ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2021. Т. 18. № 2. С. 26–34

# Механика

УДК 539.3 DOI: 10.31429/vestnik-18-3-26-34

# К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТО-СТРУКТУРИРОВАННЫХ СРЕД С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМ

**Павлова А. В., Рубцов С. Е., Телятников И. С.**

## ON THE STUDY OF DYNAMIC PROBLEMS FOR LAYERED-STRUCTURED MEDIA WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

A. V. Pavlova[1], S. E. Rubtsov[1], I. S. Telyatnikov[2]
[1] Kuban State University, Krasnodar, Russia
[2] Southern Scientific Centre of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

*Abstract.* The problems of vibration for bodies with a single defect or with a system of defects under the effect of loads in various formulations are considered in numerous works by a number of authors. The discovery of the localization of vibration processes in the vicinity of plane inhomogeneities was led by V.A. Babeshko to the creation of a theory that studies various combinations of defects and their influence on the dynamic properties of layered elastic media.

The theory of vibration resistance viruses has wide applications in various fields, among which one of the most important is seismology.

The paper presents an approach for solving the problems of oscillation for multilayer media with a single defect or with a system of defects such as rigid inclusions under the effect of harmonic loads based of the theory of vibration resistance viruses proposed by V.A. Babeshko. The obtained functional-matrix relations for the characteristics of the stress-strain state of a layer package containing a set of plane inclusions serve as the basis for the construction of an integral equations system for contact stresses in the area of a stamp effect and stress surges on the edges of inclusions. Factorization methods can be used for solving integral equations (IE) and systems for some special cases of the stamp bottom and inclusion forms.

In this work, we present the solution of the integral equation for the scalar problem with a single inclusion using the fictitious absorption method, and show the results of the calculations for the real part of the vertical component of the stress jump amplitude vector for a rigid inclusion in a three-layer package with a clamped bottom edge.

Along with such fields as seismology and geophysics, which study the stress-strain state of geological structures, the presented approach can find applications in materials science, defectoscopy, engineering practice, etc.

*Keywords:* layered-structured medium, vibration resistance virus, rigid inclusions, integral equation, fictitious absorption method.

## Введение

Задачи о колебании тел с одиночным дефектом или с системой дефектов под действием нагрузок в различной постановке рассматриваются в многочисленных работах ряда авторов [1–7 и др.]. Открытие локализации вибрационных процессов в окрестности плоских неоднородностей привело В.А. Бабешко к созданию теории, изучающей различные сочетания дефектов и их влияние на динамические свойства слоистых упругих сред. Результаты по обоснованию возможности локализации волнового процесса в окрестности

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub_serg@mail.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории математики и механики Федерального исследовательского центра Южный научный центр Российской академии наук; e-mail: ilux_t@list.ru.

Работа выполнена в рамках задания ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241, отдельные результаты работы получены при поддержке РФФИ (проект 19-08-00145).

системы неоднородностей представлены в его работах [8–10], такого рода механические объекты были названы вирусами вибропрочности [10–13]. В качестве одного из методов исследования вирусов вибропрочности В.А. Бабешко был предложен дифференциальный метод факторизации [13].

Теория вирусов вибропрочности имеет широкие приложения в различных областях, среди которых одной из важных является сейсмология. Геологическое строение в сейсмических областях нередко представлено сложными многослойными разрезами, но в тех случаях, когда геологический разрез местности относительно прост в смысле геометрии напластования пород и рельефа местности, модель верхней части земной коры можно представить в виде среды, состоящей из плоскопараллельных горизонтальных слоев. Многочисленные дефекты типа трещин и включений характерны для локальных образований горной породы и результаты геофизических наблюдений свидетельствуют, что такого рода резонаторы могут быть ответственны за формирование разномасштабных возмущений и сопутствующих динамических процессов в геосферах Земли [14].

Кроме слоисто-неоднородных геологических структур модели вирусов вибропрочности могут применяться при проектировании слоистых материалов и покрытий, получивших на сегодняшний день широкое применение в различных технических областях. Выбор количества и типа слоев, а также варианты расположения интерфейсных трещин и/или армирующих элементов определяют различные прочностные свойства материала.

На основе многослойных элементов из пьезокерамики созданы многочисленные современные технические устройства, использующие пьезоэффект. Теория вирусов вибропрочности применительно к слоистым электроупругим средам развита в работах Пряхиной О.Д., Смирновой А.В. [15, 16 и др.].

В данной работе метод, развиваемый в работах [12, 13], применяется к решению задач для слоистой среды с жесткими включениями.

## 1. Постановка задачи

В прямоугольной декартовой системе координат, где плоскость $x_1Ox_2$ параллельна поверхности среды ($x_3 = h_{N+1} \geqslant 0$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$), а ось $Ox_3$ направлена вверх, рассматривается задача о вибрации пакета упругих слоев с заданными постоянными константами $\lambda_k$, $\mu_k$ и плотностью $\rho_k$, ограниченных плоскостями $x_3 = h_k$, $x_3 = h_{k+1}$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$, содержащих систему внутренних включений. Нижняя грань пакета расположена в плоскости $x_3 = h_1$ и жестко сцеплена с недеформируемым основанием. Толщина каждого из слоев рассматриваемой структуры обозначается $H_k = h_{k+1} - h_k$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$. Обозначим напряжения в плоскостях $x_3 \to h_k \pm 0$ через $\boldsymbol{\tau}_k^{\pm} = \left\{\tau_{km}^{\pm}\right\}$, $m = \overline{1, 3}$, а перемещения — $\mathbf{u}_k^{\pm}$. Рассматриваются амплитудные значения векторов. Учитывая установившийся характер колебаний, множитель $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, где $\omega$ — частота гармонических колебаний, опущен и изложение ведется для амплитудных значений соответствующих функций.

Будем полагать, что поверхность многослойной среды подвержена действию локализованной гармонической нагрузки в области $\Omega_{N+1}$, а в плоскости раздела слоев содержатся жесткие плоские включения, занимающие односвязные области $\Omega_{jk}$, $j = 1, N_k$. Тогда граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered} x_3 = h_{N+1}: \ \mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_{N+1}^0, \\ (x_1, x_2) \in \Omega_{N+1}; \quad \boldsymbol{\tau}_{N+1} = 0, \\ (x_1, x_2) \notin \Omega_{N+1}; \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} x_3 = h_1: \ \mathbf{u}_1 = 0, \\ -\infty < x_1, x_2 < +\infty; \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} x_3 = h_k: \ \mathbf{u}_{jk} = \mathbf{u}_{jk}^{+} = \mathbf{u}_{jk}^{-}, \\ (x_1, x_2) \in \Omega_{jk}; \quad \boldsymbol{\tau}_{jk}^{*} = \boldsymbol{\tau}_{jk}^{+} - \boldsymbol{\tau}_{jk}^{-} = 0, \\ (x_1, x_2) \notin \bigcup_{j=1}^{N_k} \Omega_{jk}, \quad j = \overline{1, N_k}. \end{gathered}$$

Предположение об установившемся характере колебаний требует введения дополнительного условия, в качестве которого используется принцип предельного поглощения [17].

## 2. Построение матрично-функциональных и интегральных уравнений задачи

Согласно принятой классификации реализован «вирус» вибропрочности класса (1,2) $V(1/h_1;\ \infty/h_2;\ \Omega_2/\ldots/h_{N+1};\ \Omega_{N+1}//2/h_2;\ \Omega_2^-/\ldots/h_{N+1};\ \Omega_{N+1}^-)$ [11, 15]. Здесь $\Omega_j^- = \mathrm{R}^2 \backslash \Omega_j$.

Перемещения пакета описываются уравнениями Ляме [17]. Техника построения соотношений, связывающих интегральные представления напряжений и перемещений на межслойных границах описана в [13]. Для пакета слоев эти соотношения примут следующий вид:

$$\mathbf{L}^{\pm}_{k-1,k-1}\mathbf{U}_{k-1} - \mathbf{L}^{\pm}_{k,k-1}\mathbf{U}_k = \\ = \mathbf{D}^{\pm}_{k-1,k-1}\mathbf{T}_{k-1} - \mathbf{D}^{\pm}_{k,k-1}\mathbf{T}_k, \quad (2.1)$$

$$k = \overline{2, N+1},$$

где $\mathbf{U}^{\pm}_k$, $\mathbf{T}^{\pm}_k$ — двумерные изображения Фурье вектор-функций $\mathbf{u}^{\pm}_k = \mathbf{u}(x_1, x_2, h_k \pm 0)$, $\boldsymbol{\tau}^{\pm}_k = \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, h_k \pm 0)$, при этом $\mathbf{U}^{-}_{N+1} \equiv \mathbf{U}_{N+1}$, $\mathbf{U}^{+}_1 \equiv \mathbf{U}_1$, соответственно $\mathbf{T}^{-}_{N+1} \equiv \mathbf{T}_{N+1}$, $\mathbf{T}^{+}_1 \equiv \mathbf{T}_1$. В случае идеального контакта между некоторыми слоями $\mathbf{T}^{+}_k = \mathbf{T}^{-}_k \equiv \mathbf{T}_k$, $\mathbf{U}^{+}_k = \mathbf{U}^{-}_k \equiv \mathbf{U}_k$ $\left(k = \overline{2, N}\right)$.

Используя представления для $\mathbf{D}^{\pm}_{l,k-1}$ и $\mathbf{L}^{\pm}_{l,k-1}$ [18], вводятся матрицы вида:

$$\mathbf{Z}^{\pm}_k = \left(\left(\mathbf{D}^{+}_k\right)^{-1}\mathbf{J}^{\mp 1}_k\mathbf{D}^{+}_k - \left(\mathbf{D}^{-}_k\right)^{-1}\mathbf{J}^{\pm 1}_k\mathbf{D}^{-}_k\right)^{-1}\times \\ \times\left(\left(\mathbf{D}^{+}_k\right)^{-1}\mathbf{J}^{\mp 1}_k\mathbf{L}^{+}_k - \left(\mathbf{D}^{-}_k\right)^{-1}\mathbf{J}^{\pm 1}_k\mathbf{L}^{-}_k\right),$$

$$\mathbf{F}^{\pm}_k = -\left(\left(\mathbf{D}^{+}_k\right)^{-1}\mathbf{J}^{\mp 1}_k\mathbf{D}^{+}_k - \left(\mathbf{D}^{-}_k\right)^{-1}\mathbf{J}^{\pm 1}_k\mathbf{D}^{-}_k\right)^{-1}\times \\ \times\left(\left(\mathbf{D}^{+}_k\right)^{-1}\mathbf{L}^{+}_k - \left(\mathbf{D}^{-}_k\right)^{-1}\mathbf{L}^{-}_k\right),$$

где $\mathbf{J}_k$ — диагональные матрицы,

$$\mathbf{J}_k = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{31,k}H_k}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{32,k}H_k}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{32,k}H_k}\right\},$$

$$\mathbf{L}_{k,\pm} = \left\|\begin{matrix} \pm\alpha_1\alpha_{31,k} & \pm\alpha_2\alpha_{31,k} & s_k \\ \pm\alpha_2\alpha_{32,k} & \mp\alpha_1\alpha_{32,k} & 0 \\ 2s_k + \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & \mp 2\alpha_1\alpha_{32,k} \end{matrix}\right\|,$$

$$\mathbf{D}_{k,\pm} = -\frac{\mathrm{i}}{\mu_k}\left\|\begin{matrix} 0{,}5\alpha_1 & 0{,}5\alpha_2 & \pm 0{,}5\alpha_{31,k} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \pm\alpha_{32,k} & 0 & -\alpha_1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\alpha_{3m,k} = \sqrt{\gamma_{mk}^2 - \alpha^2}, \quad \gamma_{mk} = \omega / v_{mk},$$

$$m = 1, 2,$$

$$v_{1k} = \sqrt{\frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k}}, \quad v_{2k} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}},$$

$$s_k = 0{,}5\left(\gamma_{2k}\right)^2 - \alpha^2, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Представление (2.1) позволяет получить матрично-функциональные уравнения для произвольного распределения параллельных плоских включений в многослойной среде. Так, при наличии дефектов типа жестких включений на каждой межслойной границе получим

$$\mathbf{R}\mathbf{T}^{*} = \mathbf{U}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{U} = \left\{\mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}^0_{N+1}\right\},$$

$$\mathbf{T}^{*} = \left\{\mathbf{T}^{*}_2, \ldots, \mathbf{T}^{*}_N, \mathbf{T}_{N+1}\right\},$$

$$\mathbf{T}^{*}_l = \iint\limits_{\Omega_l}\sum_{j=1}^{N_l}\boldsymbol{\tau}^{*}_{jl}(x_1, x_2)e^{\mathrm{i}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$\Omega_l = \bigcup_{j=1}^{N_l}\Omega_{jl}, \quad l = \overline{2, N}.$$

Блоки матрицы $\mathbf{R}$ в (2.2) имеют вид

$$\mathbf{R}_{NN} = \mathbf{K}_N,$$

$$\mathbf{R}_{Nj} = (-1)^{N-1-j}\mathbf{K}_N\prod_{l=N}^{j+1}\mathbf{F}^{-}_l\mathbf{H}^{-1}_l,$$

$$\mathbf{R}_{iN} = \left(\prod_{l=i+1}^{N}\mathbf{H}^{-1}_l\mathbf{F}^{+}_l\right)\mathbf{K}_N,$$

$$i, j = \overline{1, N-1};$$

$$\mathbf{R}_{N-1,N-1} = \mathbf{H}^{-1}_N\mathbf{F}^{+}_N\mathbf{K}_N\mathbf{F}^{-}_N\mathbf{H}^{-1}_N - \mathbf{H}^{-1}_N,$$

$$\mathbf{R}_{N-1,j} = (-1)^{N-1-j}\mathbf{R}_{N-1,N-1}\prod_{l=N-1}^{j+1}\mathbf{F}^{-}_l\mathbf{H}^{-1}_l,$$

$$\mathbf{R}_{ii} = -\mathbf{H}^{-1}_{i+1}\mathbf{F}^{+}_{i+1}\mathbf{R}_{i+1,i+1}\mathbf{F}^{-}_{i+1}\mathbf{H}^{-1}_{i+1} - \mathbf{H}^{-1}_{i+1},$$

$$i < N-1;$$

$$\mathbf{R}_{i,N-1} = \left(\prod_{l=i+1}^{N-1}\mathbf{H}^{-1}_l\mathbf{F}^{+}_l\right)\mathbf{R}_{N-1,N-1},$$

$$i, j = \overline{1, N-2};$$

$$\mathbf{R}_{i,j} = -\mathbf{R}_{i,j+1}\mathbf{F}^{-}_{j+1}\mathbf{H}^{-1}_{j+1} \text{ для } j < i < N-1,$$

$$\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{H}^{-1}_{i+1}\mathbf{F}^{+}_{i+1}\mathbf{R}_{i+1,j} \text{ при } i < j < N-1.$$

Здесь

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{Z}^{-}_1 - \mathbf{Z}^{+}_2,$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{Z}^{-}_k - \mathbf{Z}^{+}_{k+1} + \mathbf{F}^{-}_k\mathbf{H}^{-1}_k\mathbf{F}^{+}_k,$$

$$k = \overline{2, N-1},$$

$\mathbf{K}_N$ — матрица-символ Грина слоистого пакета без дефектов.

Полученные соотношения (2.2) при учете разрывных граничных условий (1.1), (1.2) приводят к системе интегральных уравнений (СИУ) для слоисто-структурированной среды с плоскими дефектами относительно контактных напряжений в области действия штампа и скачков напряжений на берегах включений:

$$\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N_l} K_{nl}\left(\Omega_{jl+1}\right)\boldsymbol{\tau}^*_{j,l+1} + \\ + K_{n,N}\left(\Omega_{N+1}\right)\boldsymbol{\tau}_{N+1} = \mathbf{u}_{m,n+1},$$

$$x_3 = h_{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{m,n+1}, \\ m = \overline{1,\, N_n}, \quad n = \overline{1,\, N-1}; \tag{2.3}$$

$$\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N_l} K_{N,l}\left(\Omega_{j,l+1}\right)\boldsymbol{\tau}^*_{j,l+1} + \\ + K_{n,N}\left(\Omega_{N+1}\right)\boldsymbol{\tau}_{N+1} = \mathbf{u}_{N+1},$$

$$x_3 = h_{N+1}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{N+1}.$$

При решении интегральных уравнений (ИУ) и систем для некоторых частных случаев форм подошвы штампа и включений (в плане) могут применяться факторизационные методы Винера–Хопфа или фиктивного поглощения (МФП).

## 3. Метод фиктивного поглощения для одной отличной от нуля составляющей скачка напряжений

Метод, предложенный В.А. Бабешко [20], получил свое название в связи с тем, что позволяет свести решение ИУ с сильно осциллирующими ядрами к уравнениям с ядрами, экспоненциально убывающими с ростом аргумента. Подобное поведение ядер характерно для ИУ стационарных задач и задач для сред с поглощением. В дальнейшем МФП получил развитие в работах В.А. Бабешко и О.Д. Пряхиной [21, 22] при решении ИУ и СИУ смешанных задач для моделей сред, обладающих сложными свойствами, в том числе анизотропией.

ИУ в задачах о колебаниях включений записываются в той же форме, что и ИУ контактных задач о вибрации штампов на поверхности среды. Так, ИУ плоских и антиплоских задач в случае одной отличной от нуля составляющей скачка напряжений имеют вид

$$Kq = \int_{-a}^{a} k\,(x-\xi)q\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f\,(x)\,, \\ -a \leqslant x \leqslant a, \tag{3.1}$$

$$k\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} K\,(\alpha)\, e^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha. \tag{3.2}$$

В уравнении (3.1) $q\,(x) = \boldsymbol{\tau}^+(x) - \boldsymbol{\tau}^-(x)$ — безразмерный скачок напряжений, $f\,(x)$ — перемещение, которое считается ненулевым по длине включения $|x| \leqslant a$ и одинаковым на его верхней и нижней границах.

Символ ядра $K\,(\alpha)$ зависит от $\omega$, упругих характеристик и геометрических параметров среды и обладает следующими свойствами: четная мероморфная функция в комплексной плоскости имеет на вещественной оси конечное число полюсов $p_k$ и нулей $z_k$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$ и асимптотическое представление $K\,(\alpha) = C\,|\alpha|^{-1}\left(1 + O\left(\alpha^{-2}\right)\right)$, $|\alpha| \to \infty$ [17].

Рассмотрим схему МФП решения уравнения (3.1), полагая, что $f\,(x) = e^{-\mathrm{i}\eta x}$ $(\mathrm{Im}\,\eta = 0)$, а константа, описывающая поведение $K\,(\alpha)$ на бесконечности, $C = 1$. Построим $q\,(x) \equiv q\,(x, \eta)$.

Свойства функции $K\,(\alpha)$ позволяют представить ее в виде $K\,(\alpha) = K_0\,(\alpha)\,\Pi\,(\alpha)$, где $K_0\,(\alpha)$ выбирается в соответствии с асимптотическим поведением $K\,(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ и возможностью ее точной факторизации в виде произведения. Здесь была выбрана часто используемая функция $K_0\,(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+B^2}}$, $B \gg 1$. Функция $\Pi\,(\alpha)$ с заданной точностью [17] приближается функцией $\Pi\,(\alpha, N) = E_N\left(\alpha^2\right) Q_N^{-1}\left(\alpha^2\right)$, где

$$E_N\left(\alpha^2\right) = \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - z_k^2\right),$$

$$Q_N\left(\alpha^2\right) \equiv \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - p_k^2\right).$$

Здесь $p_k$ и $z_k$ — соответственно полюсы и нули $K\,(\alpha)$, $p_k,\ z_k \in \mathrm{R}$, $\Pi\,(\alpha, N) = 1 + O\left(\alpha^{-1}\right)$, $|\alpha| \to \infty$.

Представим решение (3.1) $q\,(x) \in \mathbf{L}_b\,(-a, a)$, $b > 1$, в виде

$$q\,(x) = p\,(x) + \phi\,(x)\,. \tag{3.3}$$

Алгоритм МФП требует разложения функции $\phi(x)$ по любой полной линейно независимой системе. Поскольку вспомогательная функция $\phi(x)$ входит в окончательное представление решения только под знаком операторов, в качестве такой системы можно взять производные от $\delta$-функций Дирака с носителями на границах области интегрирования в (3.1). Представим $\phi(x)$ в форме

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N} G_k\left(\frac{-d^2}{dx^2}\right)\left[C_k\delta(x-a)+D_k\delta(x+a)\right], \tag{3.4}$$

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2-p_1^2)\ldots(\alpha^2-p_{k-1}^2)(\alpha^2-p_{k+1}^2)\ldots(\alpha^2-p_N^2), \tag{3.5}$$

$C_k$, $D_k$ — некоторые константы, нуждающиеся в определении.

Пусть функция $q(x)\in \mathbf{L}_b(-a,a)$, $b>1$, и имеет носитель на $[-a,a]$. Для того чтобы такими же свойствами обладала и функция $t(x)=\mathrm{V}^{-1}\Pi\mathrm{V}p$, необходимо и достаточно, чтобы функция $P(\alpha)=\mathrm{V}p(x)$ на полярном множестве $\Pi(\alpha)$ обладала свойством $P(\pm p_k)=0$, $k=\overline{1,N}$.

Тогда $Q(\pm p_k)=\Phi(\pm p_k)$, $k=\overline{1,N}$ [21].

Здесь через V и $\mathrm{V}^{-1}$ обозначены соответственно операторы прямого и обратного преобразования Фурье, $Q(\alpha)=\mathrm{V}q$, $\Phi(\alpha)=\mathrm{V}\phi$.

Согласно леммам, сформулированным в [21], существует единственная функция $\phi(x)$ вида (3.4).

Исходя из вышесказанного, введем в рассмотрение следующую функцию:

$$t(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} T(\alpha)e^{-\mathrm{i}\alpha x}d\alpha, \qquad T(\alpha)=\Pi(\alpha,N)P(\alpha). \tag{3.6}$$

Из (3.1), (3.4), (3.5), получим интегральное уравнение с неосциллирующим ядром относительно $t(x)$.

Если обозначить как $t_\eta(x)$ решения ИУ вида (3.1) с правой частью $f(x)=e^{-\mathrm{i}\eta x}$ и символом ядра $K_0(\alpha)$ в (3.2), то $q(x)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} q(x) &= t_\eta(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\Pi^{-1}(\alpha,N)-1\right)T_\eta(\alpha)e^{-\mathrm{i}\alpha x}d\alpha - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\Pi^{-1}(\alpha,N)\sum_{k=1}^{N}\Big\{C_k\Big[L_k(\alpha,a)e^{-\mathrm{i}\alpha x} - R_k(\alpha^2)e^{-\mathrm{i}\alpha(x-a)}\Big] + \\ &+ D_k\Big[L_k(\alpha,-a)e^{-\mathrm{i}\alpha x} - R_k(\alpha^2)e^{-\mathrm{i}\alpha(x+a)}\Big]\Big\}d\alpha. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь из рациональных функций выделены полиномиальные составляющие

$$\Pi(\alpha,N)G_k(\alpha^2)=P_k(\alpha^2)+R_k(\alpha^2), \tag{3.8}$$

$$P_k(\alpha^2)=\left[E_N(\alpha^2)-E_N(p_k^2)\right](\alpha^2-p_k^2)^{-1}\approx \alpha^{2N-2},$$

$$R_k(\alpha^2)=E_N(p_k^2)(\alpha^2-p_k^2)^{-1}\approx\alpha^{-2}, \quad |\alpha|\to\infty,$$

а функции $L_k(\alpha,\pm a)$ даются соотношениями

$$L_k(\alpha,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}K_0(\eta)R_k(\eta^2)T_\eta(\alpha)e^{\mathrm{i}\eta y}d\eta.$$

Система для определения неизвестных констант может быть записана

$$\sum_{k=1}^{N}P_k(\alpha^2)\left[C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a}+D_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha a}\right] + \mathrm{V}K_0^{-1}\mathrm{P}_{[0,a]}K_0\phi_2 = T(\alpha),$$

$$\alpha=\pm z_l, \quad l=\overline{1,N},$$

где $K_0$ — интегральный оператор вида (3.1) с символом ядра $K_0(\alpha)$. При этом

$$\mathrm{V}\phi=\sum_{k=1}^{N}G_k(\alpha^2)\left[C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a}+D_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha a}\right],$$

$$\Pi(\alpha,N)\mathrm{V}\phi = \sum_{k=1}^{N}\left(P_k(\alpha^2)+R_k(\alpha^2)\right)\left[C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a}+D_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha a}\right],$$

$$\phi_2 = \mathrm{V}^{-1} \sum_{k=1}^{N} R_k\left(\alpha^2\right)\left[C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a} + D_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha a}\right].$$

Функция $t_\eta(x)$ имеет следующий вид [22]:

$$t_\eta(x) = \sqrt{\frac{B+\mathrm{i}\eta}{\pi(a+x)}} e^{-B(a+x)+\mathrm{i}a\eta} + \\ + \sqrt{\frac{B-\mathrm{i}\eta}{\pi(a-x)}} e^{-B(a-x)-\mathrm{i}a\eta} + \\ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} K_0^{-1}(\eta)\left[\mathrm{erf}\sqrt{(B+\mathrm{i}\eta)(a-x)} + \right. \\ \left. + \mathrm{erf}\sqrt{(B-\mathrm{i}\eta)(a+x)} - 1\right], \quad (3.9)$$

где $\mathrm{erf}z$ — интеграл вероятности, тогда

$$T_\eta(\alpha) = f_2(\alpha,\eta) + f_2(-\alpha,-\eta),$$

где использовано обозначение [22]

$$f_2(\alpha,\eta) = \frac{e^{\mathrm{i}a(\alpha-\eta)}}{\mathrm{i}(\alpha-\eta)} \times \\ \times \left[K_0^{-1}\left(\mathrm{erf}\sqrt{2a(B-\mathrm{i}\eta)} - 1\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{(B+\mathrm{i}\alpha)(B-\mathrm{i}\eta)}\,\mathrm{erf}\sqrt{2a(B+\mathrm{i}\alpha)}\right].$$

Воспользовавшись (3.8) и представлением

$$\Pi^{-1}(\alpha,N) = 1 + \sum_{l=1}^{N} \beta_l\left(\alpha^2 - z_l^2\right)^{-1},$$

$$\beta_l = \prod_{k=1}^{N}\left(z_l^2 - p_k^2\right) \prod_{k=1, k\neq l}^{N}\left(z_l^2 - z_k^2\right)^{-1},$$

вычислив интегралы в (3.6) с помощью теории вычетов, решение ИУ (3.1) с правой частью $f(x) = \exp(-\mathrm{i}\eta x)$ $(\mathrm{Im}\,\eta = 0)$ получим в виде

$$q(x,\eta) = K^{-1}(\eta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\eta} \times \\ \times \left[\mathrm{erf}\sqrt{(B+\mathrm{i}\eta)(a-x)} + \right. \\ \left. + \mathrm{erf}\sqrt{(B-\mathrm{i}\eta)(a+x)} - 1\right] + \\ + \sqrt{\frac{B+\mathrm{i}\eta}{\pi(a+x)}} \mathrm{e}^{-B(a+x)+\mathrm{i}a\eta} + \\ + \sqrt{\frac{B-\mathrm{i}\eta}{\pi(a-x)}} \mathrm{e}^{-B(a-x)-\mathrm{i}a\eta} + \\ + \sum_{l=1}^{N} \frac{\beta_l}{2z_l}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\eta}\sqrt{B-\mathrm{i}\eta}\,\Phi_l(\eta,x) + \right. \\ \left. + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\eta}\sqrt{B+\mathrm{i}\eta}\,\Phi_l(-\eta,-x)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left\{Y_k^+\left[\frac{\mathrm{e}^{-B(a-x)}}{\sqrt{\pi(a-x)}} + \sum_{l=1}^{N}\frac{\beta_l}{2z_l}\Phi_l(-p_k,x)\right] - \right. \\ \left. - Y_k^-\left[\frac{\mathrm{e}^{-B(a+x)}}{\sqrt{\pi(a+x)}} + \sum_{l=1}^{N}\frac{\beta_l}{2z_l}\Phi_l(-p_k,-x)\right]\right\},$$

где

$$\Phi_l(\eta,\,x) = \\ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_l(a-x)}\frac{\sqrt{B+\mathrm{i}z_l}}{z_l-\eta}\mathrm{erf}\sqrt{(B+\mathrm{i}z_l)(a-x)} - \\ - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_l(a-x)}\frac{\sqrt{B-\mathrm{i}z_l}}{z_l+\eta} \times \\ \times \left(1 - \mathrm{erf}\sqrt{(B-\mathrm{i}z_l)(a-x)}\right).$$

Подлежащие определению $C_k$, $D_k$ входят в $Y_k^{\pm}$

$$Y_k^{\pm} = \mp\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ap_k}E_N\left(p_k^2\right)}{2p_k\sqrt{B-\mathrm{i}p_k}}\left(C_k\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}ap_k} + D_k\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}ap_k}\right),$$

которые находятся из алгебраической системы

$$\mathrm{i}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\alpha}\sqrt{B+\mathrm{i}\alpha}}{p_k+\alpha}Y_k^+ - \frac{e^{-\mathrm{i}a\alpha}\sqrt{B-\mathrm{i}\alpha}}{p_k-\alpha}Y_k^-\right] = \\ = f_2(\alpha,\eta) + f_2(-\alpha,-\eta),$$

$$\alpha = \pm z_l, \quad l = \overline{1,\,N}.$$

Решение ИУ (3.1) для произвольной правой части $f(x)$ отыскивается в виде

$$q(x) = \int_{\Gamma_*} q(x,\eta)\,F(\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

где $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_*} F(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\mathrm{d}\eta$.

Здесь $\Gamma_*$ не пересекает особенностей $K^{-1}(\eta)$.

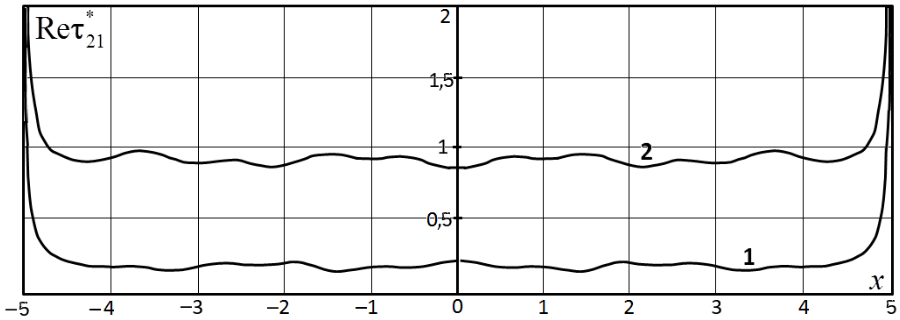


Рис. 1. Вещественная часть вертикальной составляющей вектора амплитуды напряжений для включения, расположенного между первым и вторым слоем в трехслойном пакете, $\eta = 0$

На рис. 1 приведены результаты расчетов зависимости вещественной части вертикальной компоненты вектора амплитуды скачка напряжений $\tau_{21}^*$ от координаты при наличии включения на границе раздела первого и второго слоев в трехслойном пакете с защемленной нижней гранью. Включение имеет плоскую форму ($\eta = 0$). Все безразмерные величины приведены к параметрам верхнего слоя, приведенная частота определяется формулой $\bar{\omega}^2 = \rho_3\omega^2 a^2 \mu_3^{-1}$, где $a$ — некоторый характерный линейный размер. Параметры пакета: плотности слоев $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$; коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0{,}3$; $\mu_1/\mu_3 = 1$, $\mu_2/\mu_3 = 0{,}2$. Кривая 1 соответствует следующим толщинам слоев: $H_1 = 0{,}75$; $H_2 = 0{,}5$; $H_3 = 0{,}25$. Кривая 2 соответствует параметрам пакета: $H_1 = 0{,}5$; $H_2 = 0{,}5$; $H_3 = 0{,}5$.

Рис. 1 демонстрирует изменение величины скачка напряжений при заглублении включения.

## Заключение

В работе представлен подход к решению задач о колебании многослойных сред с одиночным дефектом или с системой дефектов типа жестких включений под действием гармонических нагрузок на основе предложенной В.А. Бабешко теории вирусов вибропрочности.

Приведено решение ИУ скалярной задачи с помощью метода фиктивного поглощения, для которого область применимости полученных приближенных решений динамических задач определяется областью применения решений использованных в качестве вспомогательных статических задач [21, 22].

Наряду с такими областями, как сейсмология и геофизика, изучающими напряженно-деформированное состояние геологических структур, проблемы, имеющие ту же математическую основу, возникают в материаловедении, дефектоскопии, инженерной практике, где представленный подход может найти приложения при расчете прочностных свойств слоистых материалов с элементами армирования, при оценке эксплуатационных характеристик тел с дефектами и т.д.

## Литература

1. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
2. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Идентификация плоских трещин в упругой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудичества. 2003. № 1. С. 23–28.
3. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 282–289.
4. *Кит Г.С., Михаськив В.В., Хай О.М.* Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом конечных элементов // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 855–863.
5. *Antipov Y.A.* A delaminated inclusion in the case of adhesion and slippage // J. Appl. Math. Mech. 1996. Iss. 60. P. 665–675.
6. *Fan T.Y.* Continuum constitutive models and analytic solution of crack problems of cellular materials // J. Materials Science and Technology. 2003. Iss. 11. P. 86–105.
7. *Feng Y.D., Wang Y.S., Zhang Z.M., Cui J.Z.* Dynamic interaction of plane waves unilaterally frictionally constrained inclusion // Acta Mechanica Solida Sinica. 2003. Iss. 16. P. 189–196.
8. *Бабешко В.А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН

СССР. 1989. Т. 307, № 2. С. 324–327.

9. *Бабешко В.А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН СССР. 1994. Т. 335, № 1. С. 55–58.
10. *Бабешко В.А.* Динамика сред при наличии совокупности неоднородностей или дефектов и теория вирусов вибропрочности // Изв. Вузов. Сев.-Кавказ. Регион. Естеств. Науки. 1998. № 1. С. 24–26.
11. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 5–9.
12. *Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T.* Problems on the vibration of an elastic half-space containing a system of interior cavities // Doklady Physics. 2002. Vol. 47. Iss. 9. P. 677–679.
13. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393, № 4. С. 1–5.
14. *Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Фатьянов А.Г.* Длиннопериодные сейсмогравитационные процессы в литосфере. М.: ИФЗ РАН, 2020. 228 с.
15. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68, Вып. 3. С. 499–506.
16. *Качко Д.Л., Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Березин Н.С.* К расчету динамических характеристик гексагональных пьезоэлектриков // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2009. № 5. С. 30–33.
17. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
18. *Колесников М.Н., Павлова А.В.* Дифференциальный метод факторизации в исследовании динамики упругих сред с совокупностью дефектов // Экологический вестник Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 4. С. 36–44.
19. *Борисов Д.В., Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Решение динамической задачи для трехслойной среды с включениями // Экологический вестник Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 2. С. 8–13.
20. *Бабешко В.А.* Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач // ДАН СССР. 1978. Т. 242. Вып. 1. С. 62–65.
21. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
22. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.

## References

1. Aleksandrov, V.M., Smetanin, B.I., Sobol, B.V. *Tonkie koncentratory napryazhenij v uprugih telah* [Thin stress concentrators in elastic bodies]. Nauka, Moscow, 1993. (In Russian)
2. Vatul'yan, A.O., Solov'ev, A.N. Identifikaciya ploskih treshchin v uprugoj srede [Identification of plane cracks in an elastic medium]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2003, no. 1, pp. 23–28. (In Russian)
3. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V. Difrakciya uprugih voln na prostranstvennyh treshchinah proizvol'noj v plane formy [Diffraction of elastic waves on spatial cracks of arbitrary shape]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1996, vol. 60, iss. 2, pp. 282–289. (In Russian)
4. Kit, G.S., Mihas'kiv, V.V., Khaj, O.M. Analiz ustanovivshihsya kolebanij ploskogo absolyutno zhestkogo vklyucheniya v trekhmernom uprugom tele metodom konechnyh elementov [Analysis of steady vibrations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the finite element method]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2002, vol. 66, iss. 5, pp. 855–863. (In Russian)
5. Antipov, Y.A. A delaminated inclusion in the case of adhesion and slippage. *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, pp. 665–675.
6. Fan, T.Y. Continuum constitutive models and analytic solution of crack problems of cellular materials. *J. Materials Science and Technology*, 2003, vol. 11, pp. 86–105.
7. Feng, Y.D., Wang, Y.S., Zhang, Z.M., Cui, J.Z. Dynamic interaction of plane waves unilaterally frictionally constrained inclusion. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, vol. 16. pp. 189–196.
8. Babeshko, V.A. K probleme dinamicheskogo razrusheniya treshchinovatyh sloistyh tel [On the problem of dynamic fracture of fractured layered bodies]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of AS USSR], 1989, vol. 307, no. 2, pp. 324–327. (In Russian)
9. Babeshko, V.A. K raschetu parametrov vysokochastotnogo rezonansa v trekhmernom sluchae [Calculation of the parameters of high-frequency resonance in the three-dimensional case]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of AS USSR], 1994, vol. 335, no. 1, pp. 55–58. (In Russian)
10. Babeshko, V.A. Dinamika sred pri nalichii sovokupnosti neodnorodnostej ili defektov i teoriya virusov vibroprochnosti [Dynamics of media

in the presence of a set of inhomogeneities or defects and the theory of vibration strength viruses]. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy Region. Estestvennye Nauki* [Bulletin of Universities. North Caucasus Region. Natural Science], 1998, no. 1, pp. 24–26. (In Russian)

11. Babeshko, V.A. Sredy s neodnorodnostyami (sluchaj sovokupnostej vklyuchenij i treshchin) [Media with inhomogeneities (the case of aggregates of inclusions and cracks)]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of RAS. Mechanics of Solids], 2000, no. 3, pp. 5–9. (In Russian)
12. Babeshko, V.A., Pavlova, A.V., Ratner, S.V., Williams, R.T. Problems on the vibration of an elastic half-space containing a system of interior cavities. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no. 9, pp. 677–679.
13. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M. Metod faktorizacii v teorii virusov vibroprochnosti [The factorization method in the theory of vibration strength viruses]. *Doklady RAN* [Rep. of RAS], 2003, vol. 393, no. 4, pp. 1–5. (In Russian)
14. Sobisevich, L.E., Sobisevich, A.L., Fat'yanov, A.G. *Dlinnoperiodnye sejsmogravitacionnye processy v litosfere* [Long-period seismic-gravity processes in the lithosphere]. IFZ RAN, Moscow, 2020. (In Russian)
15. Pryahina, O.D., Smirnova, A.V. Effektivnyj metod resheniya dinamicheskih zadach dlya sloistyh sred s razryvnymi granichnymi usloviyami [An effective method for solving dynamic problems for layered media with discontinuous boundary conditions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2004, vol. 68, iss. 3, pp. 499–506. (In Russian)
16. Kachko, D.L., Pryahina, O.D., Smirnova, A.V., Berezin, N.S. K raschetu dinamicheskih harakteristik geksagonal'nyh p'ezoelektrikov [Calculation of the dynamic characteristics of hexagonal piezoelectrics]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [Bulletin of Universities. North Caucasus Region. Natural Science], 2009, no. 5, pp. 30–33. (In Russian)
17. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskih oblastej* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Nauka, Moscow, 1979. (In Russian)
18. Kolesnikov, M.N., Pavlova A.V. Differencial'nyj metod faktorizacii v issledovanii dinamiki uprugih sred s sovokupnost'yu defektov [Differential method of factorization in the study of the dynamics of elastic media with a set of defects]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2011, no. 4, pp. 36–44. (In Russian)
19. Borisov, D.V., Pryahina, O.D., Smirnova, A.V. Reshenie dinamicheskoj zadachi dlya trekhslojnoj sredy s vklyucheniyami [Solution of a dynamic problem for a three-layer medium with inclusions]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2004, no. 2, pp. 8–13. (In Russian)
20. Babeshko, V.A. Novyj metod v teorii prostranstvennyh dinamicheskih smeshannyh zadach [A new method in the theory of spatial dynamic mixed problems]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of AS USSR], 1978, vol. 242, iss. 1, pp. 62–65. (In Russian)
21. Babeshko, V.A. *Obobshchennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskih smeshannyh zadachah teorii uprugosti* [Generalized method of factorization in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)
22. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryahina, O.D. *Dinamika massivnyh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemyh sredah* [Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media.]. Nauchnyj mir, Moscow, 1999. (In Russian)



Статья поступила 14 июня 2021 г.