

## Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием

В. С. Кочергин <sup>1</sup>✉, С. В. Кочергин <sup>1</sup>, С. Н. Скляр <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

<sup>2</sup> Американский Университет в Центральной Азии (АУСА), Аалы Токомбаев, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизстан

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; e-mail: [vskocher@gmail.com](mailto:vskocher@gmail.com)

В работе рассматривается математическая модель ветровых течений в водоеме прямоугольной формы постоянной глубины. Анализ проведен для модели в безразмерном виде с последующим исключением из системы уравнений членов, описывающих адвекцию и горизонтальную диффузию. Аналитическое решение для интегральных составляющих горизонтальных компонент скорости течения получено при задании компонент касательного напряжения трения ветра по специальному закону, позволяющему описать различные ветровые ситуации. Найденные решения могут быть использованы в качестве эталонных при тестировании различных разностных схем и алгоритмов используемых в моделях циркуляции водоемов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА** безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение, функция тока, интегральная скорость.

**ФИНАНСИРОВАНИЕ** Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

**ПОЛУЧЕНО** 27 декабря 2021 г. **ПРИНЯТО** 31 января 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 марта 2022 г.

**ЦИТИРОВАНИЕ** Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н. Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 16–24. DOI 10.31429/vestnik-19-1-16-24

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Analytical Solution of the Equation for the Stream Function in the Model of Flows with Variable Wind Action in Space

Vladimir S. Kochergin<sup>1</sup>✉, Sergei V. Kochergin<sup>1</sup>, Sergei N. Sklyar<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

<sup>2</sup> American University of Central Asia, Aaly Tokombaev str., 7/6, Bishkek, 720060, Kirgizstan

✉ Vladimir S. Kochergin; e-mail: [vskocher@gmail.com](mailto:vskocher@gmail.com)

The paper considers a mathematical model of wind currents in a rectangular reservoir of constant depth. The analysis is carried out for the model in dimensionless form with the subsequent exclusion from the system of equations of terms describing advection and horizontal diffusion. The analytical solution for the integral components of the horizontal components of the flow velocity is obtained by specifying the components of the tangential friction stress of the wind according to a special law that allows describing various wind situations. The solutions found can be used as reference when testing various difference schemes and algorithms used in reservoir circulation models. Numerical modeling of ocean dynamics is an important and urgent task in solving which it is necessary to use methods and algorithms that allow obtaining solutions corresponding to objective reality. But the models themselves and especially the modeling object are quite complex, so most often the comparison of the results obtained from different models are compared with each other. Therefore, it is preferable to simplify the model itself and the object of study to such an extent that we have the opportunity to build an analytical solution to the problem and test the schemes and methods used in the numerical implementation of hydrodynamic models on such an example. The use of adequate schemes and methods does not exclude the use of high sampling. However, the development of the models themselves and the methods of their numerical implementation allows us to obtain similar results using less computing resources.

**KEYWORDS** dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution, current function, integral velocity.

**FUNDING** The work was carried out according to the state task on the topic 0555-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems of the coastal zones of the Black and Azov Seas” (“Coastal research” key).

**RECEIVED** 27 December 2021. **ACCEPTED** 31 January 2022. **PUBLISHED** 30 March 2022.

**CITE AS** Kochergin V. S., Kochergin S. V., Sklyar S. N. Analytical solution of the equation for the stream function in the model of flows with variable wind action in space. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 16–24. DOI 10.31429/vestnik-19-1-16-24

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Численное моделирование динамики океана является важной и актуальной задачей [1], при решении которой необходимо использование методов и алгоритмов, позволяющих получать решения, соответствующие объективной реальности. Но сами модели и тем более объект моделирования достаточно сложны, поэтому чаще всего сравнение результатов, полученных по различным моделям, сравниваются между собой. Такой подход носит субъективный характер и сильно зависит от предпочтений исследователя, традиций научной школы и т.д. Можно предложить другой подход. Упростить саму модель и объект исследования до такой степени, чтобы мы имели возможность построить аналитическое решение задачи и на таком примере протестировали схемы и методы, применяемые в при численной реализации гидродинамических моделей. Применение адекватных схем и методов не исключает использования высокой дискретизации. Однако развитие самих моделей, методов их численной реализации позволяет получить аналогичные результаты при использовании меньших вычислительных ресурсов. Аналитические решения существуют для самых простых постановок, например, модели Стоммела [2–4]. В [5, 6] такая задача реализована при помощи метода обращения динамического оператора для тестирования используемых разностных схем специального вида для вычисления полей скорости. В работах [7–10] исследуется модель, учитывающая переменность скорости по всем трем направлениям, что позволяет анализировать точность вычисления не только ее горизонтальных компонент, но и вертикальной составляющей. Решение получено при задании простейшего ветрового воздействия. В результате численных экспериментов показано преимущество алгоритма прогонки при вычислении вертикальной скорости. В данной работе компоненты касательного напряжения трения ветра задаются по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации.

## 1. Задача в безразмерном виде

Будем считать, что поверхность (зеркало) рассматриваемого водоема в плоскости  $xOy$  имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q],$$

глубина его  $H > 0$  — постоянна. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом:  $Ox$  — на восток,  $Oy$  — на север,  $Oz$  — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\}$$

рассмотрим следующую модель ветровых течений:

$$\begin{cases} -\ell v = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \ell u = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in \Omega^0, \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\{z = 0, (x, y) \in \Omega_0^0\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, w = 0; \quad (1.2)$$

$$\{z = H, (x, y) \in \Omega_0^0\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, w = 0; \quad (1.3)$$

$$\{0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial\Omega_0\} : Un_x + Vn_y = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $n_x$  и  $n_y$  — нормали по осям  $x$  и  $y$ ,  $k$  — коэффициент турбулентной диффузии.

В (1.4) используются интегральные скорости

$$U(t, x, y) = \int_0^H u(x, y, z) dz, \quad V(t, x, y) = \int_0^H v(x, y, z) dz,$$

а в (1.3) принимается следующий вариант параметризации придонного трения:

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0, \quad (1.5)$$

где постоянный параметр  $\mu$  используется для задания трения о дно пропорционально интегральной скорости.

Пусть в соответствии с [2–4]

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const}, \quad (1.6)$$

где  $\ell$  — параметр Кориолиса,  $\ell_0$  — его некоторое постоянное значение, а  $\beta y$  — его зависимость от  $y$  по широте ( $\beta$ -эффект).

Компоненты ветрового воздействия зададим в виде

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y), \end{cases} \quad (1.7)$$

где приняты обозначения

$$r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q};$$

$$l, s = 0, 1, 2, \dots; \quad m, p = 1, 2, \dots$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных ( $F_1, F_2, G_1, G_2$ ) и четыре целых ( $l, m, s, p$ ) числовых параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Например, при  $F_1 = Fq/\pi, F_2 = G_1 = G_2 = 0, l = 0, m = 1$  имеем

$$\tau_x = \frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0. \quad (1.8)$$

А при

$$F_1 = \frac{Fq}{\pi}, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -\frac{Fq}{\pi}, \quad G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1 \quad (1.9)$$

имеем циклон над экваторией.

## 2. Аналитическое решение

В (1.1) проинтегрируем каждое уравнение по вертикали в пределах от 0 до  $H$ , с учетом краевых условий, получим задачу для интегральных скоростей

$$\begin{cases} \mu U - \ell V = -H \frac{\partial P^s}{\partial x} + \tau_x, \\ \ell U + \mu V = -H \frac{\partial P^s}{\partial y} + \tau_y, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega^0, \quad Un_x + Vn_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Из первых двух уравнений в (2.1) исключим градиенты давления, при помощи перекрестного дифференцирования

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \beta V = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0^0; \\ Un_x + Vn_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Введем функцию тока  $\Psi(x, y)$  по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

В итоге получаем задачу для функции тока

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega_0^0, \\ \Psi = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.3) запишем в виде суммы двух функций

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y),$$

удовлетворяющих следующим задачам:

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega_0^0, \\ \Psi_1 = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega_0^0, \\ \Psi_2 = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для решения каждой из задач (2.4), (2.5) найдем частное решение уравнений, а затем общее решение соответствующих однородных уравнений (это одно и то же уравнение для обеих задач), рассмотрим их сумму и удовлетворим краевым условиям для этих задач, используя произвол, содержащийся в общем решении однородного уравнения.

В работе [5] получены аналитические выражения для баротропной компоненты скорости, добавочных составляющих и вертикальной компоненты скорости для поставленной задачи. Полученные аналитические решения для скоростей использовались для вычисления  $w$  различными способами, в том числе и по формуле полученной в работе [5].

### 3. Частные решения

Пусть  $\bar{\Psi}_1(x, y)$  – частное решение уравнения из (2.4), тогда с учетом (1.7) имеем

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_1}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial x} = -q_m [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y), \quad (x, y) \in \Omega_0^0. \quad (3.1)$$

Частное решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$\bar{\Psi}_1(x, y) = [D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y). \quad (3.2)$$

После подстановки функции  $\bar{\Psi}_1(x, y)$  в уравнение (3.1) и деления обеих частей полученного соотношения на  $\sin(q_m y)$  приходим к уравнению

$$-\mu r_l^2 [D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] + \beta r_l [-D_1 \sin(r_l x) + D_2 \cos(r_l x)] - \mu q_m^2 [D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] = -q_m [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)].$$

Сгруппируем коэффициенты при  $\cos(r_l x)$  и  $\sin(r_l x)$ , получим

$$[-\mu r_l^2 D_1 + \beta r_l D_2 - \mu q_m^2 D_1 + q_m F_1] \cos(r_l x) + [-\mu r_l^2 D_2 - \beta r_l D_1 - \mu q_m^2 D_2 + q_m F_2] \sin(r_l x) = 0. \quad (3.3)$$

Из (3.3) запишем систему уравнений для нахождения  $D_1$  и  $D_2$

$$\begin{cases} \mu(r_l^2 + q_m^2)D_1 - \beta r_l D_2 = q_m F_1, \\ \beta r_l D_1 + \mu(r_l^2 + q_m^2)D_2 = q_m F_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Из (3.4), будем иметь

$$D_1 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_1 + \beta r_l F_2}{\mu^2(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m, \quad D_2 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_2 - \beta r_l F_1}{\mu^2(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m. \quad (3.5)$$

Для определения  $\bar{\Psi}_2(x, y)$  из (2.5), используя (1.7), получаем

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial x} = r_s [G_1 \sin(r_s x) - G_2 \cos(r_s x)] \sin(q_p y), \quad (x, y) \in \Omega_0^0. \quad (3.6)$$

Если сравнить (3.1) с (3.6), можно прийти к заключению о том, что первое перейдет во второе, если в нем сделать следующие замены:  $l$  заменить на  $s$ ,  $m$  заменить на  $p$ ,  $F_1$  заменить на  $r_s/q_p = G_2$ ,  $F_2$  заменить на  $-r_s/q_p G_1$ . Поэтому по аналогии с формулами (3.2) и (3.5) представим решение (3.6) в виде

$$\bar{\Psi}_2(x, y) = [\bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y), \quad (3.7)$$

где

$$\bar{D}_1 = -\frac{\beta r_s G_1 - \mu(r_s^2 + q_p^2)G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s, \quad \bar{D}_2 = -\frac{\mu(r_s^2 + q_p^2)G_1 + \beta r_s G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s. \quad (3.8)$$

#### 4. Общее решение

Запишем однородное уравнение

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0^0. \quad (4.1)$$

Так как область  $\Omega_0^0$  — прямоугольник, то решение уравнения (4.1) будем искать в виде

$$\Psi_0(x, y) = X(x)Y(y). \quad (4.2)$$

Подставим (4.2) в уравнение (4.1) и, используя метод разделения переменных, получим

$$\frac{\mu X'' + \beta X'}{X} = -\frac{\mu Y''}{Y} \equiv \omega \equiv \text{const.}$$

Последние соотношения перепишем в виде следующих уравнений:

$$\mu Y'' + \omega Y' = 0, \quad y \in (0, q); \quad (4.3)$$

$$\mu X'' + \beta X' - \omega X = 0, \quad x \in (0, r). \quad (4.4)$$

Решив уравнение (4.3), считая  $\omega > 0$ , получаем

$$Y(y) = K_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\mu}}y\right) + K_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\mu}}y\right), \quad (4.5)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — произвольные вещественные константы. Для решения уравнения (4.4) запишем «характеристическое уравнение»

$$\mu A^2 + \beta A - \omega = 0$$

и найдем его корни

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \frac{\omega}{\mu}}, \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \frac{\omega}{\mu}}. \quad (4.6)$$

Теперь общее решение уравнения (4.3) запишем в виде

$$X(x) = C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx}. \quad (4.7)$$

Окончательно решение уравнения из (2.4) запишем в виде

$$\Psi_1(x, y) = \Psi_0(x, y) + \bar{\Psi}_1(x, y) = X(x)Y(y) + \bar{\Psi}_1(x, y). \quad (4.8)$$

## 5. Краевые условия

Удовлетворим теперь краевым условиям в (2.4). Начнем с условий по « $y$ »

$$\Psi_1(x, 0) = \Psi_1(x, q) = 0, \quad x \in (0, r).$$

Эти условия, в соответствии с (4.8), (4.5) и (3.2) примут вид

$$\Psi_1(x, 0) = X(x)K_1 = 0, \quad x \in (0, r),$$

откуда следует, что  $K_1 = 0$ . Теперь

$$\Psi_1(x, q) = X(x)K_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\mu}}q\right) = 0, \quad x \in (0, r),$$

а значит,  $\sqrt{\frac{\omega}{\mu}}q = \pi k$  или  $\omega = \mu\left(\frac{\pi k}{q}\right)^2$  для некоторого целого « $k$ ».

Таким образом,

$$\Psi_1(x, y) = X(x) \sin\left(\frac{\pi k}{q}y\right) + \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi m}{q}y\right), \quad (5.1)$$

где  $\varphi(x) = D_1 \cos(rx) + D_2 \sin(rx)$ , а функция  $X(x)$  определяется формулой (4.7). Рассмотрим теперь краевые условия «по  $x$ ». Требуется удовлетворить соотношениям

$$\Psi_1(0, y) = \Psi_1(r, y) = 0, \quad y \in (0, q). \quad (5.2)$$

В соответствии с (5.1) и формулой (4.8)

$$\Psi_1(0, y) = X(0) \sin\left(\frac{\pi k}{q}y\right) + D_1 \sin\left(\frac{\pi m}{q}y\right) = 0, \quad y \in (0, q);$$

$$\Psi_1(r, y) = X(r) \sin\left(\frac{\pi k}{q}y\right) + (-1)^l D_1 \sin\left(\frac{\pi m}{q}y\right), \quad y \in (0, q).$$

Если  $k \neq m$ , то удовлетворить последним соотношениям, в общем случае, невозможно в силу линейной независимости функций  $\sin\left(\frac{\pi k}{q}y\right)$  и  $\left(\sin\frac{\pi m}{q}y\right)$ .

Возможен частный случай:  $C_1 = C_2 = D_1 = 0$ , который мы не рассматриваем, так как он укладывается в итоговую формулу. Таким образом,  $k = m$  и из (4.7) и (5.1) получаем формулу для решения

$$\Psi_1(x, y) = [C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y). \quad (5.3)$$

Возвращаемся к краевым условиям (5.2), из этих условий и формулы (5.3) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_1, C_2$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -D_1, \\ C_1 e^{Ar} + C_2 e^{Br} = -(-1)^l D_1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$C_1 = D_1 \frac{e^{Br} - (-1)^l}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_2 = D_1 \frac{(-1)^l - e^{Ar}}{e^{Ar} - e^{Br}} \quad (5.4)$$

Эти рассуждения можно использовать для построения решения  $\Psi_2(x, y)$  задачи (2.5).

## 6. Основные формулы для стационарной модели

Выпишем все необходимые для программирования формулы. Решение задачи (2.3)

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= [C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y), \\ D_1 &= \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_1 + \beta r_l F_2}{\mu^2(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m, \quad D_2 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_2 - \beta r_l F_1}{\mu^2(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m. \end{aligned}$$

В соответствии с (5.3)

$$C_1 = D_1 \frac{e^{Br} - (-1)^l}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_2 = D_1 \frac{(-1)^l - e^{Ar}}{e^{Ar} - e^{Br}},$$

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}, \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}.$$

Аналогично для второй составляющей решения имеем

$$\Psi_2(x, y) = [\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y),$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\beta r_s G_1 - \mu(r_s^2 + q_p^2)G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s, \quad \bar{D}_2 = \frac{\mu(r_s^2 + q_p^2)G_1 + \beta r_s G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s,$$

$$\bar{C}_1 = \bar{D}_1 \frac{e^{\bar{B}r} - (-1)^s}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}, \quad \bar{C}_2 = \bar{D}_1 \frac{(-1)^s - e^{\bar{A}r}}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}},$$

$$\bar{A} = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}, \quad \bar{B} = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}.$$

Интегральные составляющие вектора горизонтальной скорости можно определить дифференцированием, по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

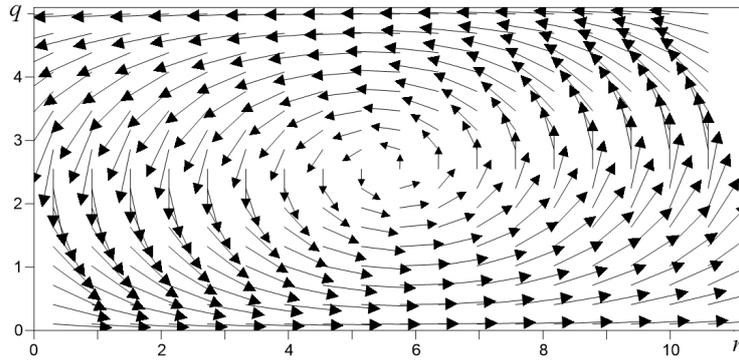


Рис. 1. Циклонический ветер с параметрами (1.9)

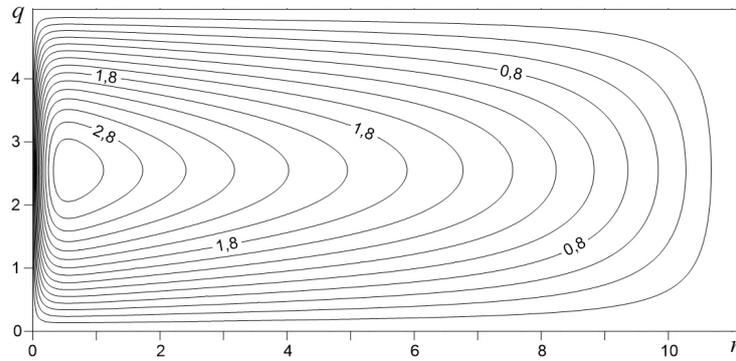


Рис. 2. Функция тока при ветре с параметрами (1.9)

## 7. Результаты численных экспериментов

Для иллюстрации рассмотрим в качестве модельного объекта прямоугольный водоем с плоским дном с характерными размерами Черного моря:  $a = 11 \cdot 10^7$  (см) = 1100 (км),  $R = 0,046$  (см/сек),  $b = 5 \cdot 10^7$  (см)  $\approx$  500 (км),  $D = 2 \cdot 10^5$  (см) = 2000 (м),  $G = 1$  (дин/см<sup>2</sup>),  $E = 1$  (см<sup>2</sup>/сек),  $\rho_0 = 1$  (г/см<sup>3</sup>),

$$f_0 = 10^{-4} \left( \frac{1}{\text{сек}} \right), \quad f_1 = 210^{-13} \left( \frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}} \right).$$

Выберем характерные масштабы

$$L = 10^7 \text{ (см)}, \quad h = 2 \cdot 10^5 \text{ (см)}, \quad u_0 = 10 \text{ (см/сек)}.$$

Тогда имеем

$$r = 11, \quad q = 5, \quad H = 1, \quad k = 0,05;$$

$$\ell_0 = 1, \quad \beta = 0,0017;$$

$$\beta = 0 \text{ — при отсутствии } \beta\text{-эффекта};$$

$$F = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}, \quad \mu = 0,0023; \quad w_0 = 0,2.$$

Ветер, рассчитанный по формуле (1.8), задавался в работах [5–9] при анализе точности вычисления вертикальной скорости. При помощи (1.7) можно описать достаточно сложную ветровую ситуацию. Например, на рис. 1 изображен циклонический ветер, полученный по формуле (1.7) при параметрах (1.9) с использованием первых мод разложения. Отметим, что в силу линейности задачи (2.3) каждая последующая мода может рассматриваться отдельно.

Соответствующая такому ветровому воздействию функция тока изображена на рис. 2, которая также носит циклонический характер.

На рис. 2 представлены получаемые точные аналитические значения для функции тока. Понятно, что задача (2.3) может быть решена численно одним из известных способов с использованием различных разностных дискретизаций. Сравнивая полученные решения с точным, можно оценить качество той или иной численной схемы.

## Заключение

Для задачи ветровой циркуляции Экмановского типа получено аналитическое решение при переменном по пространству ветровом воздействии. Полученные решения могут быть использованы в качестве эталонных для тестирования различных разностных схем. Результаты могут быть применены для построения численных моделей динамики океана и различных водоемов.

## Литература [References]

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. *Математическое моделирование циркуляции океана*. Наука, Москва, 1988. [Marchuk G.I., Sarkisyan A.S. *Matematicheskoe modelirovanie tsirkulyatsii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation*. Nauka, Moscow, 1988. (in Russian)]
2. Stommel H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
3. Stommel H. *The gulf stream. A Physical and Dynamical Description*. University of California Press, 1965.
4. Стоммел Г. *Гольфстрим*. Иностранная литература, Москва, 1965. [Stommel G. *Golfstrim = Gulfstream*. Foreign literature, Moscow, 1965. (in Russian)]
5. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. ЭкоСи-Гидрофизика, Севастополь, 2002. [Eremeev V.N., Kochergin V.P., Kochergin S.V., Sklyar S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep water basins*. Ekosi-Gidrofizika, Sevastopol, 2002. (in Russian)]
6. Kochergin V.P., Dunets T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
7. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical Test Problem of Wind Currents. In: Chaplina T. (ed.) *Processes in GeoMedia – Volume I*. Springer, Cham, 2020, pp. 17–25. DOI [10.1007/978-3-030-38177-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-38177-6_3)
8. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows. In: Chaplina T. (ed.) *Processes in GeoMedia – Volume II*. Springer, Cham, 2021, pp. 65–71. DOI [10.1007/978-3-030-53521-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-53521-6_9)
9. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*. 2019. № 2. С. 193–198. [Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical test problem of wind currents. *Processes in geoenvironments*, 2019, no. 2, pp. 193–198. (in Russian)]
10. Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Аналитическое решение тестовой задачи ветровых течений при постоянном ветре. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2021. Т. 18, № 1. С. 32–35. [Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical solution of the test problem of wind currents at constant wind. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 1, pp. 32–35. (in Russian)] DOI [10.31429/vestnik-18-1-32-35](https://doi.org/10.31429/vestnik-18-1-32-35)