

## МЕХАНИКА

УДК 51.37

DOI: 10.31429/vestnik-18-3-41-45

## ВАРИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

В работе представлена методика вариационной идентификации входных параметров для модели переноса пассивной примеси в результате ассимиляции данных измерений. Усвоение производится за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза, а решение сопряженной задачи используется для построения градиентов функционала в пространстве параметров. Представлены формулы для вычисления таких градиентов в случае идентификации начальных полей концентрации, коэффициентов турбулентной диффузии и мощности источников загрязнения.

*Ключевые слова:* минимизация функционала, сопряженная задача, ассимиляция данных, модель переноса примеси.

## INPUT PARAMETERS VARIATIONAL IDENTIFYING PROCEDURES OF THE PASSIVE IMPURITY TRANSFER MODEL

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, Russia  
e-mail: vskocher@gmail.com

*Abstract.* The paper presents a method for input parameters variational identification of passive impurity transfer model as a result of assimilation of measurement data. The assimilation is carried out by minimizing the quadratic functional of the forecast quality, and the solution of the adjoint problem is used to construct gradients of the functional in the parameter space. Formulas for calculating such gradients in the case of identification of the initial concentration fields, turbulent diffusion coefficients and the power of pollution sources are presented. When solving environmental problems based on the use of numerical dynamic models and models describing the processes of propagation of certain pollutants, the task naturally arises of improving the predicted model fields by identifying the input parameters of the models. One of the ways of such identification is the variational assimilation method based on minimizing the forecast residuals and solving conjugate problems of a special type. The development of such algorithms is an important and urgent task due to the increasing anthropogenic load and the need to create environmental monitoring systems.

*Keywords:* functional minimization, conjugate problem, data assimilation, impurity transfer model.

При решении задач экологической направленности на основе применения численных динамических моделей и моделей, описывающих процессы распространения тех или иных загрязняющих веществ [1, 2], естественным образом встает задача улучшения прогнозируемых модельных полей за счет идентификации входных параметров моделей. Одним из способов такой идентификации является вариационный метод [3–6], основанный на ми-

нимизации невязок прогноза и решении сопряженных задач специального вида. Разработка таких алгоритмов является важной и актуальной задачей в связи с возрастающей антропогенной нагрузкой и необходимостью создания систем мониторинга состояния окружающей среды. В работах [7, 8] рассмотрен вариационный алгоритм идентификации временной по времени мощности источника, основанный на данном подходе. В работах [9, 10]

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник, отдел теории волн, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник, отдел морских информационных систем и технологий, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskocher@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

метод сопряженных уравнений применен для идентификации начальных полей взвешенного вещества. В случае, когда параметр модели подлежащий определению константа, возможно упрощение процедуры на основе метода линеаризации [11].

### 1. Модель переноса

Рассмотрим модель переноса пассивной примеси

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \frac{\partial C}{\partial z} = Q(t), \\ Q(t) = Q_S(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0); \\ z = H : \quad \frac{\partial C}{\partial z} = Q_B(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и начальными данными

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (1.4)$$

где  $t$  — время;  $x_0, y_0$  — координаты точечного источника;  $C$  — концентрация примеси;  $Q(t)$  — точечный источник переменной по времени мощности;  $Q_B$  — мощность источника на дне;  $U, V, W$  — компоненты поля скорости;  $A_H$  и  $K$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно;  $H$  — глубина,  $\mathbf{n}$  — нормаль к боковой границе. Без ограничения общности считаем, что точечный источник расположен на поверхности моря. Аналогично решается задача при задании источника на дне и на боковой границе, но для этого необходимы соответствующие изменения в краевых условиях (1.2), (1.3).

### 2. Вариационный алгоритм идентификации

Пусть имеются данные измерений на конечный момент времени, тогда задача усвоения данных измерений  $C_{\text{изм}}$  состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} [P(RC - C_{\text{изм}}), P(RC - C_{\text{изм}})]_M, \quad (2.1)$$

где  $M$  — область интегрирования модели на интервале времени  $[0, T]$ ,  $P$  — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений,  $R$  — оператор проектирования в точки наблюдений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (2.1) с ограничениями модели (1.1)–(1.3) эквивалентна поиску экстремума следующего функционала

$$\begin{aligned} I = I_0 + \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial WC}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C}{\partial z}, C^* \right]_{M_t} + \\ + \left( \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \\ + \left( \frac{\partial C}{\partial z} - Q_S(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), C^* \right)_{S_t^0} + \\ + \left( \frac{\partial C}{\partial z} - Q_B, C^* \right)_{S_t^H}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $M_t = M \times [0, T]$ ,  $S_t^0 = S^0 \times [0, T]$ ,  $S_t^H = S^H \times [0, T]$ ,  $S^H$  — дно, а  $S^0$  — поверхность моря.

Записывая вариацию функционала (2.2) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и уравнения неразрывности, получим

$$\begin{aligned} \delta I = (\delta Q_S(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), C^*)_{S_t^0} + \\ + (C - C_0, C^*)_M + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_B, C^* \right)_{S_t^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $C^*$  — множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \\ - \frac{\partial WC^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial C^*}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \frac{\partial C^*}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad z = 0 : \quad \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \\ \sigma = H : \quad \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$t = T : C^* = -P(RC - C_{изм}). \quad (2.6)$$

Из стационарности функционала и определения его градиента имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{Q_S(t)} I &= C^*(x_0, y_0, 0, t), \\ \nabla_{C_0} I &= C^*(x, y, z, 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае переменной по пространству  $Q_B$  имеем

$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T C^*(x, y, H, t) dt, \quad (2.8)$$

а при  $Q_B = \text{const}$  получаем

$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T \iint_{SH} C^*(x, y, H, t) dx dy dt. \quad (2.9)$$

Аналогичным образом при варьировании  $A_H$  и  $K$  можно получить:

$$\begin{aligned} \nabla_{A_H} I &= \\ &= \int_0^T \iiint_M \left( \frac{\partial C^*}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C^*}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dx dy dz dt, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\nabla_K I = \int_0^T \iiint_M \left( \frac{\partial C^*}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \quad (2.11)$$

Формулы (2.10), (2.11) выписаны для случая постоянных  $A_H$  и  $K$ .

В дальнейшем значение мощности, например, переменного по времени точечного источника ищется итерационно по формуле

$$Q_S^{n+1}(t) = Q_S^n(t) + \tau \nabla_{Q_S(t)} I, \quad (2.12)$$

где  $\tau$  — итерационный параметр, который может выбираться одним из известных способов, например,

$$\tau = \frac{(P(RC - C_{изм}), PR\delta C)_M}{(PR\delta C, PR\delta C)_M}, \quad (2.13)$$

где  $\delta C$  — решение соответствующей задачи в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta C}{\partial t} + \frac{\partial U \delta C}{\partial x} + \frac{\partial V \delta C}{\partial y} + \frac{\partial W \delta C}{\partial z} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial \delta C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial \delta C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial \delta C}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial \delta C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.15)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} z = 0 : \frac{\partial \delta C}{\partial z} &= C^*(x_0, y_0, 0, t), \\ z = H : \frac{\partial \delta C}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

и начальными данными

$$\delta C(x, y, z, 0) = 0. \quad (2.17)$$

В целом процедура идентификации состоит в следующем:

- интегрируется прямая задача (1.1)–(1.4) с некоторым начальным значением  $Q(t)$ ;
- определяются невязки прогноза и строится функционал (2.1);
- решается сопряженная задача (2.4)–(2.6);
- находится градиент (2.7) функционала (2.2);
- решается задача в вариациях (2.14)–(2.17);
- вычисляется итерационный параметр по формуле (2.13);
- итерационно по формуле (2.12) находится мощность источника  $Q(t)$ .

Аналогичные процедуры позволяют идентифицировать и другие входные параметры численного моделирования. Если сопряженная задача имеет вид (2.4)–(2.6), то задача в вариациях зависит от рассматриваемого параметра, подлежащего идентификации.

Отметим некоторые важные особенности рассматриваемого алгоритма. Квадратичный функционал (2.1), подлежащий минимизации, выпуклый. Ограничения, накладываемые моделью (1.1)–(1.4), линейны и не меняют выпуклости функционала качества прогноза. Следовательно, минимум функционала (2.2) единственен и появляется возможность отыскания минимума функционала с определенной точностью, зависящей от сходимости итерационного процесса.

В работе описана методика вариационной идентификации входных параметров для модели переноса пассивной примеси при усвоении данных измерений. При реализации алгоритма усвоение производится за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза, а решение сопряженной за-

дачи используется для построения градиентов функционала в пространстве параметров. Представлены формулы для вычисления таких градиентов в случае идентификации начальных полей концентрации, коэффициентов турбулентной диффузии и мощности источников загрязнения. Показано, что рассматриваемый функционал имеет единственный минимум, что позволяет решать поставленную задачу.

### Литература

1. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море–суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
2. Фомин В.В. Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Научные труды УкрНИГМИ. 2002. Вып. 249. С. 246–255.
3. Marchuk G.I., Penenko V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // Modelling and Optimization of Complex Systems / Ed. G.I. Marchuk. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf. New York: Springer, 1978. pp. 240–252.
4. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 350 с.
5. Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности её решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С. 643–654.
6. Shutyaev V.P. Adjoint equations in variational data assimilation problem // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2018. Т. 33, № 2. P. 137–147. DOI: 10.1515/rnam-2018-0012
7. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2010. Вып. 22. С. 240–244.
8. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Определение переменной по времени мощности точечного источника загрязнения в Азовском море на основе вариационного алгоритма ассимиляции // Процессы в геосредах. 2020. № 1. С. 594–598.
9. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Станичный С.В. Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море //

Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2020. Т. 17. № 2. С. 40–48. DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48

10. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm // Physical Oceanography. 2015. No. 2. P. 69–76.
11. Kochergin S.V., Fomin V.V. Variational Identification of Input Parameters in the Model of Distribution of the Pollutants from the Underwater Source. Physical Oceanography. 2019. Vol. 26. Iss. 6. P. 547–556. DOI: 10.22449/1573-160X-2019-6-547-556

### References

1. Ivanov V.A., Fomin V.V. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh processov v zone more–susha* [Mathematical modeling of dynamic processes in the sea–land zone]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol', 2008. (In Russian)
2. Fomin V.V. *Chislennaya model' cirkulyacii vod Azovskogo morya* [Numerical model of the Azov Sea water circulation]. *Nauchnye trudy UkrNIGMI* [Scientific works of UkrNIGMI], 2002, vol. 249, pp. 246–255. (In Russian)
3. Marchuk G.I., Penenko V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In Marchuk G.I. (ed.) *Modelling and Optimization of Complex Systems. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf.* Springer, New York, 1978, pp. 240–252.
4. Penenko V.V. *Metody chislennogo modelirovaniya atmosferykh processov* [Methods for numerical modeling of atmospheric processes]. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1981. (In Russian)
5. Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. Assimilyaciya dannyh nablyudenij v zadache cirkulyacii Chernogo morya i analiz chuvstvitel'nosti eyo resheniya [Assimilation of observational data in the problem of circulation of the Black Sea and analysis of the sensitivity of its solution]. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana* [Izvestiya RAN. Physics of the atmosphere and ocean], 2013, vol. 49, no. 6, pp. 643–654. (In Russian)
6. Shutyaev V.P. Adjoint equations in variational data assimilation problem. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2018, vol. 33, no. 2, pp. 137–147. DOI: 10.1515/rnam-2018-0012
7. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Ispol'zovanie variacionnykh principov i resheniya sopryazhennoj zadachi pri identifikacii vhodnykh parametrov modeli perenosa passivnoj primesi [The use of variational principles and the solution of the conjugate problem in the identification of the input parameters of the model of the transfer of

- a passive admixture]. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoj zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* [Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources], 2010, vol. 22, pp. 240–244. (In Russian)
8. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Opredelenie peremennoj po vremeni moshchnosti tochechnogo istochnika zagryazneniya v Azovskom more na osnove variacionnogo algoritma assimilyacii [Determination of the time variable of the power of a point source of pollution in the Sea of Azov based on the variational assimilation algorithm]. *Processy v geosredah* [Processes in geoenvironments], 2020, no. 1, pp. 594–598. (In Russian)
  9. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Stanichnyj S.V. Variacionnaya assimilyaciya sputnikovyh dannyh poverhnostnoj koncentracii vzveshennogo veshchestva v Azovskom more [Variational assimilation of satellite data on the surface concentration of suspended matter in the Sea of Azov]. *Sovremennye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa* [Modern problems of remote sensing of the Earth from space]. 2020. vol. 17, no. 2, pp. 40–48. DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48 (In Russian)
  10. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm. *Physical Oceanography*, 2015, no. 2, pp. 69–76.
  11. Kochergin S.V., Fomin, V.V. Variational Identification of Input Parameters in the Model of Distribution of the Pollutants from the Underwater Source. *Physical Oceanography*, 2019, vol. 26, iss. 6, pp. 547–556. DOI: 10.22449/1573-160X-2019-6-547-556

---

© Кочергин В. С., Кочергин С. В., 2021

Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution (CC BY) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Статья поступила 1 августа 2021 г.

*Цитирование:* Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вариационные процедуры идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2021. Т. 18. № 3. С. 41–45. DOI 10.31429/vestnik-18-3-41-45

*Citation:* Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Input parameters variational identifying procedures of the passive impurity transfer model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 41–45. (In Russian) DOI 10.31429/vestnik-18-3-41-45