



УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-1-58-64

Контактная задача о скольжении параболического индентора по гетерогенному основанию

О. А. Беляк , Т. В. Суворова 

Ростовский государственный университет путей сообщения, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2, Ростов-на-Дону, 344038, Россия

✉ Беляк Ольга Александровна; e-mail: belyak.o.a@gmail.com

Рассмотрена квазистатическая контактная задача о скольжении штампа с параболическим основанием по границе изотропной пористоупругой флюидонасыщенной полуплоскости при учете трения в области контакта. Микроструктура основания учтена в рамках двух подходов — модели Био–Френкеля и концепции эквивалентной гомогенности. Исследованы зависимости напряжений в области контакта и в ее проекции по глубине основания от пористоупругости и флюидонасыщенности гетерогенной среды, коэффициента трения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА квазистатическая контактная задача, флюидонасыщенная пористая среда, фрикционный контакт, модель Био–Френкеля.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Публикация осуществлена в рамках реализации гранта ОАО «РЖД» на развитие научно-педагогических школ в области железнодорожного транспорта.

ПОЛУЧЕНО 25 января 2022 г. **ПРИНЯТО** 14 февраля 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 марта 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Беляк О. А., Суворова Т. В. Контактная задача о скольжении параболического индентора по гетерогенному основанию // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 58–64. DOI 10.31429/vestnik-19-1-58-64

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Contact Problem of Sliding a Parabolic Indenter on a Heterogeneous Base

Olga A. Belyak✉, Tatyana V. Suvorova

Rostov State Transport University, Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya Sq., 2, Rostov-on-Don, 344038, Russia

✉ Olga A. Belyak; e-mail: belyak.o.a@gmail.com

The contact problem of the motion of a punch with a parabolic base shape along a heterogeneous fluid-saturated half-space is considered in a quasi-static formulation, taking into account friction in the contact area. A multiphase heterogeneous medium is described by the Biot-Frenkel model, and within the framework of the concept of effective homogeneity, an equivalent homogeneous medium is considered. The boundary value problem for the Biot medium is reduced to an integral equation of the 1st kind with a difference kernel having a logarithmic singularity using the Fourier transform. The solution of the integral equation is constructed by the boundary element method. The solution of the boundary value problem for an equivalent medium is implemented by the finite element method in the ANSYS software package. Based on the constructed solution of the contact problem, the influence of the mechanical properties of a heterogeneous medium, the friction coefficient on the stress state in the contact area and in its projection along the base depth is studied, which is of great practical importance in the design of new nanomodified antifriction composite materials. For this purpose, numerical experiments are carried out on the example of a nanomodified composite with a matrix of phenylone modified with an ultrafine additive of aluminum-magnesium spinel and cylinder oil. The effect of porosity, fluid saturation, the friction coefficient on the stress state of the base is studied.

KEYWORDS quasi-static contact problem, fluid-saturated porous medium, frictional contact, Biot-Frenkel model.

FUNDING The publication was carried out as part of the implementation of the grant of JSC “Russian Railways” for the development of scientific and pedagogical schools in the field of railway transport.

RECEIVED 25 January 2022. **ACCEPTED** 14 February 2022. **PUBLISHED** 30 March 2022.

CITE AS Belyak O. A., Suvorova T. V. Contact problem of sliding a parabolic indenter on a heterogeneous base. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 58–64. DOI 10.31429/vestnik-19-1-58-64

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Контактные задачи и их приложения к трибологии привлекают внимание многих исследователей [1–6]. Современный обзор постановок и подходов, применяемых при решении контактных задач, приведен в монографиях [2–5]. Заметим, что свойства контактирующих поверхностей в значительной степени влияют на силу трения. [2–4], в следующих работах представлено влияние микропериодической слоистой [7] и функционально-градиентной [8] структуры основания. В настоящей работе рассматривается контактная задача в квазистатической постановке при учете внутренней микроструктуры контактирующей среды с жестким штампом параболической формы. Микроструктура основания пористоупругой флюидонасыщенной среды учитывается использованием, как определяющих, уравнений гетерогенной двухфазной среды Био [6, 9, 10]. Микроструктура основания также учтена в рамках концепции эффективной гомогенности, рассматривается эквивалентная ей однородная среда.

1. Постановка и решение контактной задачи

Рассмотрим контактную задачу в квазистатической постановке о движении жесткого штампа с трением по основанию при учете его микроструктуры. Рассмотрим плоскую область $-\infty < x_1 < \infty, x_2 \leq 0$, занятую двухфазной средой, состоящей из изотропной пористой матрицы-скелета и флюида, заполняющего поры. По лицевой непроницаемой границе гетерогенной среды скользит жесткий штамп с параболическим основанием со скоростью V под действием силы $\mathbf{P} = \{P_1, P_2\}$, которая приложена к штампу так, чтобы обеспечить полный контакт с поверхностью при равномерном движении. Будем рассматривать диапазон скоростей, намного меньших скорости поверхностных волн типа Релея. Краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned} A\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2N\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} &= \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}, \\ Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + R\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{ij}^s &= Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Q\varepsilon\delta_{ij}, \quad \sigma^f = Qe + R\varepsilon, \quad i, j = 1, 2, \\ e &= \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f, \\ x_2 = 0 : u_2 &= v_2, \quad \Gamma_{21} = \Gamma_{22} = 0, \quad |x_1 - Vt| \notin \Omega, \\ \Gamma_{21} &= \mu_{tr} \Gamma_{22}, \quad u_2 = -\delta + g(x_1), \quad |x_1 - Vt| \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $A, N, Q, R, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ — механические характеристики двухфазной среды [6, 10], e_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров деформации, соответствующих векторам перемещений твердой фазы $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$ и жидкой фазы $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$ соответственно, μ_{tr} — коэффициент трения. Тензор напряжений, действующий на скелет σ^s , и давления σ^f , действующие на флюид в порах. Определению подлежат область контакта Ω для штампа с параболическим основанием и контактные напряжения $q(x_1) = -\Gamma_{22}$. Задачи о скольжении штампа по границе упругого основания различного строения с учетом сил трения рассматривались в работах [2–5, 7–9, 11], действие движущейся осциллирующей нагрузки на гетерогенное основание изучалось в работе [12], вибрация штампа при учете трения — в работе [13].

Применим к соотношениям (1.1) интегральное преобразование Фурье по переменной x_1 , затем перейдем в подвижную систему координат, связанную со штампом $x = x_1 - Vt, y = x_2$ [6]. Соотношения (1.1) далее будем рассматривать в подвижной системе координат.

В результате преобразований, подробно описанных в работе [6], приходим к интегральному уравнению относительно нормальных контактных давлений $q(\xi)$

$$\int_{-a_1}^{a_2} k(x - \xi)q(\xi)d\xi = f(x), \quad (1.2)$$

где $f(x) = -\delta + x^2/2R$, а ядро интегрального уравнения (1.2) имеет вид

$$k(x - \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_{tr} B_{21}(\alpha) + B_{22}(\alpha)) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha,$$

где α — параметр преобразования Фурье. Элементы матрицы Грина $B_{2k}(\alpha)$, $k = 1, 2$ для гетерогенного полупространства имеют вид

$$B_{21} = i\alpha^{-1} \frac{2(m_1 - m_2)w_1w_2w_3 + g_4(g_1V_{01} + 2) - g_3(g_2V_{02} + 2)}{\Delta},$$

$$B_{22} = \frac{|\alpha|^{-1} (m_1 - m_2)w_1w_2V_{03}}{\Delta},$$

$$\Delta = 4(m_2 - m_1)w_1w_2w_3 - 2g_3w_1(V_{02} - 2) + 2g_4w_2(V_{01} - 2) + (m_1 - 1)w_1V_{03}(g_2V_{02} - 2) - (m_2 - 1)w_2V_{03}(g_1V_{01} - 2), \quad (1.3)$$

$$g_k = q_{11} + q_{12}(m_k + 1) + q_{22}m_k, \quad g_{k+2} = m_k + \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}, \quad k = 1, 2,$$

$$V_{0i} = \left(\frac{V}{V_i}\right)^2, \quad w_i = \sqrt{1 - V_{0i}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Скорости распространения двух продольных и поперечной волны в гетерогенной среде V_i , $i = 1, 2, 3$, а m_k , $k = 1, 2$, являются корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от механических параметров гетерогенной среды. Далее будем рассматривать квазистатический процесс для скорости движения штампа $V \ll V_R$, V_R — скорость поверхностных волн типа Релея в пористоупругом полупространстве. Затем, в соотношениях (1.3), осуществляя разложение в ряд по малым параметрам V/V_i , $i = 1, 2, 3$, получим вид ядра интегрального уравнения, отвечающего квазистатическому процессу

$$k(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\mu_{tr}K_1}{\alpha} + \frac{K_2}{|\alpha|} \right) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha, \quad (1.4)$$

$$K_1 = \Theta_{10}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + \zeta^2 \Theta_{11}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + O(\zeta^4), \quad i, j = 1, 2,$$

$$K_2 = \Theta_{20}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + \zeta^2 \Theta_{21}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m) + O(\zeta^4), \quad \zeta = \frac{V}{V_1},$$

$$q_{11} = \frac{A}{N} + 2, \quad q_{12} = \frac{Q}{N}, \quad q_{22} = \frac{R}{N},$$

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho_s}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho_s}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho_s}.$$

Функции $\Theta_{i0}(q_{ij}, \gamma_{ij}, m)$, $i, j = 1, 2$ имеют громоздкие выражения, приведенные в [5, 6]. Произведя регуляризацию интегрального уравнения (1.2) и выделяя в соотношении (1.4) логарифмическую особенность, получим следующее выражение ядра:

$$k(x - \xi) = -0,5 \operatorname{sgn}(x - \xi) \mu K_1 - \frac{(C + \ln|x - \xi|)K_2}{\pi}, \quad (1.5)$$

где C — постоянная Эйлера.

Решение интегрального уравнения (1.2) с ядром (1.5) реализуем численно методом граничных элементов. С этой целью область контакта, заведомо бо́льшая, чем искомая, была разбита точками x_i , $i = \overline{1, N}$, равномерно, узлы ξ_k , $k = \overline{1, N}$, размещены в середине соответствующих отрезков разбиения, при этом считаем, что функция $q(\xi)$ принимает постоянные значения на

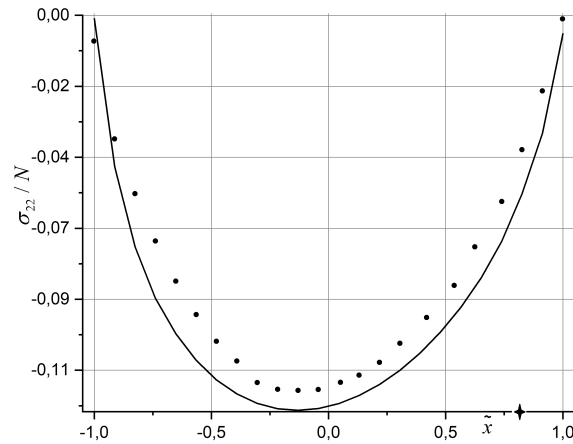


Рис. 1. Распределение нормальных контактных напряжений под штампом: сплошная линия — эквивалентная упругая среда, маркеры — среда Био

элементах разбиения. Таким образом, в результате дискретизации интегрального уравнения (1.2) получим алгебраическую систему относительно узловых значений неизвестной функции

$$\sum_{i=1}^N r_{ik} q_i = p_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.6)$$

$$r_{ik} = \frac{\operatorname{sgn}(x_i - \xi_k) \mu K_{1ik}}{2} - \frac{K_{2ik}(C + \ln|x_i - \xi_k|)}{\pi}, \quad p_k = f(\xi_k).$$

Определение области контакта и контактного давления осуществляется согласно алгоритму, подробно описанному в работе [2] в случае пространственной контактной задачи. При этом для дискретизации выбирается область $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, заведомо большая, чем истинная область контакта $\Omega = (-a_1, a_2)$ и учитывается, что $q(-a_1) = q(a_2) = 0$. Сила и ее момент, действующие на штамп, определяются через решения системы (1.6), величина эксцентриситета $e = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i q_i}{\sum_{i=1}^{N_1} q_i}$. В работе [14] изложен схожий алгоритм определения симметричной области контакта.

В рамках поставленной задачи (1.1) был рассмотрен другой подход к учету микроструктуры основания, который был реализован при использовании концепции эффективной гомогенности в случае равенства скоростей фаз. Была рассмотрена эквивалентная однородная изотропная среда [6, 15]. Перемещения однородной среды $\mathbf{u}^o = \{u_1^o(x_1, x_2), u_2^o(x_1, x_2)\}$ удовлетворяют уравнениям Ламе, связь перемещений \mathbf{u}^o и напряжений σ^o дается обобщенным законом Гука. Построение решения контактной задачи в этом случае было реализовано численно на основании программы на языке APDL в программном комплексе ANSYS.

2. Результаты численного эксперимента

В соответствии с изложенными подходами к решению контактной задачи было проведено исследование напряженно-деформированного состояния среды при контактом взаимодействии с жестким штампом. Расчеты проводились для механических характеристик, соответствующих композиционному материалу с матрицей из конструкционного материала фенилона, модифицированного шинелью (3 %, об.) и содержанием наполнителя — цилиндрического масла (ϕ %, об.) [6] при следующих данных: $K_s = 6,28$ ГПа, $K_f = 2$ ГПа, $N = 2,29$ ГПа, $\rho_s = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_f = 0,93 \cdot 10^3$ кг/м³, $K_b(m = 7 \%) = 4,94$ ГПа, $b = 0$. Механические характеристики эквивалентной однородной упругой среды: $E(\phi = 3 \%) = 5,76$ ГПа, $E(\phi = 5 \%) = 5,51$ ГПа, $E(\phi = 7 \%) = 5,27$ ГПа, $\nu(\phi = 3 \%) = 0,332$, $\nu(\phi = 5 \%) = 0,327$, $\nu(\phi = 7 \%) = 0,322$, $\delta/R = 0,025$, $V/V_1 = 0,44 \cdot 10^{-3}$. Корректное определение механических свойств такого

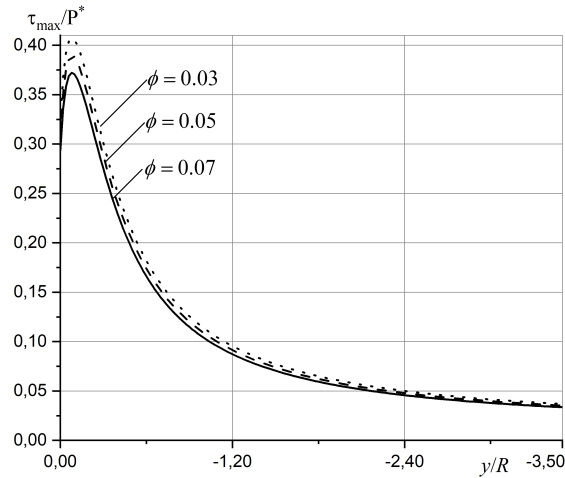


Рис. 2. Максимальные касательные напряжения под штампом $(\tilde{x}^*, 0)$ и в его проекции в зависимости от глубины основания при различных значениях маслонасыщенности композита

композиционного материала проведено на основании дифференциальной схемы метода самосогласования [6, 15] при использовании экспериментальных данных, полученных методом наноиндентирования и стандартных испытаний на растяжение-сжатие образца. Количество разбиений области $\tilde{\Omega}$ оценивалось путем сопоставления невязки для количества разбиений N и $3N$. Измельчение сетки производилось до относительного значения невязки, меньшего, чем 10^{-4} .

Исследование влияния скорости движения штампа на контактные напряжения (при первом и втором способе описания микроструктуры среды) показало их слабую зависимость от этого параметра. При малой скорости движения штампа, характерной для трибологических испытаний, аналитически показано, что ядро интегрального уравнения (1.4), отвечающее квазистатическому процессу, имеет слабую зависимость от скорости [3, 6, 9]. В целом, контактные напряжения, полученные в рамках двух моделей учета микроструктуры основания, находятся в согласии, что иллюстрирует рис. 1, а эпюра нормальных контактных напряжений для эквивалентной упругой среды совпадает с аналитическим решением, полученным в работе [3], при $\tau_0 = 0$.

На рис. 1 приведены безразмерные контактные нормальные напряжения для среды Био (маркеры) и эквивалентной упругой среды (сплошная линия) для композиционного материала с содержанием масляного наполнителя (7 %, об.), $m = 0,07$, $\mu_{tr} = 0,3$. Область контакта $\Omega : -a_1 \leq x \leq a_2$ на рис. 1 нормирована, $\tilde{x} = (x - (l - a_1)) / l$, $l = (a_1 + a_2) / 2$.

Особое внимание было уделено анализу влияния пористости и флюидонасыщенности на величину контактных напряжений. Распределение напряжений по области контакта несимметрично, что характерно и для контактных задач теории упругости при учете сил трения [3]. С увеличением пористости и флюидонасыщенности, коэффициента трения эксцентриситет приложения силы, обеспечивающей движение штампа без поворота, увеличивается, область контакта смещается относительно оси симметрии штампа с параболическим основанием (рис. 1). Изменение границ области контакта в зависимости от пористости, флюидонасыщенности среды, коэффициента трения представлены в работе [9].

На рис. 2 приведены максимальные касательные напряжения под штампом в точке $(\tilde{x}^*, 0)$, абсцисса которой отмечена на рис. 1 маркером «*» и в ее проекции на разной глубине основания для некоторых значений маслонасыщенности композиционного материала (ϕ , об.), описанного в рамках концепции эквивалентной гомогенности, $\mu_{tr} = 0,3$, P^* — среднее значение вдавливающей силы.

На рис. 3 приведены максимальные касательные напряжения под штампом при некоторых значениях коэффициента трения μ_{tr} для значений механических характеристик среды при $\phi = 0,07$.

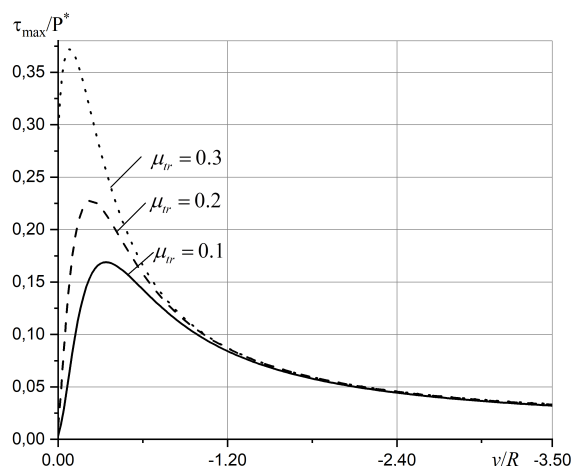


Рис. 3. Максимальные касательные контактные напряжения под штампом $(\tilde{x}^*, 0)$ и в его проекции на разной глубине основания при различных значениях коэффициента трения μ_{tr}

Характер убывания напряжений от поверхности среды вглубь, начиная с некоторого значения y , монотонный. Максимальные касательные напряжения при тех же условиях (рис. 2) имеют максимум значений на некоторой глубине под штампом, при этом гораздо большее влияние на величину максимальных касательных напряжений под штампом и в его проекции на разной глубине основания оказывает коэффициент трения, сдвигая значение экстремума по глубине основания.

Заключение

На основании построенного решения квазистатической контактной задачи при учете трения в области контакта для флюидонасыщенного основания показана возможность описания микроструктуры среды в рамках среды Био и эквивалентной гомогенной средой при отсутствии межфазного взаимодействия, при этом полученные решения отличаются не более 8 %. На основании численных экспериментов установлено, что процентное содержание флюида, учет трения в области контакта оказывает существенное влияние на контактные напряжения, асимметрию области контакта. Исследованы зависимости максимальных касательных напряжений по глубине основания в проекции штампа от механических характеристик среды, коэффициента трения. Показано наличие одного подповерхностного максимума напряжений, который путем варьирования коэффициента трения сдвигается ближе к поверхности основания.

Литература [References]

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения. *Доклады Академии наук*, 2018, т. 480, № 5, с. 537–541. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block elements in contact problems with a variable friction coefficient. *Doklady akademii nauk = Reports of the Russian Academy of Sciences*, 2018, vol. 63, no. 6, pp. 239–243. (in Russian)] DOI [10.7868/S0869565218050067](https://doi.org/10.7868/S0869565218050067)
2. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И. *Трение эластомеров*. Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2017. [Goryacheva I.G. Makhovskaya Yu.Yu., Morozov A.V., Stepanov F.I. *Trenie elastomerov = Friction of elastomers*. Institute of Computer Research Publ., Moscow–Izhevsk, 2017. (in Russian)]
3. Горячева И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. Наука, Москва, 2001. [Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya = Mechanics of frictional interaction*. Moscow, Nauka, 2001. (in Russian)]
4. Торская Е.В. *Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями*. Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2020. [Torskaya E.V. *Modeli friktsionnogo vzaimodeystviya tel s*

- pokrytiyami* = *Models of frictional interaction of bodies with coatings*. Institute of Computer Research Publ., Moscow–Izhevsk, 2020. (in Russian)]
5. Солдатенков И.А. *Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа*. Физматкнига, Москва, 2010. [Soldatenkov I.A. *Iznosokontaktная задача s prilozheniyami k inzhenerному raschetу iznosa* = *Wear-contact problem with applications to engineering calculation of wear*. Fizmatkniga, Moscow, 2010. (in Russian)]
 6. Колесников В.И., Беляк О.А. *Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов*. Физматлит, Москва, 2021. [Kolesnikov V.I., Belyak O.A. *Matematicheskie modeli i eksperimental'nye issledovaniya – osnova konstruirovaniya geterogennykh antifriktsionnykh materialov* = *Mathematical models and experimental studies are the basis for the design of heterogeneous antifriction materials*. Fizmatlit, Moscow, 2021. (in Russian)]
 7. Sebastianiuk P., Perkowski D.M., Kulchytsky-Zhyhailo R. On contact problem for the microperiodic composite half-plane with slant layering. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, vol. 182, p. 105734. DOI [10.1016/j.ijmecsci.2020.105734](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105734)
 8. Balci M.N. The effect of punch speed on frictional contact mechanics of finitethickness graded layer resting on the rigid foundation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, vol. 42, p. 343. DOI [10.1007/s40430-020-02406-2](https://doi.org/10.1007/s40430-020-02406-2)
 9. Суворова Т.В., Беляк О.А. Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения. *Прикладная математика и механика*, 2020, т. 84, № 4, с. 529–539. [Suvorova T.V., Belyak O.A. Contact problems for porous composite in the presence of friction forces. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = *Applied mathematics and mechanics*, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 522–532. (in Russian)] DOI [10.31857/S0032823520040104](https://doi.org/10.31857/S0032823520040104)
 10. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде. *Математика. Период. сб. переводов иностр. статей*, 1963, вып. 6, № 82, с. 103–134. [Bio M.A. Mechanics of deformation and propagation of acoustic waves in a porous medium. *Matematika: periodicheskiy sbornik perevodov inostrannykh statey* = *Mathematics. Periodic collection of translations of foreign articles*, 1963, vol. 82, no. 6, pp. 103–134. (in Russian)]
 11. Balci M.N., Dag S. Dynamic frictional contact problems involving elastic coating. *Tribology International*, 2018, vol. 124, pp. 70–92. DOI [10.1016/j.triboint.2018.03.033](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.03.033)
 12. Суворова Т.В., Беляк О.А., Усошин С.А. Волновое поле, генерируемое в слоистом пористоупругом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2008, № 1, с. 53–61. [Suvorova T.V., Belyak O.A., Usoshin S.A. A wave field generated in porous two-layered half-space by the action of an oscillating moving load. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* = *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2008, no. 1, pp. 53–61. (in Russian)]
 13. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Mater. Phys. Mech*, 2020, vol. 46, no. 1, p. 139–148. DOI [10.18149/mpm.4612020_14](https://doi.org/10.18149/mpm.4612020_14)
 14. Ватульян А.О., Плотников Д.К. К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, № 3, с. 285–295. [Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. On the study of the contact problem for an inhomogeneous elastic strip. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = *Applied mathematics and mechanics*, 2021, vol. 85, no. 3, pp. 285–295. (in Russian)] DOI [10.31857/S0032823521030103](https://doi.org/10.31857/S0032823521030103)
 15. Belyak O.A., Suvorova T.V. Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two-phase microstructure. *Solid State Phenomena*, 2020, vol. 299, pp. 124–129. DOI [10.4028/www.scientific.net/SSP.299.124](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.299.124)