Математика

УДК 517.968.7

DOI: 10.31429/vestnik-18-3-8-14

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Журавлев И. В., Довбуш А. Н.

Рассматривается первая смешанная задача для уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре. Исследуется путь нахождения решения А. Л. Скубачевским. Предлагается альтернативный метод нахождения решения. Система приводится к неоднородному виду заменой неизвестной функции распределения. Методом последовательных приближений ищется предел последовательности $f_n^\beta(x,p,t)$, по которому строится решение $\varphi(x,t)$ как предел $\varphi_n(x,t)$.

Ключевые слова: метод последовательных приближений, уравнения Власова-Пуассона, интегро-дифференциальные уравнения.

ON SOLUTIONS TO THE VLASOV EQUATIONS

I. V. Zhuravlev, A. N. Dovbush

Kuban State University, Krasnodar, Russia
e-mail: zhiwl@yandex.ru

Abstract. In this study we consider the mixed boundary value problem for the Vlasov–Poisson equations in an infinite cylinder, a problem describing the evolution of the density distribution of ions and electrons in a high temperature plasma under an external magnetic field. We examine the way to find a solution presented by Skubachevskii in his articles. We then present the alternative way consisting in the following. The system is reduced to an inhomogeneous form by replacing the unknown distribution function. After this, the fixed-point iteration method is used twice. First, we find function $f^\beta(x,p,t)$ as the limit for the sequence $f_n^\beta(x,p,t)$, then we use it to construct the solution $\varphi(x,t)$ as the limit for $\varphi_n(x,t)$. The found classical solution for which the supports of the charged-particle density distributions are at a distance from the cylindrical boundary is shown to exist and to be unique in some neighbourhood of the stationary solution.

Keywords: fixed-point iteration, Vlasov-Poisson equations, integro-differential equations.

Введение

Уравнения Власова были впервые выведены в статье [1], в 1938 г. В настоящее время они представляют собой одну из наиболее известных математических моделей кинетической теории газов. В физике по уравнениям Власова написано большое количество трудов.

В математике интерес к данным уравнениям возник сравнительно позже, однако в настоящее время исследованию уравнений Власова посвящена обширная литература. Наше внимание привлекли работы А.Л. Скубачевского [2–5]. В них рассматриваются системы Власова–Пуассона в полупространстве [2, 4] и в бесконечном цилиндре [3, 5].

Предлагается альтернативный способ нахождения решения поставленной в [3] задачи, заключающийся в использовании метода последовательных приближений.

Авторами были получены оценки, с помощью которых оказалось возможным доказать сходимость последовательных приближений к решению интегро-дифференциального уравнения, с помощью которого восстанавливается решение системы Власова–Пуассона.

1. Постановка задачи. Путь нахождения решения А.Л. Скубачевским

Исследуется система уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре, имеющая вид

$$-\Delta\varphi(x,t) = \\ = 4\pi e \int\limits_{R^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f^\beta(x,p,t)\,dp, \quad (1.1)$$

Журавлев Иван Владимирович, специалист, аспирант Кубанского государственного университета; e-mail: zhiwl@yandex.ru.

Довбуш Анна Николаевна, специалист, Кубанский государственный университет; e-mail: anna.dovbush.97@mail.ru.

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \frac{1}{m_\beta}\left(p, \nabla_x f^\beta\right) + \\ = \beta e \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{m_\beta c}\left[p, B\left(x\right)\right], \nabla_p f^\beta\right) = 0, \tag{1.2}$$

$$x \in R^3_+, \quad p \in R^3, \quad 0 < t < T, \quad \beta = \pm 1.$$

Здесь $\varphi\left(x,t\right)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; $f^\beta\left(x,p,t\right)$ — функция распределения плотности положительно заряженных ионов (если $\beta = +1$) и электронов (если $\beta = -1$) в точке x с импульсом p в момент времени t; ∇_x — градиент по пространственным переменным x и ∇_p — градиенты по импульсу p; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; $B(x)$ — заданная вектор-функция, индукция внешнего магнитного поля.

Уравнения рассматриваются при выполнении начальных условий (1.3), где f^β_0 — известные неотрицательные функции, и краевого условия Дирихле

$$f^\beta\left(x,p,t\right)\Big|_{t=0} = f^\beta_0\left(x,p\right), \quad x \in \mathbb{R}^3_+, \tag{1.3}$$

$$p \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1,$$

$$\varphi\left(x,t\right)\big|_{x_1=0} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.4}$$

В монографии Гарабедяна [6] описан метод вывода уравнений характеристик для дифференциальных уравнений первого порядка. При фиксированной функции $\varphi\left(x,t\right)$, используя уравнение (1.2) системы, получим

$$\frac{dX^\beta_\varphi}{d\tau} = \frac{1}{m_\beta} P^\beta_\varphi, \tag{1.5}$$

$$\frac{dP^\beta_\varphi}{d\tau} = -\beta e \nabla_x \varphi\left(X^\beta_\varphi, \tau\right) + \\ + \frac{\beta e}{m_\beta c}\left[P^\beta_\varphi, B(X^\beta_\varphi)\right], \tag{1.6}$$

$$0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1.$$

Причем функции X^β_φ и P^β_φ удовлетворяют начальным условиям (1.7), где x и p соответствуют начальному моменту времени ($\tau = 0$)

$$X^\beta_\varphi\Big|_{\tau=0} = x, \quad P^\beta_\varphi\Big|_{\tau=0} = p, \quad \beta = \pm 1. \tag{1.7}$$

Приведём для сравнения с нашим способом путь нахождения решения, использующийся Скубачевским в [3], основанный на качественной теории дифференциальных уравнений.

Пусть выполняются следующие условия: координатные функции $B_i\left(x\right)$, $i = 1, 2, 3$ дважды непрерывно дифференцируемы,

$$p \in B_\rho = \left\{p \in \mathbb{R}^3 : \, |p| < \rho\right\},$$

а также $B\left(x\right) = \left(0{,}0, h\right)$ для $\frac{\delta}{4} \leqslant x_1 \leqslant \delta$, $h = \text{const} > 0$ и $\frac{16c\rho}{|e|\delta} < h$.

Лемма. Для всех

$$\varphi \in C\left(\left[0, T\right], C^2\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+\right)\right)$$

таких, что $\|\varphi\|_{1,T} \leqslant R_1$, непродолжаемое решение

$$\left(X^\beta_\varphi(x,p,\tau), P^\beta_\varphi(x,p,\tau)\right)$$

задачи (1.5)–(1.7) имеет место следующее свойство. Если $x \in \mathbb{R}^3_{7\delta/8}$ и $p \in B_\rho$, то $X^\beta_\varphi(xp\tau) \in \mathbb{R}^3_{5\delta/8}$, $P^\beta_\varphi(xp\tau) \in B_{2\rho}$ для всех $\tau \in [0, T)$.

Рассмотрим теперь систему уравнений, соответствующую моменту времени $\tau = t > 0$:

$$\frac{dX^\beta_\varphi}{d\tau} = \frac{1}{m_\beta} P^\beta_\varphi, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{1.8}$$

$$\frac{dP^\beta_\varphi}{d\tau} = -\beta e \nabla_x \varphi\left(X^\beta_\varphi, \tau\right) + \\ + \frac{\beta e}{m_\beta c}\left[P^\beta_\varphi, B\left(X^\beta_\varphi\right)\right], \tag{1.9}$$

$$0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1,$$

$$X^\beta_\varphi\Big|_{\tau=t} = y, \quad P^\beta_\varphi\Big|_{\tau=t} = q, \quad \beta = \pm 1. \tag{1.10}$$

Лемма. Для любых

$$\varphi \in C\left(\left[0, \, T\right], \, C^2\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+\right)\right), \quad \|\varphi\|_{1,T} \leqslant R_1,$$

непродолжаемое решение

$$\left(X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau), P^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)\right), \quad \tau \in (0, t]$$

задачи (1.8)–(1.10) имеет место следующее свойство. Если $y \in \mathbb{R}^3_{5\delta/8}$ и $q \in B_{2\rho}$ и $0 < t \leqslant T$, то $X^\beta_\varphi(yqt\tau) \in \mathbb{R}^3_{3\delta/8}$, $P^\beta_\varphi(yqt\tau) \in B_{3\rho}$ для всех $\tau \in [0, t)$.

Лемма. Для любых

$$\varphi \in C\left([0,T], C^2\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+\right)\right),$$

таких что $\|\varphi\|_{1,T} \leqslant R_1$, и всех $\chi x \in \mathbb{R}^3_\delta \cap B$, $p \in B_\rho$ и $0 < t \leqslant T$ имеем $\chi\left|X^\beta_\varphi\right| < \chi_\beta$, где $\chi\chi_\beta = +\frac{T2\rho}{m_\beta}$.

Для нахождения функции $f^\beta(x,p,t)$ вводится семейство отображений $S^\beta_{\varphi,t}$, непрерывно дифференцируемых по x, p, t

$$\chi S^\beta_{\varphi,t}: \left(\mathbb{R}^3_\delta \cap B\right) \times B_\rho \to \\ \to \left\{(y,q) \in \mathbb{R}^6 \middle| \, y = X^\beta_\varphi(x,p,\tau), \\ q = P^\beta_\varphi(x,p,\tau)\right\},$$

$$S^\beta_{\varphi,t}(x,p) = \left(X^\beta_\varphi(x,p,t), P^\beta_\varphi(x,p,t)\right).$$

Также вводятся обратные отображения $\hat{S}^\beta_{\varphi,t}$, непрерывно дифференцируемым по y, q, t

$$\chi\hat{S}^\beta_{\varphi,t}: \left\{(y,q) \in \mathbb{R}^6 \middle| \, y = X^\beta_\varphi(x,p,\tau), \\ q = P^\beta_\varphi(x,p,\tau)\right\} \to \left(\mathbb{R}^3_\delta \cap B\right) \times B_\rho,$$

$$\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(y,q) = \left(X^\beta_\varphi(y,q,t,0), P^\beta_\varphi(y,q,t,0)\right).$$

Предположим теперь, что $f^\beta_0 \in C^2(\mathbb{R}^6)$, и пусть $\chi\,\mathrm{supp}\, f^\beta_0 \subset \left(\mathbb{R}^3_\delta \cap B\right) \times B_\rho$. Введём обозначение

$$D^\beta_{\varphi,t} = \left\{(x,p) \in \mathbb{R}^6 \middle| \, (x,p) = S^\beta_{\varphi,t}(y,q), \\ (y,q) \in \mathrm{supp}\, f^\beta_0\right\}$$

и определим функцию $f^\beta_\varphi(xpt)$ по формуле (1.11)

$$f^\beta_\varphi(xpt) = \begin{cases} f^\beta_0\left(\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(x,p)\right) \\ \qquad \text{для } (x,p) \in D^\beta_{\varphi,t}, \\ 0 \text{ для } (x,p) \in \\ \quad \in \left(\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3\right) \setminus D^\beta_{\varphi,t}; \end{cases} \tag{1.11}$$

$$t \in [0,T].$$

Используя метод характеристик и непрерывную дифференцируемость функций $\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(x,p)$ по x, p, t, можно убедиться, что при наличии заданной функции $\varphi \in C\left([0,\, T], C^2\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+\right)\right)$, $\|\varphi\|_{1,T} \leqslant R_1$ существует единственное решение задачи (1.2)–(1.3) в $C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+ \times \mathbb{R}^3 \times [0,T]\right)$. Этим решением и является функция $f^\beta_\varphi(xpt)$.

Для формулировки теоремы о существовании единственности решения системы (1.1)–(1.2) Скубачевским используются также следующие обозначения и леммы:

$$F_\varphi(x,t) = \int\limits_R^3 \sum_{\beta=\pm 1} \beta f^\beta(x,p,t)\,dp,$$

$$x \in \bar{\mathbb{R}}^3_+, \quad t \in [0,T],$$

$$m_k = \left\|f^\beta_0\right\|_k,$$

$$M_s = \left\{\varphi \in C\left([0,T], C^s\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+\right)\right) : \|\varphi\|_{s,T} \leqslant R\right\}.$$

Лемма. Для любого $\varphi \in M_2$ справедлива оценка $\|F_\varphi\|_{\sigma,T} \leqslant c_1 m_1$, где $c_1 > 0$ не зависит от φ.

Лемма. Для любых φ_1, $\varphi_2 \in M_2$ справедлива оценка

$$\|F_{\varphi_1} - F_{\varphi_2}\|_{\sigma,T} \leqslant c_2 m_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T},$$

где $c_2 > 0$ не зависит от $\varphi_1\varphi_2$.

Лемма. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, такая что $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3_+$. Для любой функции $F \in C^\sigma\left(\bar{\mathbb{R}}^3_+\right)$, $\mathrm{supp}\, F \subset \bar{\Omega}$, существует, и при том единственное решение $u \in C^{2+\sigma}\left(\mathbb{R}^3_+\right)$, $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ задачи (1.12)–(1.13) и для него $\|u\|_{2+\sigma} \leqslant c_5 \|F\|_\sigma$, где $c_5 > 0$ не зависит от F

$$-\Delta u(x) = F(x), \tag{1.12}$$

$$u(x)|_{x_1=0} = 0. \tag{1.13}$$

Таким образом в [3] помощью теории дифференциальных уравнений доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. Для любого $T > 0$ и всех $f^\beta_0 \in C^2\left(\mathbb{R}^6\right)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left\|f^\beta_0\right\|_2 < \min\left\{\frac{R}{4\pi|e|c_5c_1}, \frac{1}{4\pi|e|c_5c_2}\right\},$$

$$\beta = \pm 1,$$

существует единственное классическое решение φ, f^β задачи (1.1)–(1.4), с $\chi\Omega = B_{-1} \cap \mathbb{R}^3_{5\delta/8}$, при этом $\chi\,\mathrm{supp}\, f^\beta(\cdot,\cdot,t) \subset \mathbb{R}^3_{5\delta/8} \cap B_\beta \times B_{2\rho}$ для всех $t \in [0,T]$.

2. Приведение системы Власова–Пуассона к неоднородному виду. Решение методом последовательных приближений

В первой части кратко показан для сравнения имеющийся способ доказательства теоремы 1.1. Представим теперь предлагаемый авторами путь нахождения решения.

В начале приведём систему (1.1)–(1.2) к неоднородному виду. Для этого введём функцию $f^{*\beta}(x,p,t)$, равную $f^{\beta}(x,p,t)+t$. Тогда частная производная по времени равна

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t}=\frac{\partial f^{*\beta}}{\partial t}-1.$$

Обращая оператор Лапласа в уравнении (1.1) при такой замене функции, уравнение (1.2) примет вид (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{dP^{\beta}_{f}}{d\tau}&=\\&=\beta e^2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{X^{\beta}_{f}-y}{\left|X^{\beta}_{f}-y\right|^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta f^{\beta}(y,p,t)\,dpdy+\\&\qquad+\frac{\beta e}{m_\beta c}\left[P^{\beta}_{f},B\left(X^{\beta}_{f}\right)\right].\end{aligned}\tag{2.1}$$

Используя (1.5)–(1.7), получим систему уравнений характеристик

$$\frac{dX^{\beta}_{f^*}}{d\tau}=\frac{1}{m_\beta}P^{\beta}_{f^*},$$

$$\begin{gathered}\frac{dP^{\beta}_{f^*}}{d\tau}=\beta e^2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{X^{\beta}_{f^*}-y}{\left|X^{\beta}_{f^*}-y\right|^3}\times\\\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f^{*\beta}(y,p,t)-\tau\right)dpdy+\\+\frac{\beta e}{m_\beta c}\left[P^{\beta}_{f^*},B\left(X^{\beta}_{f^*}\right)\right],\end{gathered}$$

$$\frac{df^{*\beta}}{d\tau}=1,$$

$$f^{*\beta}(\tau)=f^{*\beta}\left(X^{\beta}_{f^*}(\tau),P^{\beta}_{f^*}(\tau),\tau\right),\tag{2.2}$$

$$0<\tau<T,\quad \beta=\pm1,$$

$$X^{\beta}_{f^*}\Big|_{\tau=0}=x,\quad P^{\beta}_{f^*}\Big|_{\tau=0}=p,$$

$$f^{*\beta}\Big|_{\tau=0}=f^{\beta}_0(x,p).$$

Функции $X^{\beta}_{f^*}=X^{\beta}_{f^*}(\tau)$, $P^{\beta}_{f^*}=P^{\beta}_{f^*}(\tau)$, $f^{*\beta}=f^{*\beta}(\tau)$ определяют семимерные кривые, проходящие при $\tau=0$ через точки семимерной поверхности $\left\{(x,p,y)|\,x\in\mathbb{R}^3_+,\ p\in\mathbb{R}^3,\ y=f^{\beta}_0(x,p)\right\}$. Задача состоит в том, чтобы составить из них поверхность $f^{*\beta}=f^{*\beta}(x,p,t)$. Из (2.2) следует

$$f^{*\beta}(x(t),p(t),t)=f^{\beta}_0(x(t),p(t))+t.$$

2.1. О сходимости последовательности $f^{\beta}_n(x,p,t)$.

Пусть $f^{*\beta}_n(x,p,t)$ — заданная функция. Построим итерации для определения $f^{*\beta}_{n+1}$

$$\frac{dX^{\beta}_{f^*_n}}{d\tau}=\frac{1}{m_\beta}P^{\beta}_{f^*_n},\tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{dP^{\beta}_{f^*_n}}{d\tau}=\beta e^2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{X^{\beta}_{f^*_n}-y}{\left|X^{\beta}_{f^*_n}-y\right|^3}\times\\\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f^{*\beta}_n(y,p,t)-\tau\right)dpdy+\\+\frac{\beta e}{m_\beta c}\left[P^{\beta}_{f^*_n},B\left(X^{\beta}_{f^*_n}\right)\right],\end{gathered}\tag{2.4}$$

$$X^{\beta}_{f^*_n}\Big|_{\tau=t}=y,\quad P^{\beta}_{f^*_n}\Big|_{\tau=t}=q.\tag{2.5}$$

Обозначим через

$$\left\{X^{\beta}_{f^*_n}(y,q,t,\tau),P^{\beta}_{f^*_n}(y,q,t,\tau)\right\}$$

решение системы уравнений (2.3)–(2.4). Тогда $f^{*\beta}_{n+1}(y,q,t)$ определяется в виде (2.6)

$$\begin{aligned}&f^{*\beta}_{n+1}(y,q,t):=\\&\quad:=f^{\beta}_0\left(X^{\beta}_{f^*_n}(y,q,t,0),P^{\beta}_{f^*_n}(y,q,t,0)\right)+t.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Рассмотрим разность $f^{*\beta}_{n+2}(y,q,t)-f^{*\beta}_{n+1}(yqt)$,

$$f^{*\beta}_{n+2}(y,q,t)-f^{*\beta}_{n+1}(y,q,t)=$$
$$=\left\{f^{\beta}_{0}\left(X^{\beta}_{f^*_{n+1}}(y,q,t,0),P^{\beta}_{f^*_{n+1}}(y,q,t,0)\right)+t\right\}-$$
$$-\left\{f^{\beta}_{0}\left(X^{\beta}_{f^*_{n}}(y,q,t,0),P^{\beta}_{f^*_{n}}(y,q,t,0)\right)+t\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\partial f^{\beta}_{0}(x,p)}{\partial p}\left\{P^{\beta}_{f^*_{n+1}}(y,q,t,0)-P^{\beta}_{f^*_{n}}(y,q,t,0)\right\}+$$
$$+\frac{\partial f^{\beta}_{0}(x,p)}{\partial x}\left\{X^{\beta}_{f^*_{n+1}}(y,q,t,0)-X^{\beta}_{f^*_{n}}(y,q,t,0)\right\}.$$

Подставим (2.6) в систему (2.3)–(2.4) с начальными условиями (2.5) и найдём разность полученных уравнений с уравнениями (2.3) и (2.4) соответственно. Затем проинтегрируем полученные равенства по τ от s до t, получив тем самым

$$X^{\beta}_{f^*_{n+1}}(s)-X^{\beta}_{f^*_{n}}(s)=$$
$$=\frac{1}{m_\beta}\int\limits_s^t\left(P^{\beta}_{f^*_{n+1}}(\tau)-P^{\beta}_{f^*_{n}}(\tau)\right)d\tau, \quad (2.7)$$

$$P^{\beta}_{f^*_{n+1}}(s)-P^{\beta}_{f^*_{n}}(s)=$$
$$=\beta e^2\int\limits_s^t\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\frac{X^{\beta}_{f^*_{n+1}}-y}{\left|X^{\beta}_{f^*_{n+1}}-y\right|^3}\times\right.$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f^{*\beta}_{n+1}(y,p,t)-\tau\right)dpdy-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\frac{X^{\beta}_{f^*_{n}}-y}{\left|X^{\beta}_{f^*_{n}}-y\right|^3}\times$$
$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f^{*\beta}_{n}(y,p,t)-\tau\right)dpdy\right\}d\tau+$$
$$+\frac{\beta e}{m_\beta c}\left\{\int\limits_s^t\left[P^{\beta}_{f^*_{n+1}},B\left(X^{\beta}_{f^*_{n+1}}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\left[P^{\beta}_{f^*_{n}},B\left(X^{\beta}_{f^*_{n}}\right)\right]\right\}d\tau. \quad (2.8)$$

Оценим нормы разностей (2.7) и (2.8), пользуясь равномерной ограниченностью $\left\|B\left(X^{\beta}_{f^*_{n+1}}\right)\right\|$, $\left\|P^{\beta}_{f^*_{n}}\right\|$ и липшицевостью B с показателем $\alpha=1$,

$$\left\|X^{\beta}_{f^*_{n+1}}(s)-X^{\beta}_{f^*_{n}}(s)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{m_\beta}\int\limits_s^t\left\|P^{\beta}_{f^*_{n+1}}(\tau)-P^{\beta}_{f^*_{n}}(\tau)\right\|d\tau, \quad (2.9)$$

$$\left\|P^{\beta}_{f^*_{n+1}}(s)-P^{\beta}_{f^*_{n}}(s)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant c^*\left(\int\limits_s^t\left|f^{*\beta}_{n+1}(y,p,\tau)-f^{*\beta}_{n}(y,p,\tau)\right|d\tau+\right.$$
$$\left.+\int\limits_s^t\left\|X^{\beta}_{f^*_{n+1}}-X^{\beta}_{f^*_{n}}\right\|d\tau\right). \quad (2.10)$$

Используя (2.9), (2.10) и лемму Гронуолла–Беллмана, оценим модуль разности $f^{*\beta}_{n+2}(x,p,t)-f^{*\beta}_{n+1}(x,p,t)$. При достаточно малых t можно получить

$$\left|f^{*\beta}_{n+2}(x,p,t)-f^{*\beta}_{n+1}(x,p,t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\tilde c\left|f^{*\beta}_{n+1}(x,p,t)-f^{*\beta}_{n}(x,p,t)\right|.$$

Если $\tilde c<1$ (чего можно добиться засчёт малости t), тогда числовой ряд S_N, составленный их модулей разностей $\left|f^{*\beta}_{n+1}(x,p,t)-f^{*\beta}_{n}(x,p,t)\right|$, является сходящимся

$$S_N\leqslant\sum_{n=0}^{N}\tilde c^n\left|f^{*\beta}_{1}(x,p,t)-f^{*\beta}_{0}(x,p,t)\right|=$$
$$=\frac{\left|f^{*\beta}_{1}(x,p,t)-f^{*\beta}_{0}(x,p,t)\right|}{1-\tilde c}.$$

Рассмотрим последовательность функций $\left\{f^{*\beta}_{n}(y,p,t)\right\}$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|f^{*\beta}_{n+p}(x,p,t)-f^{*\beta}_{n}(x,p,t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=n}^{n+p}\tilde c^k\left|f^{*\beta}_{1}(x,p,t)-f^{*\beta}_{0}(x,p,t)\right|=0.$$

Значит, функциональная последовательность является фундаментальной. Следовательно,

$f_n^{*\beta}(y,p,t)$, при $n\to\infty$ сходятся к некоторой предельной функции $f^{*\beta}(x,p,t)$. Предельная функция $f^{*\beta}(y,p,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1), так как имеет непрерывные ограниченные производные. Значит, функция $f^{\beta}(x,p,t)=f^{*\beta}(y,p,t)-t$ удовлетворяет уравнению Власова.

2.2. О сходимости последовательности $\varphi_n(x,t)$.

Обозначим

$$\varphi_n(x,t)=e\int\limits_R^3\frac{1}{|x-y|}\times$$

$$\times\int\limits_R^3\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f_n^{*\beta}(y,p,t)-t\right)dpdy.$$

Последовательность функций $\{\varphi_n(x,t)\}$ является фундаментальной

$$|\varphi_{n+p}(x,t)-\varphi_n(x,t)|\leqslant$$

$$\leqslant|e|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\sum_{k=n}^{n+p}\tilde{c}^k\times$$

$$\times\left|f_1^{*\beta}(y,p,t)-f_0^{*\beta}(y,p,t)\right|dpdy=0.$$

Значит, эта последовательность также является сходящейся. Предельная функция $\varphi(x,t)$ соответствует предельной функции $f^{\beta}(x,p,t)$

$$\left|e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f_n^{*\beta}(y,p,t)-t\right)dpdy-\right.$$

$$\left.-e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta\left(f^{*\beta}(y,p,t)-t\right)dpdy\right|\leqslant$$

$$\leqslant|e|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\left|f_n^{*\beta}(y,p,t)-f^{*\beta}(y,p,t)\right|dpdy=0.$$

Таким образом, предельная функция принимает вид (2.11)

$$\varphi(x,t)=e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta f^{\beta}(y,p,t)\,dpdy. \quad (2.11)$$

Для того, чтобы функция $\varphi(x,t)$ была решением системы уравнений Власова–Пуассона, необходима ее дифференцируемость по пространственным переменным дважды, что верно и проверяется прямым дифференцированием и оценкой полученных выражений. Здесь используется тот факт, что интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta f^{\beta}(y,p,t)\,dp$$

ограничен и непрерывен по y по Гёльдеру.

Итак, полученная методом последовательных приближений функция $\varphi(x,t)$, заданная формулой (2.11), является решением уравнения Пуассона [7].

Заключение

В работе выведен и обоснован альтернативный метод нахождения решения задачи, исследующейся в статье [3]. Для сравнения приведены два способа доказательства теоремы 1.1. В первой части работы кратко описывается путь, использующийся самим А.Л. Скубачевским, основанный на качественной теории дифференциальных уравнений: по заданной функции $\varphi_1(x,t)$ находят $f_1^{\beta}(x,p,t)$ по формуле (1.11), затем ищут неизвестную функцию $\varphi_2(x,t)$, такую, что

$$-\Delta\varphi_2(x,t)=4\pi e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta=\pm1}\beta f_1^{\beta}(x,p,t)\,dp$$

и так далее. Во второй части приводится построенный авторами способ: вторая часть системы Власова–Пуассона приводится к неоднородному виду заменой неизвестной функции распределения, а затем методом последовательных приближений находится функция, являющаяся пределом последовательности $f_n^{\beta}(x,p,t)$ и решением интегро-дифференциального уравнения, и уже по ней строится $\varphi(x,t)$, являющаяся пределом $\varphi_n(x,t)$ и определяющая решение системы уравнений Власова–Пуассона.

Авторы выражают благодарность Е.А. Щербакову за предложенную тему и всестороннюю помощь в ходе исследования.

Литература

1. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1938. Т. 8, № 3. С. 444–470.
2. *Скубачевский А.Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова-Пуассона в полупространстве // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 204–232. DOI: 10.1134/S0371968513040146
3. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова-Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи математических наук. 2014. Т. 69, № 2(416). С. 104–148. DOI: 10.4213/rm9579
4. *Скубачевский А.Л., Цузуки Й.* Классические решения уравнений Власова-Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. №3. С. 536–552. DOI: 10.7868/S0044466917030140
5. *Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.* О классических решениях первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре // ДАН. 2019. Т. 484. № 6. С. 663–666. DOI: 10.31857/S0869-56524846663-666
6. *Гарабедян П.Р.* Partial differential equations. Нью-Йорк: John Wiley & Sons, inc, 1967. 696 с.
7. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

References

1. Vlasov A.A. O vibratsionnykh svoystvakh elektronnogo gaza [On the vibrational properties of an electron gas]. *Zhurnal eksperimentalnoy i tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Experimental and Technical Physics], 1938, vol. 8, no. 3, pp. 444–470. (In Russian)
2. Skubachevskii A.L. smeshannye zadachi dlya uravneniy Vlasova-Puassona v poluprostranstve [Initial-boundary value problems for the Vlasov-Poisson equations in a half-space]. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2013, vol. 283, pp. 197–225. (In Russian)
3. Skubachevskii A.L. Uravneniya Vlasova-Puassona dlya dvukhkomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole [Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2014, vol. 69, no. 2, pp. 291–330. (In Russian)
4. Skubachevskii A.L., Tsuzuki Y. Klassicheskie resheniya uravneniy Vlasova-Puassona s vneshnim magnitnym polem v poluprostranstve [Classical solutions of the Vlasov–Poisson equations with external magnetic field in a half-space]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2017, vol.57, no. 3, pp. 541–557. (In Russian)
5. Belyaeva Y.O., Skubachevskii A.L. O klassicheskikh resheniyakh pervoy smeshannoy zadachi dlya sistemy Vlasova-Puassona v beskonechnom tsilindre [On classical solutions to the first mixed problem for the Vlasov–Poisson system in an infinite cylinder]. *Doklady Akademii Nauk* [Doklady Mathematics], vol. 99, no. 1, pp. 87–90. (In Russian)
6. Garabedian P.R. Partial differential equations. New York, John Wiley & Sons, inc., 1967. (In Russian)
7. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskiye differentsialnyye uravnenia s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of the second order]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)

Статья поступила 14 июня 2021 г.

Цитирование: *Журавлев И.В., Довбуш А.Н.* О решениях уравнения Власова // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2021. Т. 18. № 3. С. 8–14. DOI 10.31429/vestnik-18-3-8-14

Citation: Zhuravlev, I.V., Dovbush, A.N. On solutions to the Vlasov equations. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 8–14. (In Russian) DOI 10.31429/vestnik-18-3-8-14