

## Ф И З И К А

УДК 51.37

DOI: 10.31429/vestnik-18-4-29-32

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ АТМОСФЕРНОГО ФОРСИНГА В ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧЕ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В МОРЕ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

В работе представлена методика вариационной идентификации параметров для задания аналитического ветрового воздействия для модели ветровой циркуляции в безразмерном виде. При реализации такой процедуры поиск решения осуществляется за счет плоского вращения исходной системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения касательных напряжений. Идентификация происходит за счет поиска максимума квадратичного функционала специального вида, характеризующего соотношение коэффициентов системы, априорной информации о решении и правых частях. За счет преобразования плоских вращений строится эквивалентная система, в которой в верхних строках располагаются уравнения с наибольшим рангом и информативностью.

*Ключевые слова:* максимизация функционала, преобразование плоских вращений, модель ветровой циркуляции, идентификация параметров модели.

## PARAMETERIZATION OF ATMOSPHERIC FORCING IN THE TEST PROBLEM OF WIND CIRCULATION IN THE SEA

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, Russia  
e-mail: vskochoer@gmail.com

*Abstract.* The paper presents a method of variational identification of parameters for setting an analytical wind effect for a wind circulation model in a dimensionless form. When implementing such a procedure, the search for a solution is carried out by plane rotation of the original system of algebraic equations for expansion coefficients for tangential stresses. Due to the transformation of plane rotations, an equivalent system is constructed in which the equations with the highest rank and informativeness are located in the upper rows. The rotation angles are found from the maximum of the functional that characterizes the ratio of the coefficients of the system, a priori information about the solution and the right parts. The algorithm is carried out iteratively. The conducted test numerical experiments have shown that when using accurate data, any combination of the equations of the system gives an exact solution for the expansion coefficients. In case of data noise, this does not happen. After the operation of the procedure, when all the information from the measurement data is taken into account in the upper equations, the resulting solution agrees well with the originally set one.

*Keywords:* functional maximization, transformations of plane rotations, wind circulation model, identification of model parameters.

При построении аналитических моделей циркуляции [1–3] требуется наличие формул определяющих касательное напряжение ветра. В этих работах использовался постоянный ветер или ветер из работы [4] при получении аналитического решения поставленной задачи. Точное решения задачи циркуляции можно сравнивать с численным решением при нахождении которого использовались те

или иные разностные схемы и алгоритмы. Такой подход позволяет протестировать вычислительные алгоритмы до их применения в полных гидротермодинамических моделях динамики океана. Например, в работе [3] на основе такого подхода протестирован алгоритм определения вертикальной компоненты поля скорости специальным образом [5] на основе методом прогонки. Сравнение чис-

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskochoer@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела морских информационных систем и технологий Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; e-mail: vskochoer@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

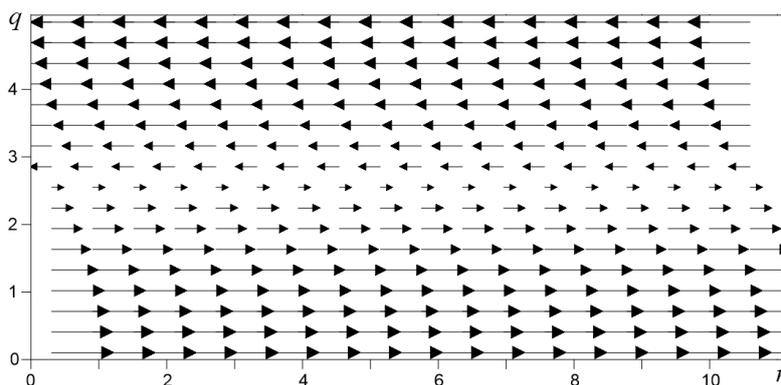


Рис. 1. Ветер заданный по формуле (1.3)

ленных решений с аналитическим показало существенное преимущество такого подхода при вычислении вертикальной скорости.

### 1. Параметризация ветрового воздействия

Будем считать, что поверхность рассматриваемого водоема в плоскости  $xOy$  имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q].$$

Оси системы координат направлены следующим образом:  $Ox$  — на восток,  $Oy$  — на север.

Компоненты касательного напряжения трения ветра будем задавать следующими формулами:

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y); \end{cases} \quad (1.1)$$

в которых приняты обозначения

$$\begin{aligned} r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q}; \\ l, s = 0, 1, 2, \dots; \quad m, p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных ( $F_1, F_2, G_1, G_2$ ) и четыре целых ( $l, m, s, p$ ) числовых параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. В частности, модель ветра в работах [1–3] определялась формулами

$$\tau_x = \frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \quad (1.3)$$

которые получаются из (1.1), (1.2) при  $F_1 = Fq/\pi, F_2 = G_1 = G_2 = 0, l = 0, m = 1$ .

Для рассматриваемой области такое ветровое воздействие изображено на рис. 1.

При задании касательного напряжения ветра по формулам (1.1) возникает естественное желание задать ветер, приближенный к реально существующему для данного водоема. Например, при  $F_1 = 10F, F_2 = G_1 = 0, G_1 = -10F, l = 0, m = 1, s = 1, p = 1$  имеем циклон над рассматриваемой областью. Такое ветровое воздействие представлено на рис. 2.

При наличии информации о компонентах  $\tau_x, \tau_y$  можно составить систему линейных алгебраических уравнений (при наличии необходимого количества информации переопределенную) для определения неизвестных параметров  $z = (F_1, F_2, G_1, G_2)$ .

### 2. Вариационный алгоритм фильтрации

Имея данные измерений о ветровом воздействии в итоге можно составить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}z = \boldsymbol{\theta}_\delta, \quad \boldsymbol{\theta}_\delta = \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{z}$  — неизвестный вектор коэффициентов разложения,  $\delta\boldsymbol{\theta}$  — вектор, описывающий помету, если  $\tau_x, \tau_y$  измерены с ошибкой. В этом случае возможно применение вариационного алгоритма фильтрации [6]. Этот метод успешно применялся при решении различных океанологических задач [7, 8]. При реализации такой процедуры поиск решения осуществляется за счет плоского вращения исходной системы (2.1). Коэффициенты такого преобразования ищутся исходя из максимума квадратичного функционала специального вида. В итоге имеем систему алгебраических урав-

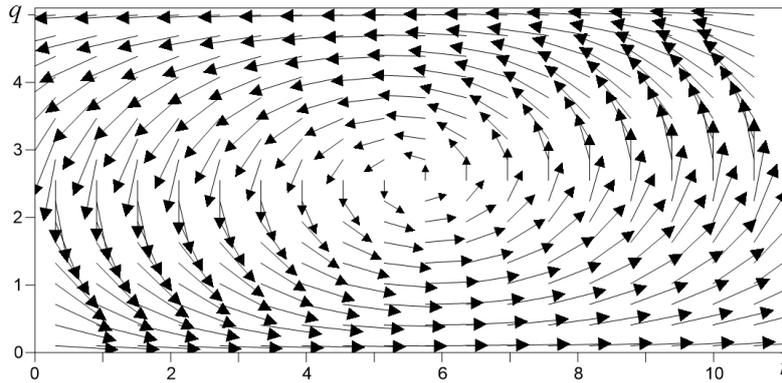


Рис. 2. Циклонический ветер

нений эквивалентную системе (2.1)

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \boldsymbol{\eta}_\delta, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{V}^T \mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_\delta = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\theta}_\delta$ ,  $\mathbf{V}^T$  — ортонормальная матрица, конструируемая как предел произведения элементарных матриц плоского вращения

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_n^T, \\ \mathbf{V}_n^T &= \prod_{k=1}^n T_{i(k),j(k)}(\phi_k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

При реализации процедуры важно оптимально определить значения углов поворотов  $\phi_k$ .

Пусть  $\mathbf{V}_n^T \boldsymbol{\theta}_\delta = w_\delta^{(n)}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{n+1}^T \boldsymbol{\theta}_\delta &= w_\delta^{(n+1)}, \\ w_\delta^{(n+1)} &= \mathbf{T}_{i(n+1),j(n+1)}^T(\phi_{n+1}) w_\delta^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для определения угла  $\phi$  используем следующее условие:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\phi) &= \max_\phi, \\ \Phi_i(\phi) &= \left( \sum_{k=1}^M |a_{ik}^{(n+1)}|^2 \right) - \frac{|w_{i,\delta}^{(n+1)}|^2}{M^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Будем считать, что априорно известна следующая информация о решении и ошибках измерений:

$$\|\delta \boldsymbol{\theta}\|_E^2 = \delta^2, \quad \|\mathbf{z}\|_E^2 \leq M^2, \quad (2.6)$$

где  $\delta^2$  и  $M^2$  — заданные числа.

После построения матрицы  $\mathbf{A}$  уравнения системы проверяются на выполнение следующего условия:

$$\left\| \mathbf{a}^{(i)} \right\|_E^2 M^2 \geq w_{i,\delta}^2, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{a}^{(i)}$  — есть  $i$ -я вектор-строка матрицы  $\mathbf{A}$ . Далее уравнения системы сортируются по рангу. Чем меньше величина  $\rho_i = \left\| \mathbf{a}^{(i)} \right\|_E^2 M^2 - w_{i,\delta}^2$ , тем меньше значение имеет ранг уравнения. Из системы выбираются уравнения в верхней части системы. Необходимое количество уравнений определяется числом неизвестных.

Таким образом, начальная система уравнений при помощи ортогонального преобразования плоских вращений приводится к эквивалентной системе. Углы поворота находятся путем определения максимума функционала, характеризующего соотношение коэффициентов системы, априорной информации о решении и правых частях. Алгоритм реализуется итерационно, до тех пор, пока  $\sin(\phi) \neq 0$ , а  $\cos(\phi) \neq 1$ , где  $\phi$  — угол поворота. В противном случае итерации прекращаются. Проведенные тестовые численные эксперименты показали, что при использовании точных данных, а также известных  $M$  и  $z$  любая комбинация  $n$  уравнений системы (2.1) дает точное решение для коэффициентов разложения. В случае зашумления данных измерений выбор любых  $n$  уравнений не дает нам известного решения. После работы процедуры, когда в верхних  $n$  уравнениях учтена вся информация из данных измерений, полученное решение хорошо согласуется с первоначально заданным.

## Литература

1. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical Test Problem of Wind Currents. In: Olegovna C. (eds) Processes in GeoMedia – Vol. I. Springer Geology. Springer, Cham., 2020. P. 17–25. DOI 10.1007/978-3-030-38177-6\_3

2. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Аналитическое решение тестовой задачи ветровых течений при постоянном ветре // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2021. Т. 18, №1. С. 32–35. DOI 10.31429/vestnik-18-1-32-35
3. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows In: Chaplina, Tatiana (eds) *Processes in GeoMedia — Vol. II* Springer Geology. Springer, 2021. P. 65–71. DOI 10.1007/978-3-030-53521-6\_9
4. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: ЭкоСи-Гидрофизика, 2002. 238 с.
5. Kochergin V.P., Dunets T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins // *Physical oceanography*. 2001. Vol. 11. Iss. 3. P. 221–232.
6. Страхов В.Н. Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений — основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии // ДАН СССР. 1991. Т. 320. №3. С. 595–599.
7. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Станичный С.В. Использование вариационного алгоритма фильтрации при восстановлении данных поверхностной температуры // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2018. Т. 15. № 7. С. 9–14. DOI 10.21046/2070-7401-2018-15-7-9-14
8. Кочергин С.В., Янковский А.Е. Применение алгоритма фильтрации данных при восстановлении структуры захваченных волн на шельфе Крыма // Морской гидрофизический журнал. 1995. № 5. С. 62–65.
9. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. [Analytical solution of the test problem of wind currents at constant wind]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2021, vol. 18, no. 1, pp. 32–35. DOI 10.31429/vestnik-18-1-32-35 (In Russian)
10. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. (2021) Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows In: Chaplina, Tatiana (eds) *Processes in GeoMedia – Volume II*. Springer Geology. Springer, pp. 65–71. DOI 10.1007/978-3-030-53521-6\_9
11. Eremeev V.N., Kochergin V.P., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh bassejnov [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-sea basins]. *Ekosi-Gidrofizika*, Sevastopol', 2002. (In Russian)
12. Kochergin V.P., Dunets T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
13. Strahov V.N. Metod fil'tracii sistem linejnykh algebraicheskikh uravnenij – osnova dlya resheniya linejnykh zadach gravimetrii i magnetometrii [The method of filtering systems of linear algebraic equations – the basis for solving linear problems of gravimetry and magnetometry]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (In Russian)
14. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Stanichnyj S.V. Ispol'zovanie variacionnogo algoritma fil'tracii pri vosstanovlenii dannyh poverh-nostnoj temperatury [Using a variational filtering algorithm to recover surface temperature data]. *Sovremennye problemy distancionnogo zon-dirovaniya Zemli iz kosmosa* [Modern problems of remote sensing of the Earth from space], 2018, vol. 15, no. 7, pp. 9–14. DOI 10.21046/2070-7401-2018-15-7-9-14 (In Russian)
15. Kochergin S.V., Yankovskij A.E. Primenenie algoritma fil'tracii dannyh pri vosstanovlenii struktury zahvachennyh voln na shel'fe Kryma [Application of the data filtering algorithm when restoring the structure of captured waves on the Crimean shelf]. *Morskoj gidrofizicheskij zhurnal* [Marine Hydrophysical Journal], 1995, no. 5, pp. 62–65. (In Russian)

### References

1. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical Test Problem of Wind Currents. In: Olegovna C. (eds) *Processes in GeoMedia—Volume I*. Springer Geology. Springer, Cham., 2020. DOI 10.1007/978-3-030-38177-6\_3
2. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analiticheskoe reshenie testovoj zadachi vetrovyh techenij pri postoyannom vetre [Analytical solution of the test problem of wind currents at constant wind]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2021, vol. 18, no. 1, pp. 32–35. DOI 10.31429/vestnik-18-1-32-35 (In Russian)
3. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. (2021) Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows In: Chaplina, Tatiana (eds) *Processes in GeoMedia – Volume II*. Springer Geology. Springer, pp. 65–71. DOI 10.1007/978-3-030-53521-6\_9
4. Eremeev V.N., Kochergin V.P., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh bassejnov [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-sea basins]. *Ekosi-Gidrofizika*, Sevastopol', 2002. (In Russian)
5. Kochergin V.P., Dunets T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
6. Strahov V.N. Metod fil'tracii sistem linejnykh algebraicheskikh uravnenij – osnova dlya resheniya linejnykh zadach gravimetrii i magnetometrii [The method of filtering systems of linear algebraic equations – the basis for solving linear problems of gravimetry and magnetometry]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (In Russian)
7. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Stanichnyj S.V. Ispol'zovanie variacionnogo algoritma fil'tracii pri vosstanovlenii dannyh poverh-nostnoj temperatury [Using a variational filtering algorithm to recover surface temperature data]. *Sovremennye problemy distancionnogo zon-dirovaniya Zemli iz kosmosa* [Modern problems of remote sensing of the Earth from space], 2018, vol. 15, no. 7, pp. 9–14. DOI 10.21046/2070-7401-2018-15-7-9-14 (In Russian)
8. Kochergin S.V., Yankovskij A.E. Primenenie algoritma fil'tracii dannyh pri vosstanovlenii struktury zahvachennyh voln na shel'fe Kryma [Application of the data filtering algorithm when restoring the structure of captured waves on the Crimean shelf]. *Morskoj gidrofizicheskij zhurnal* [Marine Hydrophysical Journal], 1995, no. 5, pp. 62–65. (In Russian)