Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-18-4-14-22

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С РАЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

Бабешко В. А., Кириллова Е. В., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Хрипков Д. А., Евдокимов В. С., Зарецкий А. Г.

Блочные элементы граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных обладают значительным набором различных свойств, которые находятся в процессе изучения. Зачастую выявляются определенные их свойства на примере граничных задач одного типа. Затем выявляются новые свойства, но уже для другого типа граничных задач. Естественно, возникают вопросы относительно принадлежности этих свойств обоим типам граничных задач или исключения такой возможности. В настоящей работе анализируются подобные свойства, связанные с дискретностью топологической структуры блочных элементов граничных задач для разных типов граничных задач, независимость от размерности областей рассмотрения. Рассматриваемые вопросы важны для моделирования трещин нового типа.

Ключевые слова: граничные задачи, метод блочного элемента, упакованные блочные элементы, дискретные топологические пространства, уравнение Гельмгольца.

ON THE DISCRETIZATION OF TOPOLOGICAL SPACES OF BLOCK ELEMENTS WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS FOR CRACKS OF A NEW TYPE

V. A. Babeshko[1,2], E. V. Kirillova[3], O. M. Babeshko[1], O. V. Evdokimova[2], D. A. Khripkov[1], V. S. Evdokimov[2], A. G. Zaretsky[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[3] RheinMain University of Applied Sciences in Wiesbaden, Wiesbaden, 65197, Germany

Abstract. Block elements of boundary value problems for partial differential equations have a significant set of different properties that are in the process of being studied. Often certain of their properties are revealed by the example of boundary value problems of the same type. Then new properties are revealed, but for a different type of boundary value problems. Naturally, questions arise as to whether these properties belong to both types of boundary value problems, or the exclusion of such a possibility. In this paper, we analyze similar properties related to the discreteness of the topological structure of block elements of boundary problems for different types of boundary conditions, independence from the dimension of the areas of consideration. The issues under consideration are important for modeling cracks of a new type.

Keywords: boundary value problems, block element method, packed block elements, discrete topological spaces, Helmholtz equation.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, руководитель научных направлений математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Кириллова Евгения Вадимовна, канд. физ.-мат. наук, профессор Университета прикладных наук Рейн Майн в г. Висбаден; e-mail: kirillova@web.de.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: vestnik@fpm.kubsu.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Зарецкий Александр Георгиевич, студент Кубанского государственного университета; e-mail: sam_one@mail.ru.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00213).

Введение

В настоящей работе остановимся на свойствах решений граничных задач для уравнений Гельмгольца. Им посвящены многочисленные работы, часть из которых приведена в цитированиях [1–12]. Особое значение имеют блочные элементы, построенные для граничных задач этих уравнений. Согласно теории фрактальностей, как указано в работе [13], им принадлежит важная роль в проблеме моделирования процессов и явлений макромира.

Блочные элементы нашли достаточно заметное применение в различных областях механики, прикладной математики, сейсмологии, экологии и в других науках. Так, с их применением были обнаружены новые типы землетрясений, единственных, которые можно прогнозировать, названных «стартовыми» [14], новые типы трещин, дополняющих трещины Гриффитса [15], новые способы разложения решений граничных задач сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных по решениям граничных задач отдельных уравнений в этих же областях [16]. В процессе решения этих задач применяются те или иные свойства блочных элементов.

В работе [17] исследуются свойства совокупностей блочных элементов в некоторой трехмерной области на примере граничной задачи Дирихле.

В работе [18] изучаются топологические свойства блочных элементов как объектов дискретного топологического пространства. Однако здесь исследование проводится на примере граничной задачи Неймана. Обе работы важны для дальнейшего исследования в проблеме моделирования трещин нового типа. Возникает вопрос совместимости выявленных свойств для каждого типа граничных задач. Это важно в разных вопросах применения блочных элементов. Для решения этого вопроса сопоставим результаты исследований в этих работах.

Ниже приводятся результаты сопоставления, которые подтверждают взаимную преемственность свойств блочных элементов для каждого типа граничных условий блочных элементов.

В работе [17] исследуется граничная задача Дирихле при произвольных граничных условиях для этого же уравнения. Практика применения метода блочного элемента показала, что особенный интерес вызывает исследование совокупностей блочных элементов. Здесь удается вскрывать новые свойства блочных структур, ранее не замеченных при исследовании их приближенными или только численными методами. Это же можно, в какой-то степени, отнести и к настоящей работе, где выявляются закономерности упакованных блочных элементов, их связь с дискретными топологическими пространствами.

1. Исследование первой задачи

Ниже излагается пример сопряжения упакованных блочных элементов, имеющих носители в виде неограниченных клиновидных областей.

Применением преобразования Фурье к дифференциальному уравнению трехмерной граничной задачи

$$\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2\right] \times \\ \times\, u(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1.1)$$

и граничным условиям по параметру x_3. Получаем двумерное дифференциальное уравнение с параметром вида

$$\left(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2\right) u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0,$$

$$k^2 = p^2 - \alpha_3^2.$$

Используя один из способов касательного расслоения границы, после применения двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм приходим к функциональным уравнениям вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int\limits_{\partial\Omega} \omega,$$

$$\omega = \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 - \\ - i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 + \\ + \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - \\ - i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

Здесь приняты обозначения

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \iiint\limits_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3) \times \\ \times\, e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle} dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times \\ \times e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Таким образом, граничную задачу свели к двумерной.

Правую часть в функциональном уравнении можно представить в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 - \\ - i\alpha_1 \int\limits_{-\infty}^{0} u(c, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 + \\ + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - \\ - i\alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{0} u(x_1, b, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, можем представить функциональное уравнение в форме

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3). \quad (1.2)$$

В дальнейшем прописной буквой будут обозначаться преобразования Фурье, вычисленные от функций, представленных соответствующей строчной буквой.

Рассмотрим случай задачи Дирихле. Внесем в правую часть (1.2) значения функций (1.1), имеем

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3).$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) = (\alpha_1 - \alpha_{1-})(\alpha_1 + \alpha_{1-}) = \\ = (\alpha_2 - \alpha_{2-})(\alpha_2 + \alpha_{2-}),$$

$$\alpha_{1-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2}, \\ \operatorname{Im} \alpha_{1-} \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{2-} \leqslant 0.$$

Условие автоморфизма для носителя и функций на нем приводит к псевдодифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial U(0, \alpha_{2-}, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_{2-} F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3) = 0,$$

$$\frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_{1-} F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) = 0.$$

Неизвестными в псевдодифференциальном уравнении являются функции

$$\frac{\partial U(0, \alpha_{2-}, \alpha_3)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}.$$

Решение псевдодифференциальных уравнений, найденное с требованием обращения в ноль псевдодифференциальных уравнений вне области Ω_1, приводит после преобразований к следующему виду функционального уравнения

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \left[F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)\right] (\alpha_2 - \alpha_{2-}) + \\ + \left[F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_2(0, \alpha_2, \alpha_3)\right] (\alpha_1 - \alpha_{1-}).$$

Тогда решение, представляющее упакованный блочный элемент, принимает вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times \\ \times e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3,$$

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{i}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \times \\ \times \Big\langle \left[F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)\right] (\alpha_2 - \alpha_{2-}) + \\ + \left[F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_2(0, \alpha_2, \alpha_3)\right] (\alpha_1 - \alpha_{1-}) \Big\rangle.$$

Для осуществления сопряжения упакованных блочных элементов этим же методом построим еще один упакованный блочный элемент, имеющий носитель в области Ω_2.

Повторим этот же алгоритм для построения решения $w(x_1, x_2, x_3)$ граничной задачи для уравнения Гельмгольца в указанной области

$$\left(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2\right) w(x_1, x_2, \alpha_3) = 0,$$

$$k^2 = p^2 - \alpha_3^2,$$
$$w(0, x_2, x_3) = f_4(x_2, x_3),$$
$$w(x_1, 0, x_3) = f_3(x_1, x_3).$$

После выполнения описанного выше алгоритма получаем представление решения в форме упакованного блочного элемента, имеющего представление

$$w(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times \\ \times e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3,$$

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{i}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \times \\ \times \Big\langle \left[F_3(\alpha_{1+}, 0, \alpha_3) - F_3(\alpha_1, 0, \alpha_3)\right](\alpha_2 - \alpha_{2-}) + \\ - \left[F_4(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_4(0, \alpha_2, \alpha_3)\right](\alpha_1 - \alpha_{1+}) \Big\rangle.$$

Докажем, что сопряжение построенных упакованных блочных элементов вновь приводит к упакованному блочному элементу этой же граничной задачи с носителем, являющимся объединением носителей сопрягаемых блочных элементов. Наличие угловых точек границ носителей блочных элементов не вызывает сложностей при их сопряжении. Требуя на вертикальных границах блочных элементов выполнение отношений эквивалентности, состоящих в слиянии границ носителей и совпадении на них напряжений и перемещений, а также сложение горизонтальных границ, получим выражения

$$F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) = F_4(0, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3) + F_3(\alpha_1, 0, \alpha_3) = F(\alpha_1, 0, \alpha_3).$$

Используя их, а также свойства факторизованных функций, осуществив сокращения, получаем упакованный блочный элемент в полупространстве

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{i}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \times \\ \times \Big\langle \left[F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)\right](\alpha_2 - \alpha_{2-}) + \\ + \left[F_3(\alpha_{1+}, 0, \alpha_3) - F_3(\alpha_1, 0, \alpha_3)\right](\alpha_2 - \alpha_{2-}) \Big\rangle = \\ = -\frac{i}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} F(\alpha_1, 0, \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_{2-}).$$

Для проверки построим решение этой же граничной задачи

$$\left(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2\right) v(x_1, x_2, \alpha_3) = 0,$$

$$k^2 = p^2 - \alpha_3^2, \quad x_2 \leqslant 0,$$
$$v(x_1, 0, \alpha_3) = f(x_1, 0, \alpha_3), \quad |x_1| \leqslant \infty,$$

в области Ω как методом блочного элемента, так и методом интегральных преобразований. Повторяя описанную процедуру метода блочного элемента к этой граничной задаче, получим решение в форме упакованного блочного элемента

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{i}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \times \\ \times F(\alpha_1, 0, \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_{2-}),$$

$$v(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times \\ \times e^{-\langle \alpha x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Оно совпадает с предыдущим значением.

2. Исследование второй задачи

Вторая задача посвящена исследованию топологической структуры блочных элементов уравнений Гельмгольца в виде квадрантов на плоскости. Выполним на плоскости следующие построения. Во второй работе рассматривается во всей плоскости однородное уравнение Гельмгольца вида

$$(\Delta + p^2) g = 0, \quad x_1, x_2 \in R^2 \equiv \Omega.$$

Здесь нет граничной задачи, а потому и блочного элемента, однако для иллюстрации топологической дискретизации рассматриваемое уравнение является наиболее удобным. Начинаем вводить топологическую структуру с самой грубой топологии, тривиальной. Напоминаем, что топологически блочный элемент представляет декартово произведение носителя и решения граничной задачи на носителе, представленного в виде упакованного блочного элемента. В нашем случае имеем $g = \Omega \times 0$. Топологическая структура включает открытые множества в носителе и решениях уравнения в упакованных блочных элементах. Тривиальная топология включает пустое множество и приведенное g. Расширим множество введением в рассмотренном множестве некоторых упакованных блочных элементов. Введем в прямоугольной системе координат $ox_1x_2x_3$ четыре полуплоскости с нормалями к границам, совпадающими с положительными или отрицательными координатными полуосями. Введем их обозначения $\Omega_1(|x_1| \leqslant \infty,\ x_2 > 0)$, $\Omega_2(|x_2| \leqslant \infty,\ x_1 < 0)$, $\Omega_3(|x_1| \leqslant \infty,\ x_2 < 0)$, $\Omega_4(|x_2| \leqslant \infty,\ x_1 > 0)$. В каждой области, как носителе, решим граничные задачи для уравнения Гельмгольца с приведенными ниже граничными условиями вида

$$(\Delta + p^2)g_n = 0, \quad n = 1, \ldots, 4,$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\partial_2 g_1(x_1{,}0) = q_1(x_1), \quad g_1(x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$\partial_1 g_2(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_2(x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

$$\partial_2 g_3(x_1{,}0) = q_1(x_1), \quad g_3(x_1, x_2) \in \Omega_3,$$

$$\partial_1 g_4(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_4(x_1, x_2) \in \Omega_4.$$

Здесь $q_n(x_n)$, $n = 1, 2$, некоторые гладкие функции.

В дальнейшем введем в рассмотрение двумерный $\mathbf{F}_2$ и одномерный $\mathbf{F}_1$ операторы преобразования Фурье соответственно, положив

$$\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_n),$$

$$Q(\alpha_n) = \mathbf{F}_1(\alpha_n) q(x_n) = \\ = \int_l q(x_n) \exp i\alpha_n x_n dx_n,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g(x_1, x_2) = \\ = \iint_\Omega g(x_1, x_2) \exp i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) dx_1 dx_2.$$

Здесь l, Ω являются носителями функций интегрирования. Построим решения граничных задач в форме упакованных блочных элементов. Последние имеют вид

$$g_1(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{21+}} (\alpha_2 - \alpha_{21+}) \times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$g_2(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{11-}} (\alpha_{11-} - \alpha_1) \times \\ e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$g_3(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{21-}} (\alpha_{21-} - \alpha_2) \times \\ e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$g_4(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)\alpha_{11+}} (\alpha_1 - \alpha_{11+}) \times \\ e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2},$$

$$\alpha_{11-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}.$$

Здесь $Q_n(\alpha_s) = \mathbf{F}_1(\alpha_s) q_n(x_s)$.

Таким образом, упакованные блочные элементы построены в четырех взаимно пересекающихся полуплоскостях. Они представляют блочную структуру, блоки которой имеют в качестве носителей области Ω_n, $n = 1, \ldots, 4$.

Рассмотрим множества $\Omega_n \times g_n$, $n = 1, \ldots, 4$. Введем в построенной блочной структуре топологическую структуру. Назовем внутренности каждого построенного упакованного блочного элемента и носителя, то есть открытые множества, элементами топологического пространства. Они должны обладать следующими свойствами: объединение любого числа таких элементов и пересечение конечного их числа должно быть элементом топологического пространства, то есть быть упакованным блочным элементом. Кроме этого, пустое множество и вся совокупность элементов являются элементами топологического пространства. Все перечисленные требования выполняются, кроме одного: пересечение упакованных блочных элементов обязано быть упакованным блочным элементом. Очевидно, носители упакованных блочных элементов, то есть полупространства с взаимно перпендикулярными границами имеют в качестве пересечений все четыре квадранта прямоугольной системы координат. Введем следующие их обозначение: $\Omega_5(x_1>0,\ x_2>0)$, $\Omega_6(x_1<0,\ x_2>0)$, $\Omega_7(x_1<0,\ x_2<0)$, $\Omega_8(x_1>0,\ x_2<0)$. Таким образом, для того, чтобы доказать, что введенная топологическая структура $\Omega_n\times g_n$, $\Omega_{4+n}\times\phi_n$, $n=1,\ldots,4$ действительно формирует топологическое пространство, состоящее из носителей и упакованных блочных элементов, необходимо показать, что решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в каждом квадранте представляет упакованный блочный элемент. Относительно носителей этот вопрос решен благодаря индуцированной топологии эвклидова пространства. Для блочных элементов любые два соседних блочных элемента из квадрантов должны объединяться и представлять упакованный блочный элемент полупространства. Таким образом, методом блочного элемента необходимо построить решения в форме упакованных блочных элементов в каждом квадранте следующих граничных задач

$$(\Delta+p^2)\phi_n=0,$$

$$\partial_2\phi_1(x_1,0)=q_{1+}(x_1),\quad \partial_1\phi_1(0,x_2)=q_{2+}(x_2),$$
$$\Omega_5(x_1>0,\ x_2>0),$$
$$\partial_2\phi_2(x_1,0)=q_{1-}(x_1),\quad \partial_1\phi_2(0,x_2)=q_{2+}(x_2),$$
$$\Omega_6(x_1<0,\ x_2>0),$$
$$\partial_2\phi_3(x_1,0)=q_{1-}(x_1),\quad \partial_1\phi_3(0,x_2)=q_{2-}(x_2),$$
$$\Omega_7(x_1<0,\ x_2<0),$$
$$\partial_2\phi_4(x_1,0)=q_{1+}(x_1),\quad \partial_1\phi_4(0,x_2)=q_{2-}(x_2),$$
$$\Omega_8(x_1>0,\ x_2<0).$$

Здесь приняты обозначения

$$q_{1+}(x_1)=q_1(x_1),\quad x_1\geqslant 0;$$
$$q_{2+}(x_2)=q_2(x_2),\quad x_2\geqslant 0;$$
$$q_{1-}(x_1)=q_1(x_1),\quad x_1\leqslant 0;$$
$$q_{2-}(x_2)=q_2(x_2),\quad x_2\leqslant 0.$$

Применяя традиционные методы блочного элемента, включающие этапы внешней алгебры, внешнего анализа [1–3], получаем четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте

$$\phi_n(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_n(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}\times$$
$$\times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1=$$
$$=\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle+$$
$$+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle,$$

$$\omega_2=$$
$$=\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle+$$
$$+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle,$$

$$\omega_3=$$
$$=\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle+$$
$$+\left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle,$$

$$\omega_4=$$
$$=\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle+$$
$$+\left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактор-топологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. Названными объединениями являются следующие объекты

$$\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2),$$

$$\phi_2(x_1,x_2)\cup\phi_3(x_1,x_2),$$
$$\phi_3(x_1,x_2)\cup\phi_4(x_1,x_2),$$
$$\phi_4(x_1,x_2)\cup\phi_1(x_1,x_2).$$

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полупространства. Имеем

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2) &= \\ =\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}&\times \\ \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2&+ \\ +\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}&\times \\ \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 &= \\ =\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)+\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}&\times \\ \times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2&.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\omega_1+\omega_2= \\ &=\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle+ \\ &+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle+ \\ &+\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle+ \\ &+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle.\end{aligned}$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}},\quad\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}},\quad\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},\quad\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},$$

$$\frac{\alpha_2Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}},\quad\frac{\alpha_1Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}},\quad\frac{\alpha_1Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, то есть обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль всплывает при вычислении обращений преобразований Фурье при получения значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат. Поэтому, при исчезновении границы между блочными элементами, и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах, ими следует пренебрегать, так как граница исчезает. Остаются те из них, которые сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая ненужные члены, имеем

$$\begin{aligned}\omega_1+\omega_2&=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)\rangle+ \\ &+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1-}(\alpha_1)\rangle= \\ &=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)+Q_{1-}(\alpha_1)\rangle= \\ &=\frac{\alpha_2-\alpha_{21+}}{\alpha_{21+}}Q_1(\alpha_1).\end{aligned}$$

Как и в предыдущей задаче, этот результат совпадает с решением задачи для полупространства при условии Неймана на границе, что тривиально получается тем же методом.

Вывод

Таким образом, показано, что найденные свойства блочных элементов, построенных для уравнений Гельмгольца во взятых неклассических областях сохраняются независимо от типа граничных условий.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // ПМТФ. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610
2. *Ткачева Л.А.* Колебания плавающей упругой пластины, при периодических смещениях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5 (273). С. 166–179.
3. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5 (273). С. 136–145.
4. *Ткачева Л.А.* Поведение плавающей пластины при колебаниях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 2 (270). С. 98–108.
5. *Ткачева Л.А.* Взаимодействие поверхностных и изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове с вертикальной стенкой // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 4 (320). С. 158–170.
6. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
7. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмголь-

ца // Математический сборник. 1964. Т. 65. С. 577–630.

8. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
9. *Cerveny V., Molotkov I.A., Psencik I.* Rey Method in seismology. Praha, Univerzita Karlova, 1977. 216 p.
10. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
11. *Молотков Л.А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.: Наука. 2001. 348 с.
12. *Беркович В.Н.* К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов // ДАН. Т. 34. № 1. С. 172–176.
13. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // ДАН. 2021. Т. 499. С. 30–35. DOI: 10.31857/S2686740021040039
14. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility ofpredicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229. Iss. 5. P. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0
15. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента в теории трещин нового типа // ДАН. 2020. Т. 492. С. 77–80. DOI: 10.31857/S2686740020030050
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики // ДАН. 2020. Т. 495. С. 34–38. DOI: 10.31857/S2686740020060048
17. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Исследование трехмерного уравнения Гельмгольца в клине методом блочного элемента // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 5. С. 15–21. DOI: 10.15372/PMTF20210500
18. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бушуева О.А.* Топологическая дискретизация решений граничных задач механики сплошной среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2020. Т. 16. № 3. С. 65–71. DOI: 10.31429/vestnik-17-3-65-71

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme akusticheskikh i gidrodinamicheskikh svoystv sredy, zanimayushchey oblast' trekhmernogo pryamougol'nogo klina [On the problem of acoustic and hydrodynamic properties of a medium occupying the area of a three-dimensional rectangular wedge]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2019, vol. 60, no. 6, pp. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610 (In Russian)
2. Tkacheva L.A. Kolebaniya plavayushchey uprugoy plastiny, pri periodicheskikh smeshcheniyakh uchastka dna [Oscillations of a floating elastic plate, with periodic displacements of the bottom section]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2005, vol. 46, no. 5(273), pp. 166–179. (In Russian)
3. Tkacheva L.A. Ploskaya zadacha o kolebaniyakh plavayushchey uprugoy plastiny pod deystviem periodicheskoy vneshney nagruzki [The plane problem of vibrations of a floating elastic plate under the action of a periodic external load]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2004, vol. 45, no. 5(273), pp. 136–145. (In Russian)
4. Tkacheva L.A. Povedenie plavayushchey plastiny pri kolebaniyakh uchastka dna [Behavior of the floating plate during vibrations of the bottom section]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2005, vol. 46, no. 2(270), pp. 98–108. (In Russian)
5. Tkacheva L.A. Vzaimodeystvie poverkhnostnykh i izgibno-gravitatsionnykh voln v ledyanom pokrove s vertikal'noy stenkoy [Interaction of surface and flexural-gravity waves in an ice cover with a vertical wall]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2013, vol. 54, no. 4(320), pp. 158–170. (In Russian)
6. Brekhovskikh L.M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)
7. Babich V.M. O korotkovolnovoy asimptotike funktsii Grina dlya uravneniya Gel'mgol'tsa [On the short-wavelength asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation]. Matematicheskiy sbornik [Mathematical collection], 1964, vol. 65, pp. 577–630. (In Russian)
8. Babich V.M., Buldyrev V.S. *Asimptoticheskie metody v probleme difraktsii korotkikh voln* [Asymptotic methods in the problem of short wave diffraction]. Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)
9. Cerveny V., Molotkov I.A., Psencik I. *Rey Method in seismology.* Praha, Univerzita Karlova, 1977.
10. Mukhina I.V. Priblizhennoe svedenie k uravneniyam Gel'mgol'tsa uravneniy teorii uprugosti i elektrodinamiki dlya neodnorodnykh sred [Approximate reduction to the Helmholtz equations of the equations of the theory of elasticity and electrodynamics for inhomogeneous media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1972, vol. 36,

pp. 667–671. (In Russian)

11. Molotkov L.A. *Issledovanie rasprostraneniya voln v poristykh i treshchinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Bio i sloistykh sred* [Study of wave propagation in porous and fractured media based on effective Biot models and layered media]. Nauka, S.-Pb., 2001. (In Russian)
12. Berkovich V.N. K teorii smeshannykh zadach dinamiki klinovidnykh kompozitov [To the theory of mixed problems of the dynamics of wedge-shaped composites]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], vol. 34, no. 1, pp. 172–176. (In Russian)
13. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fraktal'nye svoystva blochnykh elementov i novyy universal'nyy metod modelirovaniya [Fractal properties of block elements and a new universal modeling method]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2021, vol. 499, pp. 30–35. DOI: 10.31857/S2686740021040039 (In Russian)
14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility ofpredicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0
15. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Metod blochnogo elementa v teorii treshchin novogo tipa [Block element method in the theory of new-type cracks]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2020, vol. 492, pp. 77–80. DOI: 10.31857/S2686740020030050 (In Russian)
16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Metod blochnogo elementa v razlozhenii resheniy slozhnykh granichnykh zadach mekhaniki [Block element method in the expansion of solutions to complex boundary value problems in mechanics]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2020, vol. 495, pp. 34–38. DOI: 10.31857/S2686740020060048 (In Russian)
17. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Issledovanie trekhmernogo uravneniya Gel'mgol'tsa v kline metodom blochnogo elementa [Study of the three-dimensional Helmholtz equation in a wedge by the block element method]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2021, vol. 62, no. 5, pp. 15–21. DOI: 10.15372/PMTF20210500 (In Russian)
18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Bushueva O.A. Topologicheskaya diskretizatsiya resheniy granichnykh zadach mekhaniki sploshnoy sredy [Topological discretization of solutions to boundary value problems in continuum mechanics]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulettin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2020, vol. 16, no. 3, pp. 65–71. DOI: 10.31429/vestnik-17-3-65-71 (In Russian)

Статья поступила 21 декабря 2021 г.