ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2021. Т. 18. № 4. С. 23–28

## Механика

УДК 539.375, 531.375

DOI: 10.31429/vestnik-18-4-23-28

# ОБ УСЛОВИИ РАЗВИТИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА

**Дунаев В. И., Терещенко И. А., Молдаванов С. Ю.**

В работе исследуется термодинамически полное условие хрупкого разрушения при моделировании гидравлического разрыва нефтеносного пласта. В качестве модели нефтеносного пласта, подвергнутого гидравлическому воздействию, рассматривается бесконечное тело, находящееся в плоском деформированном состоянии, ослабленное узким эллиптическим отверстием. На границе скважины действует давление. На удаленной границе действует боковая нагрузка, обусловленная горным давлением. Получено соотношение, определяющее связь между характерным размером изолированного дефекта (полудлина эллипса) и критическим давлением на стенку скважины, при котором возможно его развитие, с учетом бокового давления и термодинамических параметров пласта (температура и линейный коэффициент теплового расширения).

*Ключевые слова:* изолированный дефект, плоская задача теории упругости, интегралы высвобождающейся внутренней энергии, комплексные потенциалы, конформное отображение.

# ENERGY CONDITION OF CRACK DEVELOPMENT IN MODELING HYDRAULIC FRACTURING OF AN OIL RESERVOIR

V. I. Dunaev, I. A. Tereshchenko, S. Yu. Moldavanov

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

*Abstract.* The paper investigates the thermodynamically complete condition of brittle fracture in the simulation of hydraulic fracturing of an oil reservoir. An infinite body in a flat deformed state weakened by a narrow elliptical hole is considered as a model of an oil-bearing reservoir subjected to hydraulic action. Pressure acts on the borehole boundary. Lateral pressure due to mountain pressure acts on the remote border. A relation is obtained that determines the relationship between the characteristic size of an isolated defect (half-length of an ellipse) and the critical pressure on the well wall at which its development is possible, taking into account the lateral pressure and thermodynamic parameters of the formation (temperature and linear coefficient of thermal expansion).

*Keywords:* isolated defect, plane problem of elasticity theory, integrals of released internal energy, complex potentials, conformal mapping.

## 1. Введение

В данной работе исследуется термодинамически полное энергетическое условие хрупкого разрушения материалов под действием нагрузок, приложенных как к поверхности трещины, так и к удаленной поверхности тела, сформулированное в работах [1–4]. Такое условие возникает при моделировании гидравлического разрыва нефтеносного пласта, находящегося под действием боковой нагрузки, обусловленной горным давлением [5]. В качестве модели нефтеносного пласта, подвергнутого гидравлическому воздействию, рассматривается бесконечное тело, находящееся в плоском деформированном состоянии, ослабленное узким эллиптическим отверстием. На границе отверстия и на бесконечности действуют заданные давления. Рассматриваемое условие для плоского напряженно-деформированного состояния имеет вид [3]

$$\frac{dW}{da} = 0,$$

Дунаев Владислав Игоревич, д-р. физ-мат. наук, профессор кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: dunaevatv@mail.ru.

Терещенко Иван Анатольевич, старший преподаватель кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: ongptr@mail.ru.

Молдаванов Сергей Юрьевич, канд. физ-мат. наук, доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке гранта ПАО «Нефтяная компания “Роснефть”» по договору №100021/05188Д от 01.09.2021 г.

$$W = \frac{1}{2} \oint\limits_{\Sigma} \left( \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(0)} - \sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(1)} \right) n_j ds + \\ + \alpha_{01} T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds - \gamma \Sigma, \quad i,j = 1,2, \tag{1.1}$$

где $a$ — характерный линейный размер дефекта $\Sigma$ (например, полудлина трещины, большая полуось «узкого» эллипса, и т.д.). Все остальные параметры, характеризующие линейные размеры контура $\Sigma$ (в обозначениях формулы (1.1) имеющего длину $\Sigma(a)$), далее предполагаются функциями от $a$;

$\gamma$ — удельная внутренняя энергия, затраченная на образование единицы длины контура дефекта $\Sigma(a)$;

$\sigma_{ij}^{(l}$, $u_i^{(l)}$, $l = 0, 1$ — компоненты тензора напряжения и вектора перемещения. Верхний индекс (0) относится к соответствующим компонентам до образования в теле новой поверхности, а индекс (1) к этим же величинам после ее образования;

$n_j$ — компоненты вектора нормали к контуру $\Sigma$;

$\delta_{ij}$ — символ Кронекера;

$\alpha_{01} = \alpha_0$ для плоского напряженного состояния, $\alpha_{01} = \alpha_0 (1+\nu)$ для плоской деформации;

$\alpha_0$ — линейный коэффициент теплового расширения;

$T_0$ — абсолютная температура;

$k_1 = E/(1-\nu)$ — для плоского напряженного состояния, $k_1 = E/(1-2\nu)$ — для плоской деформации;

$E$ — модуль упругости;

$\nu$ — коэффициент Пуассона.

## 2. Комплексная параметризация интегралов высвобождающейся внутренней энергии

В плоской задаче теории упругости компоненты тензора напряжения и вектора перемещения определяются через две аналитические функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного по формулам Колосова–Мусхелишвили [6]

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[ \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right]; \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{21} = 2 \left[ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \right]; \\ 2\mu (u_1 + iu_2) = \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{2.1}$$

В последнем выражении (2.1) введены обозначения: $\chi = 3 - 4\nu$ для плоского деформированного состояния и $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ — для плоского напряженного состояния $\mu = E/[2(1+\nu)]$. Черта сверху означает комплексную сопряженную величину. Учитывая соотношения $n_1 ds = dx_2$ и $n_2 ds = -dx_1$, интегралы в выражении (1.1) запишутся в виде

$$U = -\frac{1}{2} \oint\limits_{\Sigma} \Bigg[ \left( \sigma_{12}^{(0)} u_1^{(1)} + \sigma_{22}^{(0)} u_2^{(1)} \right) - \\ - \left( \sigma_{12}^{(1)} u_1^{(0)} + \sigma_{22}^{(1)} u_2^{(0)} \right) - \\ - \left( \sigma_{12}^{(1)} u_1^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)} u_2^{(1)} \right) \Bigg] dx_1 - \\ - \Bigg[ \left( \sigma_{11}^{(0)} u_1^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)} u_2^{(1)} \right) - \\ - \left( \sigma_{11}^{(1)} u_1^{(0)} + \sigma_{21}^{(1)} u_2^{(0)} \right) - \\ - \left( \sigma_{11}^{(1)} u_1^{(1)} + \sigma_{21}^{(1)} u_2^{(1)} \right) \Bigg] dx_2 - \\ - \alpha_{01} T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_2^{(1)} dx_1 - u_1^{(1)} dx_2. \tag{2.2}$$

Исходя из определения интеграла от функции комплексного переменного $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ через два криволинейных интеграла от действительных функций $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$, имеем

$$\oint\limits_{\Sigma} f(z) dz = \\ = \oint\limits_{\Sigma} u dx_1 - v dx_2 + i \oint\limits_{\Sigma} v dx_1 + u dx_2. \tag{2.3}$$

Учитывая выражение (2.3) для функций

$$f_1(z) = \Bigg[ \left( \sigma_{12}^{(0)} u_1^{(1)} + \sigma_{22}^{(0)} u_2^{(1)} \right) - \\ - \left( \sigma_{12}^{(1)} u_1^{(0)} + \sigma_{22}^{(1)} u_2^{(0)} \right) - \\ - \left( \sigma_{12}^{(1)} u_1^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)} u_2^{(1)} \right) \Bigg] + \\ + i \Bigg[ \left( \sigma_{11}^{(0)} u_1^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)} u_2^{(1)} \right) - \\ - \left( \sigma_{11}^{(1)} u_1^{(0)} + \sigma_{21}^{(1)} u_2^{(0)} \right) - \\ - \left( \sigma_{11}^{(1)} u_1^{(1)} + \sigma_{21}^{(1)} u_2^{(1)} \right) \Bigg],$$

$$f_2(z) = u_2^{(1)} + iu_1^{(1)},$$

представим интегралы (2.2) в следующем виде:

$$U = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_\Sigma f_1(z)dz + \alpha_0 T_0 k_1 \operatorname{Re}\oint_\Sigma f_2(z)dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_\Sigma \Bigg(\left[\sigma_{12}^{(0)}\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right) + \sigma_{22}^{(0)}u_2^{(1)} + i\sigma_{11}^{(0)}u_1^{(1)}\right] + \left[\sigma_{12}^{(1)}\left(u_1^{(0)} + iu_2^{(0)}\right) + \sigma_{22}^{(1)}u_2^{(0)} + i\sigma_{11}^{(1)}u_1^{(0)}\right] + \left[\sigma_{12}^{(1)}\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right) + \sigma_{22}^{(1)}u_2^{(1)} + i\sigma_{11}^{(1)}u_1^{(1)}\right]\Bigg)dz +$$

$$- \alpha_{01} T_0 k_1 \operatorname{Re}\oint_\Sigma \left(u_2^{(1)} + iu_1^{(1)}\right)dz. \quad (2.4)$$

В выражении (2.4) символом *Re* обозначаются действительные части соответствующих интегралов.

Подставляя в выражение (2.4) равенства

$$u_1^{(l)} = \frac{u_1^{(l)} + iu_2^{(l)} + \overline{\left(u_1^{(l)} + iu_2^{(l)}\right)}}{2},$$

$$u_2^{(l)} = \frac{u_1^{(l)} + iu_2^{(l)} - \overline{\left(u_1^{(l)} + iu_2^{(l)}\right)}}{2},$$

$$l = 0, 1,$$

получаем

$$U = -\frac{1}{4\mu}\operatorname{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint_\Sigma \Big\{\Big[\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right) \times \left(\sigma_{22}^{(0)} + \sigma_{11}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)}\right) - \overline{\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right)}\left(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)}\right)\Big] -$$

$$- \Big[\left(u_1^{(0)} + iu_2^{(0)}\right)\left(\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1)} + 2i\sigma_{12}^{(1)}\right) - \overline{\left(u_1^{(0)} + iu_2^{(0)}\right)}\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right)\Big] -$$

$$- \Big[\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right)\left(\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1)} + 2i\sigma_{12}^{(1)}\right) - \overline{\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right)}\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}\right)\Big]\Big\}dz\Bigg\} -$$

$$- \frac{\alpha_{01} T_0 k_1}{2\mu}\operatorname{Re}\Bigg\{i\oint_\Sigma \overline{\left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right)}dz\Bigg\}. \quad (2.5)$$

Тогда, с учетом формул Колосова–Мусхелишвили (2.1), интегралы (2.5) принимают вид

$$U =$$

$$= -\frac{1}{4\mu}\operatorname{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint_\Sigma \Big\{\Big[\left(\chi\phi_1(z) - z\overline{\phi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}\right) \times \left(\overline{z}\phi_0''(z) + \psi_0'(z)\right) - \left(\chi\overline{\phi_1(z)} - \overline{z}\phi_1'(z) - \psi_1(z)\right) \times \left(\phi_0'(z) + \overline{\phi_0'(z)}\right)\Big] -$$

$$- \Big[\left(\chi\phi_0(z) - z\overline{\phi_0'(z)} - \overline{\psi_0(z)}\right) \times \left(\overline{z}\phi_1''(z) + \psi_1'(z)\right) - \left(\chi\overline{\phi_0(z)} - \overline{z}\phi_0'(z) - \psi_0(z)\right)\left(\phi_1'(z) + \overline{\phi_1'(z)}\right)\Big] -$$

$$- \Big[\left(\chi\phi_1(z) - z\overline{\phi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}\right) \times \left(\overline{z}\phi_1''(z) + \psi_1'(z)\right) - \left(\chi\overline{\phi_1(z)} - \overline{z}\phi_1'(z) - \psi_1(z)\right) \times \left(\phi_1'(z) + \overline{\phi_1'(z)}\right)\Big]\Big\}dz\Bigg\} +$$

$$+ \frac{\alpha_{01} T_0 k_1}{2\mu} \times \operatorname{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint_\Sigma \left(\chi\overline{\phi_1(z)} - \overline{z}\phi_1'(z) - \psi_1(z)\right)dz\Bigg\}. \quad (2.6)$$

## 3. Вычисление интегралов высвобождающейся внутренней энергии

Если контур дефекта $\Sigma$ подвергнут равномерному давлению, граничное условие для функций $\phi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ при $z \in \Sigma$ имеет вид [6]

$$\phi_1(z) + z\overline{\phi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = -Pz \qquad (3.1)$$

или, соответствующее условию (3.1), выражение в комплексно-сопряженной форме

$$\overline{\phi_1(z)} + \overline{z}\phi_1'(z) + \psi_1(z) = -P\overline{z}. \qquad (3.2)$$

Функции $\phi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, определяющие напряженно-деформированное состояние плоскости без дефекта, подвергнутой равномерному давлению $p$, имеют соответственно вид [6]

$$\phi_0(z) = -\frac{p}{2}z, \quad \psi_0(z) = 0. \qquad (3.3)$$

Подставляя в выражение (2.6) граничное условие (3.1), (3.2), с учетом выражений (3.3) получим

$$U = -\frac{1}{4\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Sigma}\Big\{p\left[(1+\chi)\,\overline{\phi_1(z)} + P\overline{z}\right] - \left[\left(\frac{p}{2}(1-\chi)+P\right)z + (1+\chi)\,\phi_1(z)\right]\times \left(\overline{z}\phi_1''(z) + \psi_1'(z)\right) + \left[\left(\frac{p}{2}(1-\chi)+P\right)\overline{z} + (1+\chi)\,\overline{\phi_1(z)}\right]\times \left(\phi_1'(z) + \overline{\phi_1'(z)}\right)\Big\}dz\Bigg\} + \frac{\alpha_{01}T_0k_1}{2\mu}\times \mathrm{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Sigma}\left((1+\chi)\,\overline{\phi_1(z)} + P\overline{z}\right)dz\Bigg\}. \qquad (3.4)$$

Решение задачи теории упругости для плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием (дефектом) $\Sigma$, когда на границе дефекта действует равномерное давление $P$, а на бесконечности — равномерное давление $p$, имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= -\frac{Rp}{2}\xi - \left(P - \frac{p}{2}\right)\frac{Rm}{\xi};\\ \psi_1(\xi) &= -R\,(P-p)\,\frac{\left(1+m^2\right)\xi}{\xi^2 - m}.\end{aligned} \qquad (3.5)$$

При этом переменные $\xi$ и $z$ связаны соотношением

$$z = \omega(\xi) = R\left(\xi + \frac{m}{\xi}\right), \qquad (3.6)$$

определяющим конформное отображение внешности единичной окружности в плоскости $\xi$ на внешность эллиптического контура в плоскости $z$.

В выражениях (3.5), (3.6) приняты обозначения

$$R = \frac{a}{2}(1+\xi); \quad m = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{b}{a},$$

где $a$ и $b$ — полуоси эллипса, $b \leqslant a$.

Переходя к переменной $\xi$ по формуле (3.6) в интегралах (3.4) получим

$$U = -\frac{1}{4\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Omega}\Bigg\{p\left[(1+\chi)\,\overline{\phi_1(\sigma)} + P\overline{\omega(\sigma)}\right] - \left[\left(\frac{p}{2}(1-\chi)+P\right)\omega(\sigma) + (1+\chi)\,\phi_1(\sigma)\right]\times \left[\overline{\omega(\sigma)}\frac{\phi_1''(\sigma)\,\omega'(\sigma) - \phi_1'(\sigma)\,\omega''(\sigma)}{\left(\omega'(\sigma)\right)^3} + \frac{\psi_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right] + \left[\left(\frac{p}{2}(1-\chi)+P\right)\overline{\omega(\sigma)} + (1+\chi)\,\overline{\phi_1'(\sigma)}\right]\times \left[\frac{\phi_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \overline{\frac{\phi_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}}\right]\Bigg\}\omega'(\sigma)\,d\sigma\Bigg\} + \frac{\alpha_{01}T_0k_1}{2\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Sigma}\Big((1+\chi)\,\overline{\phi_1(\sigma)} + P\overline{\omega(\sigma)}\Big)\omega'(\sigma)\,d\sigma\Bigg\}. \qquad (3.7)$$

Здесь $\sigma = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ — произвольная точка единичной окружности $\Omega$.

С учетом выражений (3.5), (3.6) интегралы (3.7) имеют вид

$$U = -\frac{R^2}{8\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Omega}\Bigg\{2p\Big[P\left(1+m^2\chi\right) - \frac{p}{2}(1+\chi)\left(1+m^2\right)\Big]\frac{1}{\sigma} - 2\,(P-p)\left(1-m^2\right)\times \left[(P-\chi p)\,\frac{\sigma}{\sigma^2 - m} - (\chi P - p)\,\frac{m}{\sigma\left(\sigma^2 - m\right)}\right] + \left[(P-\chi p) + m^2\,(\chi P - p)\right]\times \left[\frac{m\,(2P-p) - \sigma^2 p}{\sigma\left(\sigma^2 - m\right)} + \frac{m\,(2P-p)\,\sigma^2 - p}{\sigma\left(1 - m\sigma^2\right)}\right] -$$

$$
\begin{gathered}
- m\left(P-\chi p\right)\times \\
\times\left[\frac{m\left(2P-p\right)-\sigma^2 p}{\sigma^3\left(\sigma^2-m\right)}+\frac{m\left(2P-p\right)\sigma^2-p}{\sigma^3\left(1-m\sigma^2\right)}\right]- \\
\left.\left.- m\left(\chi P-p\right)\frac{\left(m\left(2P-p\right)-\sigma^2 p\right)\sigma}{\left(\sigma^2-m\right)}\right\}d\sigma\right\}+ \\
+\frac{\alpha_{01}T_0k_1R^2}{2\mu}\times \\
\times\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Omega}\left[P\left(1+m^2\chi\right)-\right.\right. \\
\left.\left.-\frac{p}{2}\left(1+\chi\right)\left(1+m^2\right)\right]\frac{1}{\sigma}d\sigma\right\}. \qquad (3.8)
\end{gathered}
$$

Подынтегральные функции в интегралах (3.8) регулярны внутри единичной окружности $\Omega$ включая ее границу, за исключением полюсов в точках $\sigma=0$ и $\sigma=\pm\sqrt{m}$, лежащих внутри $\Omega$. Следовательно, интегралы (3.8) вычисляются при помощи теоремы о вычетах. Вычисляя интегралы (3.8), после преобразований, получаем

$$
\begin{gathered}
U=\frac{\pi}{2\mu}R^2\Big[P^2\left(1+m^2\chi\right)- \\
-Pp\left(1+\chi\right)\left(1+m^2\right)+\frac{p^2}{2}\left(1+\chi\right)\left(1+m^2\right)+ \\
+2\alpha_{01}T_0k_1\times \\
\times\left(P\left(1+m^2\chi\right)-\frac{p}{2}\left(1+\chi\right)\left(1+m^2\right)\right)\Big]. \qquad (3.9)
\end{gathered}
$$

При $\varepsilon=1$ (в случае дефекта круглой формы) $m=0$, $R=a$ и выражение (3.9) имеет вид

$$
\begin{gathered}
U=\frac{\pi}{8\mu}a^2\left(P^2-Pp\left(1+\chi\right)+\frac{p^2}{2}\left(1+\chi\right)+\right. \\
\left.+2\alpha_{01}T_0k_1\left(P-\frac{p}{2}\left(1+\chi\right)\right)\right). \qquad (3.10)
\end{gathered}
$$

Соотношение (3.10) совпадает с выражением для высвобождающейся внутренней энергии, полученной в работе [4].

При $\varepsilon=0$ (в этом случае моделью трещины является математический разрез) $m=1$, $R=a/2$ и выражение (3.9) имеет вид

$$
\begin{gathered}
U=\frac{\pi}{8\mu}\left(1+\chi\right)a^2\times \\
\times\left(P^2-2Pp+p^2+2\alpha_{01}T_0k_0\left(P-p\right)\right). \qquad (3.11)
\end{gathered}
$$

Для плоского деформированного состояния выражение (3.11) запишется в виде

$$
\begin{gathered}
U=\frac{\pi\left(1-\nu^2\right)}{E}a^2\times \\
\times\left(P^2-2Pp+p^2+2\alpha_{01}T_0k_0\left(P-p\right)\right). \qquad (3.12)
\end{gathered}
$$

В (3.12) $k_0=E\left(1+\nu\right)/(1-2\nu)$.

Тогда, следуя обозначениям, принятым в выражениях (1.1), для математического разреза имеем

$$
W\left(a\right)=U\left(a\right)-4\gamma a. \qquad (3.13)
$$

Дифференцируя в соответствии с условием (1.1) равенство (3.13) с учетом (3.12), получим

$$
\begin{gathered}
P^2-2Pp+p^2+2\alpha_0T_0k_0\left(P-p\right)- \\
-\frac{2}{\pi}\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\gamma}{a}=0. \qquad (3.14)
\end{gathered}
$$

Если на удаленной границе давление отсутствует, т.е. $p=0$ из равенства (3.14) имеем

$$
P^2+2\alpha_0T_0k_0P-\frac{2}{\pi}\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\gamma}{a}=0. \qquad (3.15)
$$

Равенство (3.15) было получено в работе [3].

Выражение (3.14) позволяет определить критическое давление, при котором возможно развитие трещины с учетом бокового давления на удаленной от дефекта границе, в зависимости от механических и термодинамических параметров среды.

## Литература

1. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Об энергетическом условии разрушения твердых тел // Доклады РАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 43–45.
2. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Энергетическое условие разрушения твердых тел // Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 69–81.
3. *Дунаев В.И., Терещенко И.А., Величко Е.И., Шиян С.И.* Об одной математической модели в задаче гидроразрыва нефтеносного пласта // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2020. № 10(334). С. 39–41.
4. *Дунаев В.И., Терещенко И.А., Молдаванов С.Ю., Величко Е.И., Шиян С.И.* Об одном условии развития изолированного дефекта // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2021. Т. 18. № 2. С. 8–13.
5. *Желтов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Известия академии наук СССР. Отделение техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.

6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

## References

1. Dunaev I.M., Dunaev V.I. Ob energeticheskom uslovii razrusheniya tverdykh tel [On the energy condition of destruction of solids]. *Doklady RAN* [Rep.of the Russian Academy of Sciences], 2000, vol. 372, no. 1, pp. 43–45. (In Russian)
2. Dunaev I.M., Dunaev V.I. Energeticheskoe uslovie razrusheniya tverdykh tel [Energy condition of destruction of solids]. *Mekhanika tverdogo tela* [Solid state mechanics], 2003, no. 6, pp. 69–81. (In Russian)
3. Dunaev V.I., Tereshchenko I.A., Velichko E.I., Shiyan S.I. Ob odnoy matematicheskoy modeli v zadache gidrorazryva neftenosnogo plasta [About a mathematical model in the problem of hydraulic fracturing of an oil reservoir] *Stroitel'stvo neftyanykh i gazovykh skvazhin na sushe i na more* [Construction of oil and gas wells on land and at sea], 2020, no. 10(334), pp. 39–41. (In Russian)
4. Dunaev V.I., Tereshchenko I.A., Moldavanov S.Yu., Velichko E.I., Shiyan S.I. Ob odnom uslovii razvitiya izolirovannogo defekta [About one condition for the development of an isolated defect]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2021, vol. 18, no. 2, pp. 8–13. (In Russian)
5. Zheltov Yu.P., Khristianovich S.A. O gidravlicheskom razryve neftenosnogo plasta [About hydraulic fracturing of an oil reservoir]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskih nauk* [Proc. of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences], 1955, no. 5, pp. 3–41. (In Russian)
6. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Nauka, Moscow, 1966. (In Russian)



Статья поступила 3 декабря 2021 г.