

## Ф И З И К А

УДК 532.5.013:532.516:538.5:544.6

DOI: 10.31429/vestnik-18-4-33-40

## ЭЛЕКТРОФОРЕЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Франц Е. А., Шелистов В. С., Ганченко Г. С., Горбачева Е. В., Алексеев М. С., Демехин Е. А.

Проведено численное моделирование задачи движения сферической сильнозаряженной диэлектрической микрочастицы в электрическом поле высокой напряженности. Математически задача описывается нелинейной системой Нернста-Планка-Пуассона-Стокса, численное решение которой проводилось в широком диапазоне параметров.

*Ключевые слова:* электрофорез, диэлектрическая частица, система Нернста-Планка-Пуассона-Стокса, сильное электрическое поле, неравновесные процессы.

## ELECTROPHORESIS OF A DIELECTRIC PARTICLE IN STRONG ELECTRIC FIELD

E. A. Frants<sup>1</sup>, V. S. Shelistov<sup>1</sup>, G. S. Ganchenko<sup>1</sup>, E. V. Gorbacheva<sup>2</sup>, M. S. Alekseev<sup>2</sup>, E. A. Demekhin<sup>1</sup><sup>1</sup> Financial University, Krasnodar, 350051, Russia<sup>2</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: edemekhi@gmail.com

*Abstract.* This paper is devoted to the problem of motion of a dielectric microparticle in a strong electric field. For the case of a low electric field strength, a comparison of the electrophoresis rate obtained from the force balance condition with the classical Helmholtz-Smoluchowski formula showed good agreement. Direct numerical simulation of the problem in the full nonsimplified formulation for high electric field strength showed that at the interface between the solid particle and the electrolyte a region of space charge is formed, which was previously discovered for ion-selective microparticles. In an electric field of sufficiently high intensity, a part of the space charge detaches from the surface of the particle, which is swept away by the electrolyte stream. This charge does not disintegrate and is preserved at a distance of several radii from the surface of the microparticle. Thus, there is a violation of the condition of local electroneutrality of the electrolyte solution at a sufficiently large distance from the surface of the microparticle.

*Keywords:* electrophoresis, dielectric particle, Nernst-Planck-Poisson-Stokes system, strong electric field, non-equilibrium processes.

## Введение

В последнее время сильно возрос интерес к задачам электрогидродинамики малых масштабов, что связано с их многочисленны-

ми применениями в микроустройствах [1, 2]. Рабочими жидкостями в таких устройствах являются растворы электролита, приводимые в движение внешним электрическим полем [3]. Особую роль приобретают как асимп-

Франц Елизавета Александровна, младший научный сотрудник лаборатории «Электро- и гидродинамика микро- и наномасштабов» Финансового университета при Правительстве РФ; e-mail: eafrants@fa.ru.

Шелистов Владимир Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории «Электро- и гидродинамика микро- и наномасштабов» Финансового университета при Правительстве РФ; e-mail: VSShelistov@fa.ru.

Ганченко Георгий Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории «Электро- и гидродинамика микро- и наномасштабов» Финансового университета при Правительстве РФ; e-mail: ganchenko.ru@gmail.com.

Горбачева Екатерина Витальевна, преподаватель кафедры «прикладная математика» Кубанского государственного университета; e-mail: mail@mail.ru.

Алексеев Максим Сергеевич, студент факультета компьютерных технологий и прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: mail@mail.ru.

Демехин Евгений Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией «Электро- и гидродинамика микро- и наномасштабов» Финансового университета при Правительстве РФ; e-mail: edemekhi@gmail.com.

Исследование скорости электрофореза диэлектрической частицы выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края, проект № 19-48-235001. Исследование концентрирования ионов и отрыва зоны пространственного заряда около диэлектрической частицы выполнено при финансовой поддержке РНФ, проект № 20-79-00044.

тотические, так и численные методы решения сильно сцепленной нелинейной системы Нернста–Планка–Пуассона–Стокса, описывающие движение электролитов в электрическом поле [4–6].

Электрофорез представляет собой фундаментальную проблему теоретической физики, изучение которой началось более ста лет назад с классической работы Смолуховского [7] для диэлектрических частиц. В работе выведена простая формула для скорости заряженной микрочастицы

$$U = \frac{\varepsilon\zeta}{\mu} E_{\infty},$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрический коэффициент среды,  $\zeta$  — дзета потенциал двойного электрического слоя,  $\mu$  — динамическая вязкость среды и  $E_{\infty}$  — напряженность внешнего электрического поля. Формула Гельмгольца–Смолуховского выведена для случая когда внешняя среда является диэлектриком (заряд учитывается только в двойном электрическом слое) и напряженность внешнего электрического поля невелика. В этом случае скорость микрочастицы линейным образом зависит от напряженности электрического поля и не зависит от размеров частицы. Простота формулы [7] — одна из причин, почему она и до настоящего времени является эталонной для сравнения различных моделей. При небольших напряженностях электрического поля она удовлетворительно описывает скорость движения микрочастиц.

Задача об электрофорезе оказалась востребованной в микрофлюидике в последние двадцать лет в связи с задачами управления заряженными частицами в микрофлюидных устройствах, задачами медицинской диагностики, изучением движения и разделения различных ДНК и белков по их свойствам, в частности, по размерам. При увеличении напряженности электрического поля зависимость скорости от  $E_{\infty}$  отклоняется от линейной. Объяснение этому факту дано в работах Духина и Мишук [8, 9]. Электрофорез при больших напряженностях поля был назван электрофорезом второго рода. В литературе часто указывается на связь процессов второго рода с процессами концентрационной поляризации в мембранах [4, 5]. Укажем, что при больших напряженностях поля наблюдается зависимость скорости частицы от ее радиу-

са. Это позволяет разделять частицы по их размерам.

Теоретическое описание нелинейных эффектов появилось более 100 лет спустя пионерской работы Смолуховского и было вызвано практической важностью задачи. В цикле работ [10–12] были предложены только асимптотические методы для некоторых частных случаев. Численный же анализ ограничен малыми и умеренными напряженностями электрического поля. Среди экспериментальных работ упомянем только наиболее свежую [13], которая содержит ссылки на другие более ранние экспериментальные работы. Подробный обзор как экспериментальных, так и теоретических работ по электрофорезу до 2007 года, а также различных практических приложений электрофореза дан в дипломной работе Шелистова [14]. Основное внимание, как в экспериментальных, так и в теоретических работах, уделено зависимости скорости микрочастицы от напряженности внешнего электрического поля, числа Дебая и плотности заряда на поверхности частицы. Сравнение теории и эксперимента для скорости электрофореза дано только в [13], причем, сравнение ограничено наноразмерами частицы.

Для приложений микрофлюидики, кроме скорости электрофореза, важно знать распределение скорости жидкости, электрического потенциала и концентрации ионов вблизи поверхности частицы, однако экспериментальные методы не позволяют произвести достаточно точные измерения данных величин. Для этих целей идеально подходит прямое численное моделирование, проведенное в данной работе в широком диапазоне параметров, от нано- до микроразмеров частицы.

## 1. Постановка задачи

Почти во всех предыдущих работах [10–12] были предложены только асимптотические методы для некоторых частных случаев. Численный же анализ ограничен малыми и умеренными напряженностями электрического поля и фактически служил для сравнения с асимптотикой и не играл самостоятельной роли. В настоящей работе показано, что при больших напряженностях поля возникают нелинейные эффекты, такие как появление струи повышенной концентрации соли в хвостовой части частицы и т.д., которые невозможно описать, применяя асимптотические методы. Необходим точный численный

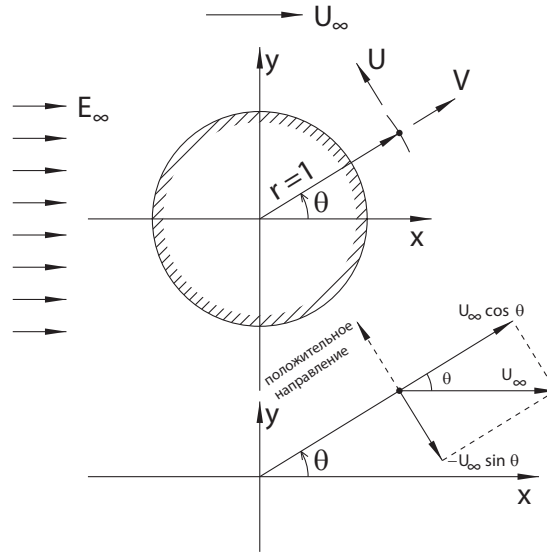


Рис. 1. Схема течения в системе координат микрочастицы. Векторы скорости и напряженности поля на бесконечности ориентированы параллельно оси  $x$ .

анализ задачи, что и представлено в данной работе.

Рассмотрим постановку задачи. Сферическая диэлектрическая микрочастица радиуса  $\tilde{a}$  находится в растворе электролита под действием внешнего электрического поля напряженности  $\tilde{E}_\infty$ .

В качестве буферного электролита рассматривается бинарный одновалентный раствор электролита. Коэффициенты диффузии катионов и анионов предполагаются равными, т.е.  $\tilde{D}^+ = \tilde{D}^- = \tilde{D}$ . Поведение электролита описывается системой уравнений Нернста–Планка, относительно концентраций ионов  $\tilde{c}^\pm$ . Система дополняется уравнениями Пуассона относительно электрического потенциала  $\tilde{\Phi}$  и Навье–Стокса относительно поля скоростей  $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}, \tilde{V})$ . В силу малости масштаба и, как следствие, малости числа Рейнольдса, для описания движения жидкости используется приближение Стокса для ползущего течения. Электрическое поле внутри микрочастицы описывается уравнением Лапласа для потенциала  $\tilde{\varphi}$ . На поверхности частицы предполагается существование поверхностного заряда, плотность которого  $\tilde{\sigma}$  однородна по всей поверхности.

Постановка задачи проводится в сферической системе координат, движущейся со скоростью частицы, в центре которой находится точка отсчета (рис. 1).

Для перехода к безразмерной постановке были использованы следующие характерные

величины: радиус микрочастицы  $\tilde{a}$ , термический потенциал  $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$ , равновесная концентрация электролита  $\tilde{c}_\infty$ , динамическая вязкость жидкости  $\tilde{\mu}$  и коэффициент диффузии ионов  $\tilde{D}$ . Здесь  $\tilde{R}$  — универсальная газовая постоянная,  $\tilde{T}$  — абсолютная температура,  $\tilde{F}$  — постоянная Фарадея.

Система описывается следующими безразмерными параметрами: напряженность электрического поля  $\tilde{E}_\infty = \tilde{a}\tilde{E}_\infty/\tilde{\Phi}_0$ ; число Дебая  $\nu = \tilde{\lambda}_D/\tilde{a}$ , где  $\tilde{\lambda}_D^2 = \tilde{\varepsilon}\tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}^2\tilde{c}_\infty$  — толщина двойного электрического слоя; коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатическими частями задачи  $\varkappa = \tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0/\tilde{\mu}\tilde{D}$ ; отношение диэлектрических проницаемостей  $\delta = \tilde{\varepsilon}_d/\tilde{\varepsilon}$ , где  $\tilde{\varepsilon}_d$  и  $\tilde{\varepsilon}$  — соответственно, диэлектрические проницаемости материала микрочастицы и жидкой среды.

Поверхностный заряд  $\tilde{\sigma}$  связан с  $\tilde{\zeta}$ -потенциалом следующим соотношением:

$$\tilde{\sigma} = -\frac{2\sqrt{2}\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}_0\tilde{\Phi}_0}{\tilde{\lambda}_D} \sinh\left(\frac{\tilde{\zeta}}{2\tilde{\Phi}_0}\right). \quad (1.1)$$

Безразмерная система уравнений в электролите имеет вид

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U}\nabla c^\pm = \pm\nabla(c^\pm\nabla\Phi) + \nabla^2 c^\pm, \quad (1.2)$$

$$\nu^2\nabla^2\Phi = c^- - c^+,$$

$$-\nabla P + \nabla^2\mathbf{U} = \frac{\varkappa}{\nu^2}(c^+ - c^-)\nabla\Phi, \quad (1.3)$$

$$\nabla\mathbf{U} = 0,$$

с краевыми условиями отсутствия особенности в начале координат при  $r = 0$ .

Электрический потенциал  $\varphi$  в микрочастице описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (1.4)$$

При пересечении поверхности частицы электрический потенциал предполагается непрерывным, в то время как его нормальная к поверхности производная испытывает скачок, обусловленный поверхностным зарядом  $\sigma$  и разными диэлектрическими проницаемостями в электролите и внутри диэлектрической частицы. На поверхности частицы поток положительных и отрицательных ионов равен нулю, а компоненты скорости удовлетворяют условиям непроницаемости и непроскальзывания:

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \Phi = \varphi, \quad \nu \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \delta \nu \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \sigma, \\ \pm c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial c^\pm}{\partial r} = 0, \quad U = V = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вдали от микрочастицы, при  $r \rightarrow \infty$ , концентрация ионов стремится к равновесной, напряженность электрического поля — к внешнему наложенному полю, а скорость жидкости — к скорости частицы:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: \quad c^\pm \rightarrow 1; \quad \Phi \rightarrow -E_\infty r \cos \theta; \\ U \rightarrow -U_\infty \sin \theta; \quad V \rightarrow -U_\infty \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На потенциал внутри микрочастицы  $\varphi$  должно быть наложено условие отсутствия особенности при  $r = 0$ .

Для замыкания задача дополняется начальными условиями для концентраций  $c^\pm$ , в начальный момент времени концентрации однородно распределены по пространству:

$$t = 0: \quad c^\pm = 1. \quad (1.7)$$

## 2. Метод решения краевой задачи.

Решение уравнения Лапласа (1.4) в сферической системе координат  $(r, \theta)$  для осесимметричного случая диэлектрической частицы имеет вид

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) P_k(\eta), \quad (2.1)$$

где  $\eta = \cos \theta$ ,  $P_k(\eta)$  — полиномы Лежандра,  $A_k$  и  $B_k$  — произвольные постоянные, которые находятся из краевых условий. Условия

отсутствия особенности при  $r = 0$  позволяет положить  $B_k = 0$  и искать  $\varphi$  и ее производные в виде

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k P_k(\eta), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k r^{k-1} P_k(\eta). \quad (2.3)$$

Исключая  $A_k$  из последних двух уравнений при  $r = 1$ , придем к соотношению

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right|_{r=1} = k \varphi_k, \quad (2.4)$$

а краевое условие 1.5 разрешится в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k P_k(\eta), \quad (2.5)$$

$$\nu \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sigma + \delta \nu \sum_{k=1}^{\infty} k \varphi_k P_k(\eta). \quad (2.6)$$

Таким образом, фактически исключаются из рассмотрения неизвестные функции  $\varphi$ .

Задача в электролите (1.2), (1.3) и (2.6) решалась численно.

Система уравнений имеет малый параметр — число Дебая при старшей производной в уравнении Пуассона, что вызывает значительные трудности для численного решения. Однако система решается без каких-либо упрощений в полной постановке.

Для пространственной дискретизации уравнений используется метод конечных разностей второго порядка точности. В соответствии со стандартной схемой сдвинутой сетки все скалярные величины ( $c^+$ ,  $c^-$ ,  $\Phi$ ) определены в центрах вычислительных ячеек, а компоненты скорости  $U$  и  $V$  — в центрах граничных ячеек. К сетке применено растягивание в направлении, нормальном к поверхности частицы, чтобы обеспечить необходимое количество узлов в тонком двойном электрическом слое. По угловому направлению использована обычная равномерная сетка.

Нелинейные члены в системе уравнений записываются с помощью центральной разностной схемы второго порядка точности. Такая пространственная дискретизация приводит к жесткой системе уравнений и поэтому требует применения неявных методов. Однако использование полностью неявных методов значительно увеличивает время численных расчетов. Поэтому был использован

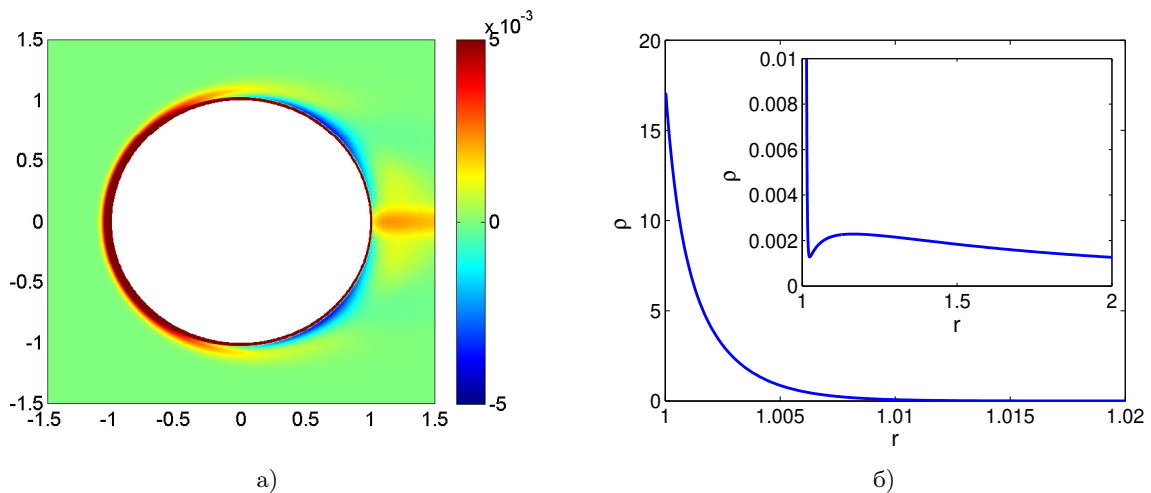


Рис. 2. а) распределение плотности пространственного заряда около поверхности диэлектрической частицы; б) сечение плотности пространственного заряда при значении угла  $\theta = 180^\circ$  при  $\nu = 0,005$ ,  $\sigma = 80$  и напряженности электрического поля  $E_\infty = 300$

полуявный метод, при котором в неявном виде представляется только часть оператора, а именно была использована схема Рунге–Кутты третьего порядка точности.

### 3. Результаты численного моделирования.

Расчеты велись методом установления до некоторого стационарного состояния. Численное моделирование было проведено в широком диапазоне параметров. Значение числа Дебая изменялось в интервале от  $\nu = 0,002$  до  $\nu = 0,14$ , напряженность внешнего электрического поля  $E_\infty$  от 20 до 450, безразмерная величина поверхностного заряда от 1 до 122. Концентрация электролита фиксирована — 0,1 моль/м<sup>3</sup>. Все расчеты проведены при постоянном значении параметра  $\kappa = 0,26$ , что соответствует водному раствору NaCl.

В качестве материала частицы рассматривался SiO<sub>2</sub> с плотностью поверхностного заряда  $\tilde{\sigma} = 1,12 \cdot 10^{-4}$  Кл/м<sup>2</sup> и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d = 7$ , так что  $\delta = \varepsilon_d/\varepsilon_m \approx 0,086$ , где  $\varepsilon_m$  — диэлектрическая проницаемость электролита.

Для фиксированного раствора электролита задача зависит от двух параметров:  $E_\infty$  и  $\nu$ . Однако зависимость от  $\nu$  крайне слабая, поэтому результаты приводятся только для некоторых значений параметра  $\nu$ .

Типичное для высокой напряженности электрического поля распределение плотности пространственного заряда, приведенное на рис. 2, показывает что в сильном электри-

ческом поле около диэлектрической частицы формируется не только двойной электрический слой (ДЭС), но и область расширенного пространственного заряда. Отметим, что формирование данной области было ранее обнаружено для ионоселективных поверхностей [4, 5]. На рис. 2б показано сечение пространственного заряда при  $\theta = 180^\circ$ .

Недавние результаты показывают, что для сферических ионоселективных микрочастиц существуют режимы высокой напряженности электрического поля, при которых реализуется электрогидродинамическая неустойчивость в области набегающего потока [15]. Несмотря на достаточно высокую напряженность электрического поля, такого эффекта для диэлектрической частицы обнаружить не удалось. Это может быть связано с тем, что в отличие от ионоселективной частицы, диэлектрическая частица не пропускает сквозь себя ионы и, следовательно, электрический ток через такую частицу равен нулю.

Распределение суммарной концентрации соли  $K(r, \theta) = c^+ + c^-$ , которая также представляет собой электрическую проводимость, изображено на рис. 3. В области набегающего потока жидкости (угол  $\theta = 180^\circ$ ) наблюдается эффект снижения концентрации ионов обоих знаков относительно равновесной концентрации электролита порядка 30 % (так называемый эффект обессоливания). С противоположной стороны частицы формируется струя с повышенной концентрацией электролита относительно равновесной.

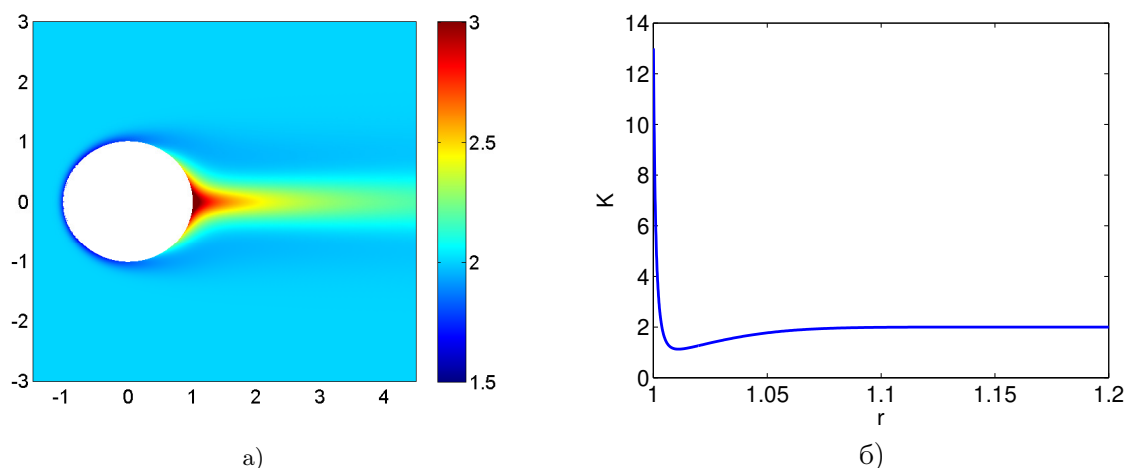


Рис. 3. а) распределение суммарной концентрации соли около поверхности диэлектрической частицы; б) сечение суммарной концентрации соли при значении угла  $\theta = 180^\circ$  при  $\nu = 0,005$ ,  $\sigma = 80$  и напряженности электрического поля  $E_\infty = 300$

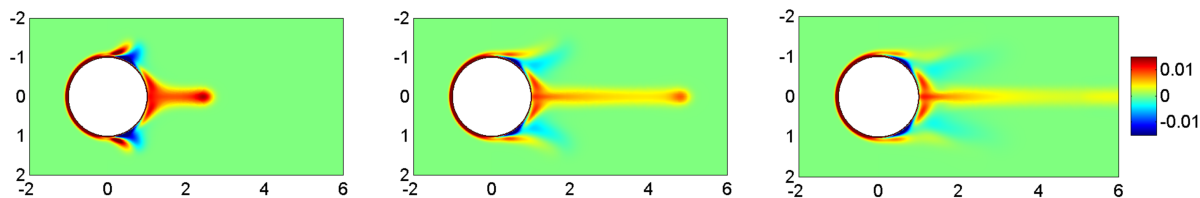


Рис. 4. Отрыв пространственного заряда от поверхности диэлектрической частицы при  $\nu = 0,0086$ ,  $\sigma = 50$  и напряженности электрического поля  $E_\infty = 400$

На рис. 4 показано распределение плотности заряда  $\rho$  и его изменение во времени. В начальный момент времени позади частицы формируется область пространственного заряда, которая впоследствии отрывается и распространяется на расстояние нескольких радиусов от поверхности частицы.

Для случая небольшой напряженности электрического поля было произведено сравнение с формулой Гельмгольца–Смолуховского скорости электрофореза диэлектрических частиц. Результаты численного моделирования показали (рис. 5) хорошее соответствие с классическими результатами Смолуховского.

На рис. 6 приведено сравнение скорости с экспериментальными данными [13]. Численные результаты показывают хорошее соответствие экспериментальным данным при умеренной напряженности электрического поля.

Сравнение результатов прямого численного моделирования с теоретическими предсказаниями из работы Ярива [10] для умеренной и высокой напряженности электриче-

ского поля, приведено на рис. 7. Сравнение показывает, что для умеренной напряженности электрического поля, результаты находятся в хорошем соответствии с теоретической моделью.

## Заключение

В работе выполнено прямое численное моделирование задачи движения диэлектрической частицы в электрическом поле. Было обнаружено формирование области пространственного заряда, которая ранее была обнаружена для ионоселективных частиц. При увеличении напряженности электрического поля наблюдается отрыв части пространственного заряда позади частицы, который при этом не распадается. Вместо этого позади частицы на расстоянии нескольких радиусов микрочастицы остается область, в которой электролит не является электронейтральным.

*Авторы выражают благодарность ученикам лицея № 4 города Краснодара Артюхову*

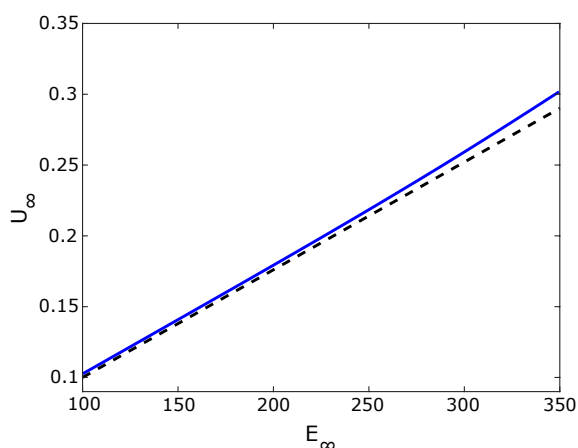


Рис. 5. Сравнение скорости Гельмгольца-Смолуховского (черная пунктирная линия) со скоростью, полученной с помощью прямого численного моделирования (сплошная линия) и результатами экспериментов

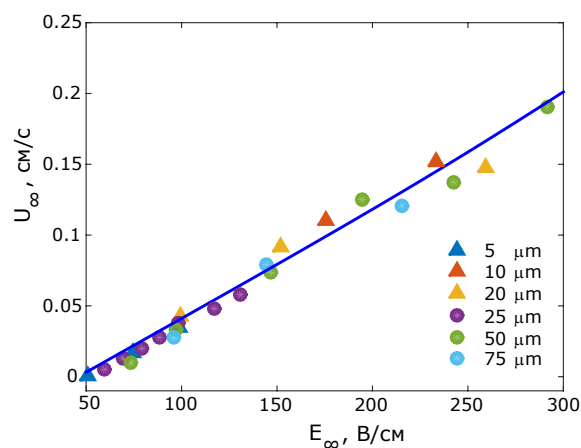


Рис. 6. Сравнение скорости микрочастицы, полученной с помощью прямого численного моделирования с результатами экспериментов в размерном виде

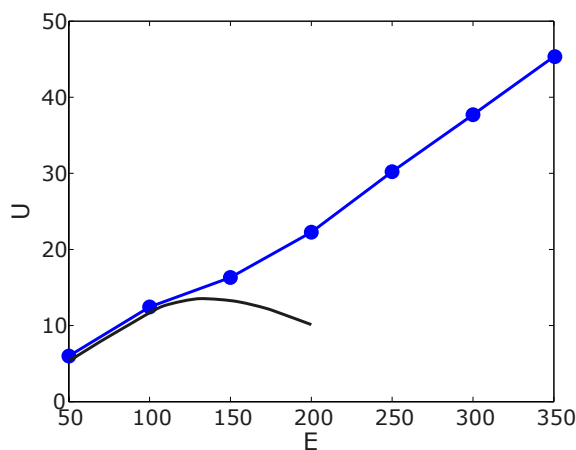


Рис. 7. Сравнение скорости микрочастицы, полученной с помощью прямого численного моделирования с результатами теоретического предсказания Ярива [11]

Д.А., Артюхову В.А. и Куреевой Т.С. за их участие и интерес к данной работе.

### Литература

1. Napoli M., Eijkel J. C. T., Pennathur S. Nanofluidic technology for biomolecule applications // Lab Chip. 2010. Vol. 10. P. 957.
2. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices // Annu. Rev. Fluid Mech. 2012. Vol. 44. P. 401.
3. Заболоцкий В. И., Никоненко В. В. Перенос ионов в мембранах. М.: Наука. 1996. 392 с.
4. Бабешко В. А., Заболоцкий В. И., Кириллова Е. В., Уртенев М. Х. Декомпозиция систем уравнений Нернста-Планка-Пуассона // ДАН. 1995. Т. 344. № 4. С. 485–486.
5. Бабешко В. А., Заболоцкий В. И., Сеидов Р. Р., Уртенев М. Х. Декомпозиционные уравнения для стационарного переноса электролита в одномерном случае // Электрохимия. 1997. Т. 33. № 8. С. 855–862.
6. Уртенев М. Х., Коваленко А. В. Полная декомпозиция неоднородной системы уравнений Нернста-Планка-Пуассона для бинарного электролита // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 2. С. 32–37.
7. Smoluchowski M. Contribution to the theory of electro-osmosis and related phenomena // Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. 1903. No. 184. P. 199.
8. Mishchuk N.A. Concentration polarization of interface and non-linear electrokinetic phenomena // Advances in Colloid and Interface Science. 2010. Vol. 160. P. 16–39.
9. Interfacial Electrokinetics and Electrophoresis

- / Ed. by Angel V. Delgado. CRC Press, 2002. 1016 p.
10. Schnitzer O., Yariv E. Macroscale description of electrokinetic flows at large zeta potentials: Non-linear surface conduction. // *Physical Review E*. 2012. Vol. 86. Iss. 2. P. 021503.
  11. Schnitzer O., Zeyde R., Yavneh I., Yariv E. Weakly non-linear electrophoresis of a highly charged colloidal particle // *Physics of Fluids*. 2013. Vol. 25. Iss. 5. P. 052004.
  12. Schnitzer O., Yariv E. Non-linear electrophoresis at arbitrary field strengths: small-Dukhin-number analysis // *Physics of Fluids*. 2014. Vol. 26. Iss. 12. P. 122002.
  13. Tottori S., Misiunas K., Keyser U.F. Non-linear Electrophoresis of Highly Charged Nonpolarizable Particles // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 123. Iss. 1. P. 014502.
  14. Demekhin E., Korovyakovskiy A., Shelistov V. Nonlinear electrophoresis in a strong electric field // *International Journal of Heat and Technology*. 2010. Vol. 28, no. 1.
  15. Ganchenko G., Frants E., Shelistov V., Nikitin N., Amiroudine S., Demekhin E. Extreme nonequilibrium electrophoresis of an ion-selective microgranule // *Physical Review Fluids*. 2019. Vol. 4. Iss. 4. P. 043703.
  - stationary electrolyte transfer in the one-dimensional case. *Jelektrohimija* [Electrochemistry], 1997, vol. 33, no. 8, pp. 855–862. (In Russian)
  6. Urtenov M. H., Kovalenko A. V. Complete decomposition of a one-dimensional system of Nernst-Planck-Poisson equations for a binary electrolyte. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2009, no. 2, pp. 32–37. (In Russian)
  7. Smoluchowski M. Contribution to the theory of electro-osmosis and related phenomena. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, 1903, no. 184, p. 199.
  8. Mishchuk N.A. Concentration polarization of interface and non-linear electrokinetic phenomena. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2010, vol. 160, pp. 16–39.
  9. Delgado A.V. (ed.) *Interfacial Electrokinetics and Electrophoresis*. CRC Press, 2002.
  10. Schnitzer O., Yariv E. Macroscale description of electrokinetic flows at large zeta potentials: Non-linear surface conduction. *Physical Review E*, 2012, vol. 86, iss. 2, p. 021503.
  11. Schnitzer O., Zeyde R., Yavneh I., Yariv E. Weakly non-linear electrophoresis of a highly charged colloidal particle. *Physics of Fluids*, 2013, vol. 25, iss. 5, p. 052004.
  12. Schnitzer O., Yariv E. Non-linear electrophoresis at arbitrary field strengths: small-Dukhin-number analysis. *Physics of Fluids*, 2014, vol. 26, iss. 12, p. 122002.
  13. Tottori S., Misiunas K., Keyser U.F. Non-linear Electrophoresis of Highly Charged Nonpolarizable Particles. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 123, iss. 1, p. 014502.
  14. Demekhin E., Korovyakovskiy A., Shelistov V. Nonlinear electrophoresis in a strong electric field. *International Journal of Heat and Technology*, 2010, vol. 28, no. 1.
  15. Ganchenko G., Frants E., Shelistov V., Nikitin N., Amiroudine S., Demekhin E. Extreme nonequilibrium electrophoresis of an ion-selective microgranule. *Physical Review Fluids*, 2019, vol. 4, iss. 4, p. 043703.

### References

1. Napoli M., Eijkel J. C. T., Pennathur S. Nanofluidic technology for biomolecule applications. *Lab Chip*, 2010, vol. 10, p. 957.
2. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2012, vol. 44, p. 401.
3. Zabolockij V. I., Nikonenko V. V. *Ion transport in membranes*. Nauka, Moscow, 1996. (In Russian)
4. Babeshko V. A., Zabolockij V. I., Kirillova E. V., Urtenov M. H. Decomposition of systems of Nernst-Planck-Poisson equations. *Doklady RAN* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 1995, vol. 344, no. 4, pp. 485–486. (In Russian)
5. Babeshko V. A., Zabolockij V. I., Seidov P. P., Urtenov M. H. Decomposition equations for