

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-18-2-40-47

## МЕТОД РАСЧЕТА ФУНКЦИИ ГРИНА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Сыромятников П. В., Кириллова Е. В.

A METHOD FOR CALCULATING THE GREEN'S FUNCTION OF SPATIAL DYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE ANISOTROPIC ELASTICITY THEORY TAKING INTO ACCOUNT ASYMPTOTIC COMPONENTS

P. V. Syromyatnikov<sup>1,2</sup>, E. V. Kirillova<sup>3</sup><sup>1</sup> Federal Research Center Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia<sup>2</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia<sup>3</sup> RheinMain University of Applied Sciences in Wiesbaden, Wiesbaden, 65197, Germany  
e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru

*Abstract.* The paper proposes a theoretically accurate method for taking into account the asymptotic components of the two-dimensional Fourier integral representing the Green's functions for spatial dynamic boundary value problems of the anisotropic theory of elasticity. The body is a multilayer stack of layers or a multilayer half-space and is excited by a surface harmonic stress source. The expressions for the contribution of the asymptotics include the Fourier series, the coefficients of which contain easily computable integrals from the Bessel functions. Asymptotic expressions for the integrals from the Bessel functions for large values of the parameters are given. Numerical examples are given for a lithium niobate crystal. It is shown that the asymptotics of the symbols of the Green's functions in the anisotropic case can contain real and imaginary components simultaneously, which distinguishes them from the isotropic case. Moreover, the resulting solution is always real. The number of operations for calculating the contribution of asymptotics is several orders of magnitude less than the number of operations for calculating the wave part of the integral. The developed formulas make the direct contour integration method logically complete, theoretically accurate and relatively simple to implement.

*Keywords:* anisotropy, Green's functions, direct contour integration, Fourier integral, asymptotics.

## Введение

При расчете волновых полей методом прямого контурного интегрирования [1, 2] в однородных или многослойных анизотропных полуграниченных средах типа пакета слоев или многослойного полупространства, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником напряжений, до сих пор учитывалась только конечная область интегрирования в плоскости волновых чисел [1, 2]. Конечная область интегрирования представляет собой круг достаточно большого радиуса, центр которого совпадает с началом координат. Оставшаяся бесконечная часть —

внешность круга — отбрасывалась, поскольку прямые расчеты в ней затруднены растущими погрешностями вычисления символа Фурье матрицы-функции Грина. Известна оценка [2], показывающая, что для изотропной среды вклад интегралов по отброшенной бесконечной области в дальней от источника зоне быстро убывает по сравнению с вкладом интегралов по конечной области. В тоже время из нее же следует, что в ближней зоне вклад отброшенных интегралов может быть неограниченно большим. Это свойство кажется вполне очевидным следствием из известных свойств функций Грина краевых задач

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики краснодарского отделения Южного научного центра РАН, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru.

Кириллова Евгения Вадимовна, канд. физ.-мат. наук, профессор Университета прикладных наук Рейн Майн в г. Висбаден; e-mail: kirillova@web.de.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2021 г. (№ г.р. 01201354241).

теории упругости, имеющих особенности в нуле. В данной работе на основе асимптотических представлений символов Фурье матриц-функций Грина для анизотропных сред удалось получить в аналитическом виде точные значения вклада интегралов по бесконечной области в ближней зоне и асимптотические — в дальней от источника зоне. В работе [3] описан теоретически точный способ определения асимптотик символа матрицы-функции Грина при больших волновых числах, однако он достаточно трудоемок в реализации. В модельных расчетах в предлагаемой работе асимптотики определялись простым в численной реализации способом, дающим относительную погрешность менее одной десятой доли процента. Данная погрешность не принципиальна и вносит в конечный результат относительную ошибку того же порядка. Разработанный подход учета асимптотик делает метод прямого контурного интегрирования теоретически точным, логически завершенным и относительно простым в реализации. Метод применим как для инженерных расчетов, так и для научных исследований.

### 1. Постановка задачи и основные соотношения

Приведем типичные постановки краевых задач, и продемонстрируем разработанный метод. Пусть среда представляет собой однородные слои  $\{-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, z_{n+1} \leq z \leq z_n, z_1 = 0, z_{N+1} > -\infty, z = x_3, n = 1, \dots, N\}$ , где каждый слой имеет материальные константы  $C_{jmik}^{(n)}, \rho^{(n)}$ . В тензорной записи установившиеся гармонические колебания описываются уравнениями движений (общий множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду опущен):

$$\frac{\partial \sigma_{jm}^{(n)}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 u_m^{(n)} = 0, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{jm}^{(n)} = C_{jmik}^{(n)} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_k},$$

$$i, j, m, k = 1, 2, 3,$$

где  $\sigma_{jm}^{(n)}$  — тензор напряжений,  $C_{jmik}^{(n)}$  — тензор упругих постоянных,  $u_i^{(n)}$  — компоненты вектора механических смещений,  $\rho^{(n)}$  — плотность,  $\omega$  — круговая частота,  $t$  — время. Слои идеально сцеплены на уровне интерфейсных плоскостей  $z = z_n$

$$\sigma_{jm}^{(n-1)}(z_n) = \sigma_{jm}^{(n)}(z_n), \quad (1.2)$$

$$u_j^{(n-1)}(z_n) = u_j^{(n)}(z_n),$$

$$n = \overline{2, N}.$$

В основании пакета слоев  $z = z_{N+1}$  выполняются условия либо механически свободной нижней грани

$$\sigma_{j3}^{(N+1)}(z_{N+1}) = 0, \quad (1.3)$$

либо условие жестко фиксированного основания

$$u_j^{(N+1)}(z_{N+1}) = 0. \quad (1.4)$$

В случае пакета слоев, лежащего на полупространстве  $-\infty \leq z \leq z_{N+1}$ , должно выполняться условие убывания

$$u_j^{(N+1)}(x_1, x_2, z) \rightarrow 0,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Гармонические колебания возбуждаются механическими нагрузками, действующими на поверхности  $z = z_1 = 0$ . Вектор нагрузок задается в виде дельта-функций с амплитудами множителями  $q_j$ ,

$$\mathbf{q} = \delta(x_1)\delta(x_2)(q_1, q_2, q_3)^T. \quad (1.6)$$

Граничные условия на поверхности имеют вид

$$\sigma_{j3}^{(n)}(x_1, x_2, z_1) = q_j \delta(x_1)\delta(x_2). \quad (1.7)$$

Решениями краевых задач (1.1)–(1.7) с  $q_j = 1$  являются матрицы-функции Грина  $k_{ij}^{(n)}(x_1, x_2, x_3)$ , столбцы которых описывают векторы смещений в слое с номером  $n = \overline{1, N}$ . Номер  $j$  столбца  $k_{ij}^{(n)}$  соответствует компоненте  $q_j \delta(x_1)\delta(x_2)$  вектора нагрузок (1.6).

В приведенной постановке задачи матрица  $k_{ij}^{(n)}$  представляет собой матрицу-функцию Грина для пакета анизотропных слоев или многослойного полупространства, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником колебаний.

Рассмотрим символ Фурье  $K_{ij}^{(n)}$  матрицы Грина  $k_{ij}^{(n)}$  в форме

$$K_{ij}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = F_{x_1 x_2} [k_{ij}^{(n)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) \times e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad (1.8)$$

тогда  $k_{jm}^{(n)}$  можно представить в виде интеграла

$$k_{jm}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{jm}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.9)$$

Здесь  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — контуры интегрирования, частично отклоняющиеся от вещественных осей при обходе особенностей  $K_{jm}^{(n)}$  в соответствии с принципом предельного поглощения [4].

В случае произвольных нагрузок  $\mathbf{q}(x_1, x_2)$ , заданных в области  $\Omega$ ,

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{q}(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \mathbf{0}, & (x_1, x_2) \notin \Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

решения краевых задач (1.1)–(1.10) можно представить в виде интегралов свертки и обратного преобразования Фурье

$$u_j^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \iint_{\Omega} k_{jm}^{(n)}(x_1 - \eta, x_2 - \zeta, x_3) \times q_m(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (1.11)$$

$$u_j^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{jm}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \times Q_m(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.12)$$

Алгоритмы построения символа Фурье матрицы Грина  $K_{jm}^{(n)}$  для задач (1.1)–(1.7) подробно описаны в работах [1–4] и здесь не повторяются.

## 2. Метод прямого контурного интегрирования

Интегралы вида (1.9), (1.11), (1.12) имеют важное теоретическое и практическое значение во многих областях науки и техники: сейсмологии, акустоэлектронике, теории неразрушающего контроля, теории волновых процессов в анизотропных композитных материалах и т.д. [3–6]. В вычислительном отношении более удобным оказывается интегральное представление (1.12). Как правило, для расчетов интеграла (1.12) в ближней зоне используется теория вычетов, в дальней зоне — метод стационарной фазы.

Указанные методы в пространственном случае достаточно громоздки [1, 2], кроме того, невозможность учета бесконечного числа комплексных полюсов приводит к погрешностям в непосредственной близости к источнику. В качестве альтернативы был предложен метод прямого контурного интегрирования [1, 2]. Суть метода состоит в введении малой комплексной составляющей частоты

$$\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \ll \omega, \quad (2.1)$$

при этом вещественные полюса и точки ветвления смещаются в соответствии с принципом предельного поглощения в комплексную плоскость [4], что позволяет производить интегрирование по вещественным осям без отклонений в комплексные плоскости.

Введем две системы полярных координат

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \phi = \arctg(x_2/x_1), \quad (2.2)$$

$$x_1 = r \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \phi,$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \gamma = \arctg(\alpha_2/\alpha_1),$$

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma,$$

$$0 \leq \phi, \quad \gamma \leq 2\pi,$$

и для случая дельта-функций, когда  $Q_m = 1$ , интеграл (1.9) запишем в виде

$$k_{jm}^{(n)}(r, \phi, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} K_{jm}^{(n)}(\alpha, \gamma, x_3) \times \alpha e^{-ir\alpha \cos(\gamma - \phi)} d\gamma d\alpha = I_R^{(n)} + I_\infty^{(n)}, \quad (2.3)$$

где

$$I_R^{(n)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} K_{jm}^{(n)} \alpha e^{-i r \alpha \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha, \quad (2.4)$$

$$I_\infty^{(n)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} K_{jm}^{(n)} \alpha e^{-i r \alpha \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha, \quad (2.5)$$

$R \gg \alpha_{\max}(\omega)$ ,  $\alpha_{\max}(\omega)$  — наибольший для данной частоты  $\omega$  полюс.

Интеграл  $I_R$  представляет собой «волновую» часть интеграла (2.3), которая, в основном, и исследовалась с помощью метода прямого контурного интегрирования в предшествующих работах авторов [1, 2], интеграл  $I_\infty^{(n)}$  не учитывался.

### 3. Учет асимптотик в методе прямого контурного интегрирования

Далее ограничимся важным частным случаем поверхностных возмущений, когда  $x_3 = 0$ . Известно [3], что

$$K_{ij}^{(1)}(\alpha, \gamma, 0) \alpha \sim C_{ij}(\gamma), \quad \alpha \geq R. \quad (3.1)$$

Функции  $C_{ij}(\gamma)$  представляют собой гладкие периодические и, в общем случае, комплекснозначные функции. Они не зависят от частоты и определяются только механическими свойствами верхнего слоя. Для получения  $C_{ij}(\gamma)$  достаточно рассмотреть либо однородный слой, либо полупространство. С помощью выражения (3.1) значения  $C_{ij}(\gamma)$  можно получить с относительной погрешностью менее 0,1 %. Более сложный метод точного определения функций  $C_{ij}(\gamma)$  описан в [3]. Далее для упрощения формул индексы функции  $C_{ij}(\gamma)$  опускаем, имея в виду, что  $C(\gamma)$  соответствует  $K_{ij}^{(1)}$ . Рассмотрим интеграл  $I_\infty^{(1)}|_{x_3=0}$ :

$$\begin{aligned} 4\pi^2 k(r, \phi, R) &= \\ &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} K(\alpha, \gamma) \alpha e^{-i \alpha r \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha = \\ &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} C(\gamma) e^{-i \alpha r \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Разложим  $C(\gamma)$  в ряд Фурье

$$C(\gamma) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\gamma + b_n \sin n\gamma) \quad (3.3)$$

по известным формулам

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C(\gamma) d\gamma,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C(\gamma) \cos n\gamma d\gamma,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C(\gamma) \sin n\gamma d\gamma.$$

Введем функцию  $h_n$  в различных эквивалентных видах

$$\begin{aligned} h_n(rR) &= \int_{rR}^{\infty} J_n(u) du = \\ &= \int_0^{\infty} J_n(u) du - \int_0^{rR} J_n(u) du = \\ &= 1 - \int_0^{rR} J_n(u) du = \\ &= 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{n+2k+1}(rR). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Рассмотрим вклад членов ряда (3.3) в интеграл (3.2). Для  $c_0/2$

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i \alpha r \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha &= \\ &= \frac{c_0}{2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i \alpha r \sin(\gamma-\phi+\pi/2)} d\gamma d\alpha = \\ &= \frac{c_0}{2} \int_R^\infty 2\pi J_0(\alpha r) d\alpha = \\ &= \frac{\pi c_0}{r} \int_{rR}^{\infty} J_0(u) du = \frac{2\pi c_0}{r} h_0(rR). \end{aligned}$$

Вклад членов с косинусами имеет вид ( $a_n$  вынесены за скобки)

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \cos n\gamma e^{-i\alpha r \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha &= \\ &= \frac{2\pi e^{in(\phi-\pi/2)}}{2r} \int_{rR}^\infty J_n(u) du + \\ &+ \frac{2\pi e^{-in(\phi-\pi/2)}}{2r} \int_{rR}^\infty J_{-n}(u) du = \\ &= \frac{2\pi}{r} \left( \frac{e^{in(\phi-\pi/2)}/2 + (-1)^n e^{-in(\phi-\pi/2)}/2}{2} \right) \int_{rR}^\infty J_n(u) du = \\ &= \frac{2\pi}{r} \left\{ \begin{array}{ll} \cos n\tau, & n = 2k \\ i \sin n\tau, & n = 2k + 1 \end{array} \right\} h_n(rR), \quad (3.5) \\ \tau &= \phi - \pi/2. \end{aligned}$$

Аналогичные выкладки для синусов приводят к следующим выражениям

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \sin n\gamma e^{-i\alpha r \cos(\gamma-\phi)} d\gamma d\alpha &= \\ &= \frac{2\pi}{r} \left\{ \begin{array}{ll} -i \cos n\tau, & n = 2k \\ \sin n\tau, & n = 2k + 1 \end{array} \right\} h_n(rR). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Суммируя (3.5) и (3.6), получаем

$$\begin{aligned} k(r, \phi, R) &= \frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{c_0}{2} h_0(rR) + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^\infty h_n(rR) F_n(\phi, a_n, b_n) \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

где

$$F_n = \begin{cases} (a_n - ib_n) \cos n\tau, & n = 2k, \\ (ia_n + b_n) \sin n\tau, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Формулы (3.3), (3.4), (3.7) завершают построение вклада асимптотик (3.1) в (2.3). При относительно малых значениях ( $rR$ ) функции  $h_0(rR)$  вычисляются легко. Рассмотрим интеграл

$$h_n(rR) = \int_{rR}^{+\infty} J_n(u) du$$

при больших значениях аргумента ( $rR$ ). Известна асимптотика

$$J_n(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} \cos\left(-\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \\ - \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \sin\left(-\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \quad u \rightarrow +\infty.$$

Найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du &= 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \cos u^2 du = \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} C_1(u) \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

Здесь  $C_1(x)$  — косинус-интеграл Френеля

$$C_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos u^2 du.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du &= 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \sin u^2 du = \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} S_1(u) \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}, \end{aligned}$$

$$S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin u^2 du.$$

Здесь  $S_1(x)$  — синус-интеграл Френеля. Асимптотическое представление функций  $C_1, S_1$  при  $x \rightarrow +\infty$

$$C_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x^2}{\sqrt{2\pi x}} - \frac{\cos x^2}{\sqrt{8\pi x^3}},$$

$$S_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x^2}{\sqrt{2\pi x}} - \frac{\sin x^2}{\sqrt{8\pi x^3}},$$

$$C_1(+\infty) = \frac{1}{2}, \quad S_1(+\infty) = \frac{1}{2}.$$

Теперь найдем

$$\begin{aligned} C_1(x) \Big|_{\sqrt{rR}}^\infty &= -\frac{\sin rR}{\sqrt{2\pi\sqrt{rR}}} + \frac{\cos rR}{\sqrt{8\pi}(rR)^{3/2}}, \\ rR &\rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

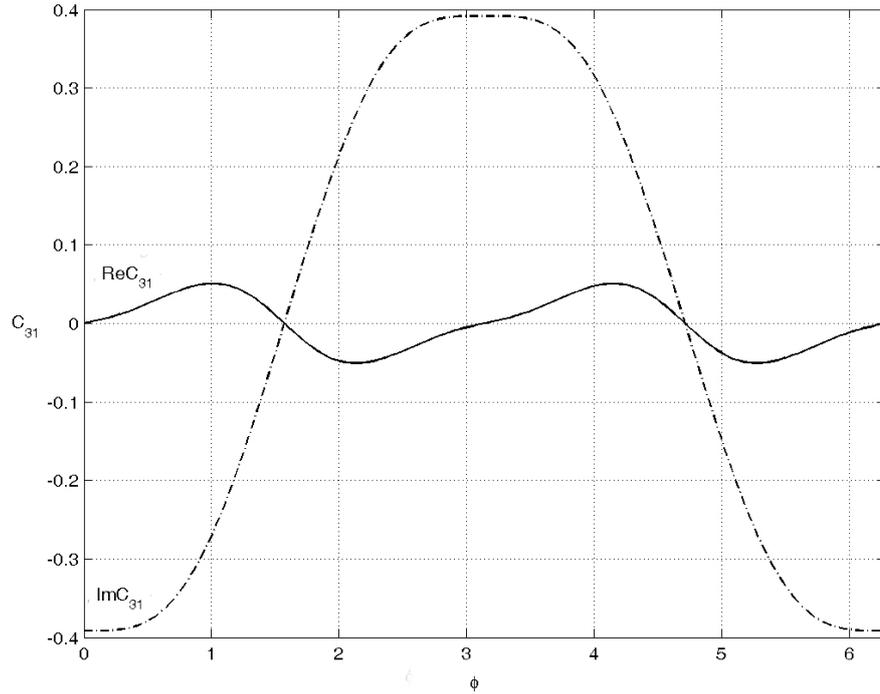


Рис. 1. Вид кривой  $C_{31}(\gamma)$

$$S_1(x)|_{\sqrt{rR}}^{\infty} = \frac{\cos rR}{\sqrt{2\pi}\sqrt{rR}} + \frac{\sin rR}{\sqrt{8\pi}(rR)^{3/2}},$$

$$rR \rightarrow +\infty.$$

Тогда получаем при  $rR \rightarrow +\infty$

$$h_n(rR) \sim$$

$$\sim 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sin rR}{\sqrt{2\pi}\sqrt{rR}} + \\ \frac{\cos rR}{\sqrt{8\pi}(rR)^{3/2}} \end{array} \right\} +$$

$$+ 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos rR}{\sqrt{2\pi}\sqrt{rR}} + \\ \frac{\sin rR}{\sqrt{8\pi}(rR)^{3/2}} \end{array} \right\}. \quad (3.8)$$

Последняя формула дает асимптотическое значение функций  $h_n(rR)$  при больших значениях аргумента, что позволяет производить расчеты для произвольных  $r$  (2.2).

#### 4. Численные результаты

В качестве образца для расчетов использовался кристалл ниобат лития ( $\text{LiNbO}_3$ ), тригональная сингония, класс  $3m$ . Упругие мо-

дули  $S_{11} = 2,03$ ,  $S_{13} = 0,53$ ,  $S_{14} = 0,75$ ,  $S_{33} = 0,09$ ,  $S_{44} = 2,45$ ,  $S_{66} = 0,6$  ( $10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>) [7]. Кристаллофизическая система координат повернута вокруг оси  $OX_1$  на угол  $\pi/2$  относительно кристаллографической системы. Для такой ориентации кристалла построена кривая  $C_{31}$  (рис. 1).

В табл. 1 представлены коэффициенты ряда Фурье, соответствующие кривой  $C_{31}(\gamma)$  ( $\text{Re } a_n = 0, \text{Im } b_n = 0$ ). Для показанного числа членов ряда относительная погрешность аппроксимации  $C_{31}(\gamma)$  рядом Фурье составила  $10^{-5}$ .

Вид поверхности  $k_{31}(x_1, x_2, 0)$  представлен на рис. 2, бесконечные значения в начале координат не отображены.

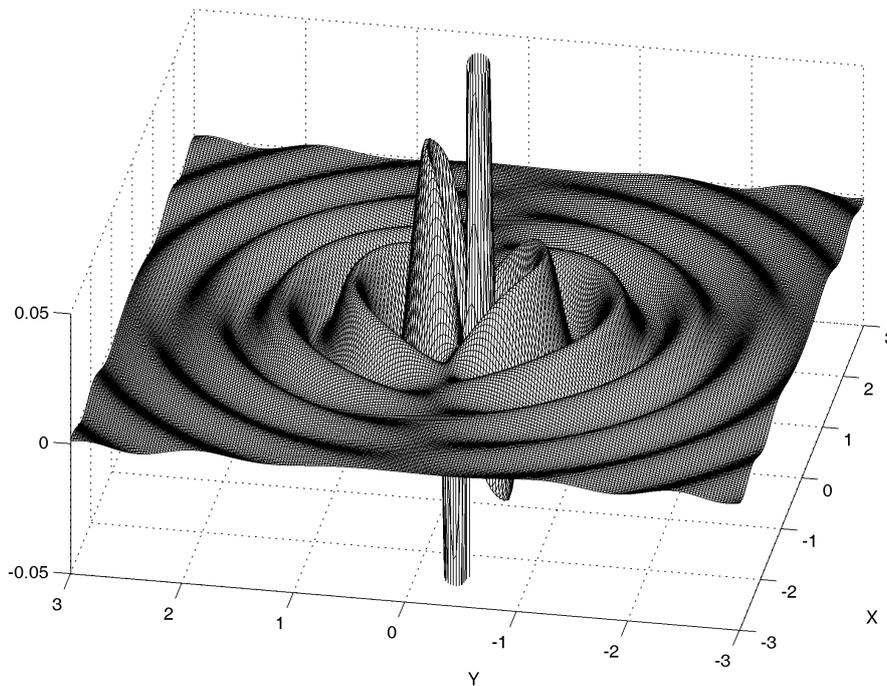
#### Заключение

1. В отличие от изотропного случая функции  $C_{ij}(\gamma)$  могут содержать как вещественную, так и мнимую часть одновременно. Тем не менее, соответствующая величина  $k_{ij}(r, \phi, 0)$  всегда вещественна.

2. Вклад асимптотик в динамический процесс представляет собой величину  $k_{ij}(r, \phi, 0) \cos(\omega t)$ .

Таблица 1. Коэффициенты ряда Фурье (3.3) для  $C_{31}$ 

$n$	$\text{Im } a_n$	$\text{Re } b_n$
0	0	0
1	-0,4315240	0
2	0	0,4442448E-01
3	0,3758565E-01	0
4	0	-0,1388496E-01
5	0,2802039E-02	0
6	0	0,5360949E-03
7	0,1042317E-03	0
8	0	-0,2694084E-03
9	0,1379845E-03	0
10	0	-0,1112514E-04
11	0,7646259E-05	0
12	0	-0,7677487E-05
13	0,4040948E-05	0
14	0	-0,7677487E-05
15	0,4104474E-06	0
16	0	-0,2804331E-06
17	0,1367301E-06	0
18	0	-0,3431501E-07
19	0,1713805E-07	0
20	0	-0,1070862E-07
21	0,5001245E-08	0
22	0	-0,1543038E-08

Рис. 2. Вид поверхности  $k_{31}(x_1, x_2, 0)$

3. Функции  $k_{ij}(r, \phi, 0)$  в случае пространственных задач имеют особенность вида  $r^{-1}$ .

4. Полученные результаты включают в себя изотропный случай, но не переносятся автоматически на плоский случай.

5. Разработанные формулы и алгоритмы делают метод прямого контурного интегрирования логически завершенным, теоретически точным и относительно простым в реализации.

6. Расчеты вклада асимптотик производятся быстро, расчеты волновой части интеграла требуют массивованных вычислений.

### Литература

1. Сыромятников П.В. Динамика сложных многослойных гетерогенных сред // Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук, Краснодар, 2017.
2. Karmazin A., Kirillova E., Syromyatnikov P. et al. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates // *Ultrasonics*. 2013. Vol. 53. Iss. 1. P. 283–293.
3. Ворovich И.И., Бабешко В.А., Прягина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999, 246 с.
4. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. Royer D., Dielesant E. *Elastic waves in solids II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications*. Springer, 2000. 474 p.
6. Кузнецов В.М., Жуков А.П., Шнеерсон М.Б. Введение в сейсмическую анизотропию: теория и практика. М: Технологии сейсморазведки, 2006. 159 с.
7. Акустические кристаллы / Под. ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982, 633 с.

### References

1. Syromyatnikov, P.V. *Dinamika slozhnykh mnogosloynykh geterogennykh sred* [Dynamics of complex multilayer heterogeneous media]. Abstract of the dissertation doct. phys-mat. sciences, Krasnodar, 2017. (In Russian)
2. Karmazin, A., Kirilliva, E. Syromyatnikov, P. et al. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates. *Ultrasonics*, 2013, vol. 53, iss. 1, pp. 283–293.
3. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemyykh sredakh* [Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media]. Nauchniy Mir, Moscow, 1999. (In Russian)
4. Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
5. Royer, D., Dielesant, E. *Elastic waves in solids II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications*. Springer, 2000.
6. Kuznetsov, V.M., Zhukov A.P., Schneerson M.B. *Vvedenie v seysmicheskuyu anizotropiyu: teoriya i praktika* [Introduction to seismic anisotropy: theory and practice]. Tehnologii sejsmorazvedki, Moscow, 2006. (In Russian)
7. Shaskolskaya, M.P. (ed.) *Acoustic crystals*. Nauka, Moscow, 1982. (in Russian)