)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} \right), \quad (1.3)$$

или в разностном виде

$$W_{k+1} - 2W_k + W_{k-1} = -\Delta \sigma \left(\frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2} \right), \quad (1.4)$$

где

$$f_k = ((D_{i+1,j} + D_{i,j})U_{i+1,j,k} - (D_{i,j} + D_{i-1,j})U_{i,j,k})/2\Delta x + ((D_{i,j+1} + D_{i,j})V_{i,j+1,k} - (D_{i,j} + D_{i,j-1})V_{i,j,k})/2\Delta y. \quad (1.5)$$

Таким образом, из (1.3) W находится при помощи метода прогонки [7]. Прогонку называют монотонной, поскольку решение при ее реализации вычисляется по монотонно меняющимся индексам. Как известно, самая «плохая» арифметическая операция, с точки зрения роста ошибок вычислений, — это вычитание близких по величине чисел, приводящая к потере верных значащих чисел. Чтобы избежать этого эффекта, при вычислении знаменателей в формулах прогонки, можно использовать модификацию метода прогонки, которую обычно называют прогонкой Дорра [8], позволяющей реализовать процедуру вычисления W практически без вычитаний. Это позволяет не накапливать ошибку, особенно при длительном по времени интегрировании модели.

2. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились с использованием модели из работы [5] для акватории Азовского моря. Был проведен расчет на установление модельного поля течений под воздействием постоянного восточного ветра со скоростью 10 м/с. В расчетах использовалось 15 горизонтов по вертикали. В результате моделирования также были получены пространственные распределения коэффициентов A_H и K . Следует отметить, что все численные эксперименты проводились с одинаковыми входными параметрами численного моделирования. Расчет вертикальной компоненты по формуле (1.2) обозначим цифрой «1», расчет при помощи прогонки по формуле (1.4) — цифрой «2», а расчет на основе прогонки Дорра — цифрой «3».

В табл. 1 представлены значения кинетической энергии, вертикальной компоненты завихренности и модуль максимальной скорости для всех трех расчетов с одинаковыми входными параметрами после интегрирования на 2800 шагов модельного времени.

Из рис. 1 видно, что после интегрирования до 1800 шагов модельного времени (5 суток), кинетическая энергия практически установилась и далее не меняется. При реализации

Таблица 1

Расчет	E_k	E_p	$\text{rot}_z \mathbf{U}$	$ \mathbf{U} _{\max}$ (м/с)
1	$0,6173 \cdot 10^{-1}$	$0,1258 \cdot 10^2$	$0,6119 \cdot 10^{-6}$	0,51
2	$0,6230 \cdot 10^{-1}$	$0,1258 \cdot 10^2$	$0,6192 \cdot 10^{-6}$	0,55
3	$0,6243 \cdot 10^{-1}$	$0,1258 \cdot 10^2$	$0,6205 \cdot 10^{-6}$	0,56

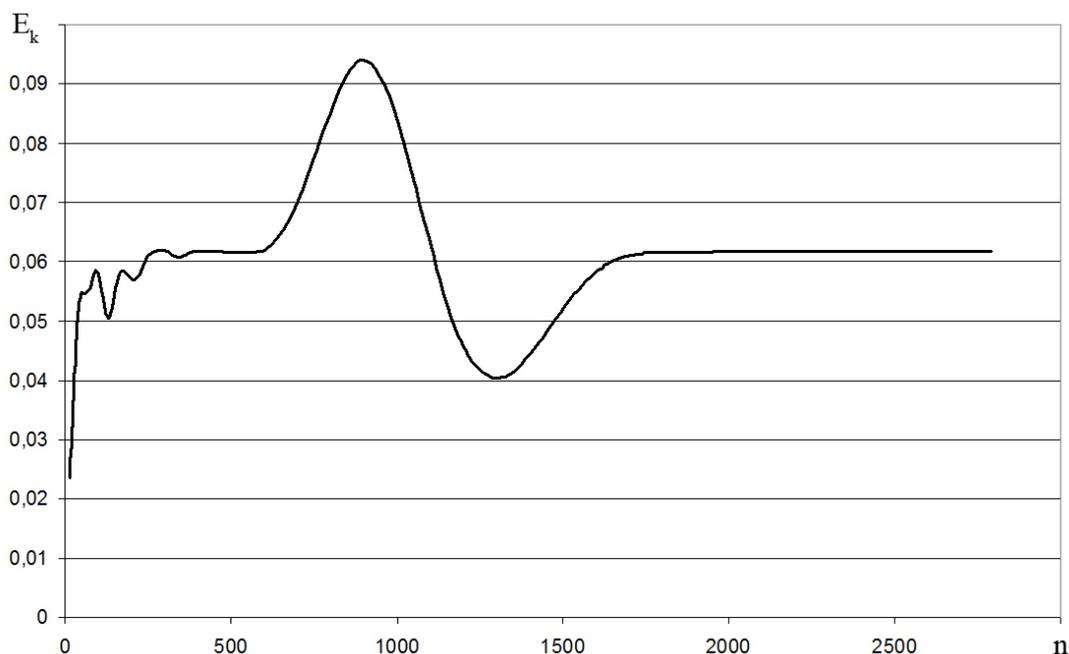


Рис. 1. Кинетическая энергия в процессе интегрирования модели (расчет 1)

двух других расчетов несколько увеличивается кинетическая энергия и завихренность вследствие увеличения максимальных скоростей, а значит, и градиентов вектора скорости \mathbf{U} по x и y .

Пространственные структуры вертикальной скорости в приповерхностном слое получаются идентичными во всех трех расчетах и характеризуются подъемом и опусканием вод в соответствии с имеющимися спутниковыми данными о концентрации взвешенного вещества в верхнем слое моря.

Из рис. 2 видно, что в структуре поля вертикальной скорости при данном ветровом воздействии просматриваются основные существующие банки и косы, присутствующие в рельефе дна Азовского моря. При ветровом воздействии восточных направлений (<http://dvs.net.ru/mp/data/201507vw.shtml>) в полной мере проявляется бенч у западного побережья косы Долгой. При таком атмосферном форсинге у оконечности косы Долгой происходит подъем вод и взмучивание донных отложений. Результаты чис-

ленного моделирования переноса пассивной примеси в Азовском море [9] показали, что подобная конфигурация в поле концентрации получается при интенсивном ветровом воздействии восточного направления. Следует отметить наличие интенсивного опускания вод в районе кос северного побережья Азовского моря. Эти особенности хорошо видны на рис. 3, характеризующем концентрацию взвешенного вещества в верхнем слое моря (<https://earthdata.nasa.gov/labs/worldview/?p=geographic&l=MODIS>) при ветровом воздействии восточного направления.

Заключение

Проведенные численные эксперименты показали возможность реализации алгоритма прогонки при вычислении вертикальной компоненты скорости с учетом двух крайних условий. Используемый алгоритм не обладает схемной вязкостью, что приводит к некоторому повышению модуля скорости. Используемый подход может быть применен при численной реализации динамических моделей

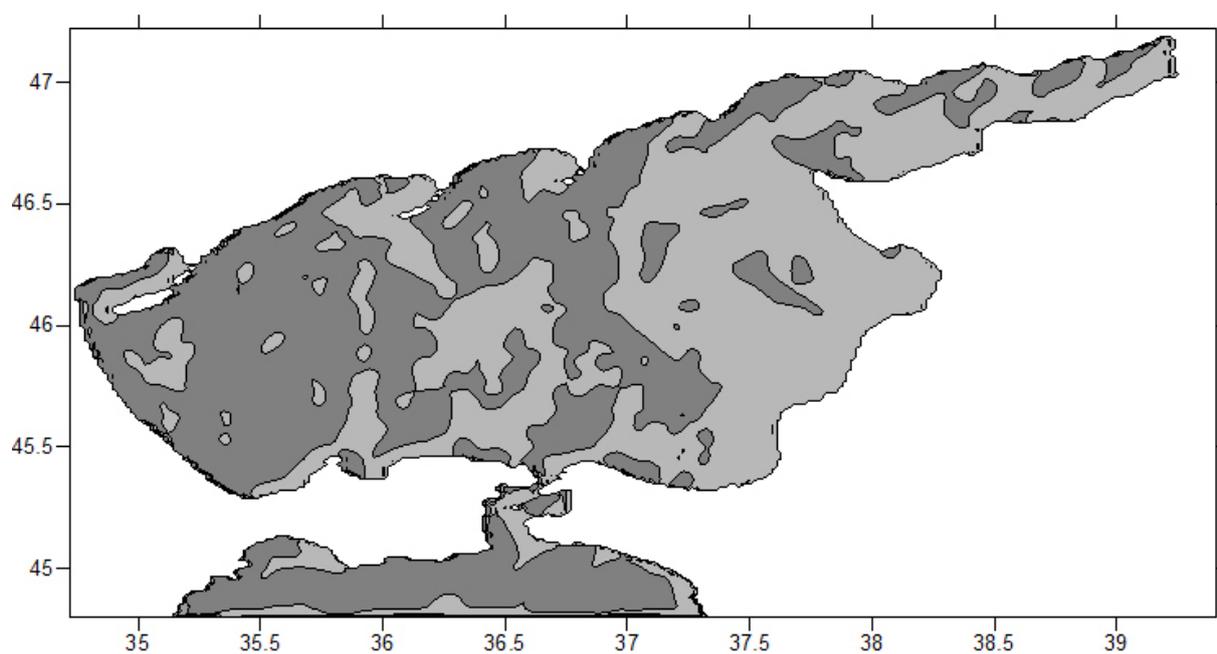


Рис. 2. Вертикальная скорость в приповерхностном слое

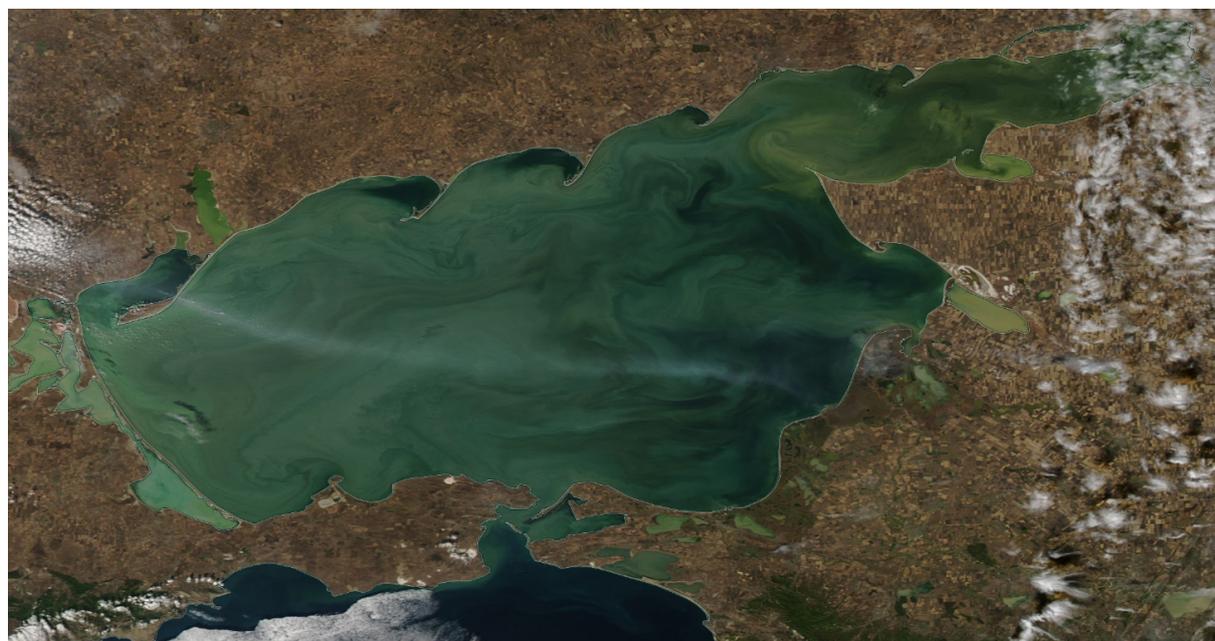


Рис. 3. Композит псевдоцветов MODIS AQUA, 18 октября 2015 года

циркуляции вод и моделировании процессов переноса загрязнений в водоемах для более адекватного их описания.

Литература

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука, 1988. 302 с.
2. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: "Экоси-гидрофизика", 2001. 238 с.
3. Kochergin V.P., Dunets T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins // *Physical oceanography*. 2001. Vol. 11. Iss. 3. P. 221–232.
4. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Аналитическая тестовая задача ветровых течений // *Процессы в геосредах*. 2019. № 2 (20). С. 193–198.
5. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море–суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
6. Фомин В.В. Численная модель циркуляции вод Азовского моря // *Научные труды УкрНИГМИ*. 2002. Вып. 249. С. 246–255.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
8. Dorr F.W. An example of ill-condition in the numerical solution of singular perturbation problems // *Math. Comput.* 1971. Vol. 25. Iss. 144. P. 144–283.
9. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Станичный С.В. Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2020. Т. 17. № 2. С. 40–48. DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48
10. modeling of ocean circulation]. Nauka, Moscow, 1988. (In Russian)
11. Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov* [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins]. Ekosi-gidrofizika, Sevastopol, 2001. (In Russian)
12. Kochergin, V.P., Dunets, T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
13. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. Analiticheskaya testovaya zadacha vetrovykh techeniy [Analytical test problem of wind currents]. *Protssesy v geosredakh* [Processes in geomedial], 2019, no. 2 (20), pp. 193–198. (In Russian)
14. Ivanov, V.A., Fomin, V.V. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone more–susha* [Mathematical modeling of dynamic processes in the sea – land zone]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol, 2008. (In Russian)
15. Fomin, V.V. Chislennaya model' tsirkulyatsii vod Azovskogo morya [Numerical model of the Azov sea water circulation]. *Nauchnye trudy UkrNIGMI* [Scientific works of UkrNIGMI], 2002, iss. 249, pp. 246–255. (In Russian)
16. Godunov, S.K., Ryaben'kiy, V.S. *Raznostnye skhemy* [finite-difference scheme]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)
17. Dorr, F.W. An example of ill-condition in the numerical solution of singular perturbation problems. *Math. Comput.*, 1971, vol. 25, iss. 144, pp. 144–283.
18. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Stanichnyy, S.V. Variatsionnaya assimilyatsiya sputnikovykh dannykh poverkhnostnoy kontsentratsii vzveshennogo veshchestva v Azovskom more [Variational assimilation of satellite data on the surface concentration of suspended matter in the Sea of Azov]. *Sovremennyye problemy distantionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa* [Modern problems of remote sensing of the Earth from space], 2020, vol. 17, no. 2, pp. 40–48. DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48 (In Russian)

References

1. Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S. *Matematicheskoe modelirovanie tsirkulyatsii okeana* [Mathematical