

УДК 548.55

ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ*Н. М. Богатов¹, А. П. Савченко²*

STRAIN WAVES IN ELASTO-PLASTIC MEDIUM

Bogatov N. M., Savchenko A. P.

The effect of strain waves on the formation of edge dislocations density in elasto-plastic medium has been analyzed on the basis of the gauge theory of defects. Dynamic equations for elasto-plastic medium with dislocations have been derived. Dispersion relationships for eigenwaves have been obtained. It has been determined that amplitudes and phases of edge dislocations density waves depend on the characteristics of waves from longitudinal and transverse displacements.

Введение

Физические свойства твердых тел зависят от распределения дефектов. Дислокации являются неравновесными структурными дефектами, они образуются под действием механических, термических нагрузок, в процессе выращивания кристаллов. Краевые дислокации оказывают влияние на поведение упругих полей, например, в слоистой среде [1]. Состояние пластичности тела определяет условия образования дефектов [2]. Исследование закономерностей образования волн деформации в упруго-пластической среде актуально для решения задач материаловедения, сейсмологии, акустики и др.

Цель данной работы — определение взаимосвязи волн смещений и дислокаций в упруго-пластической среде.

Для описания деформаций в неидеальном твердом теле использована калибровочная теория структурных дефектов [3]. Различными авторами предложено несколько вариантов калибровочной теории структурных дефектов [4–6], обобщающих геометрию рима-

новых и неримановых пространств, рассматривающих дефекты как следствие неоднородности группы непрерывных преобразований пространственного континуума. В калибровочной теории структурных дефектов [3] учитываются термические деформации, упруго-пластический континуум с дефектами отображается в 4-хмерное пространство расслоенного пространства $L_{4,5}$, база которого есть вещественное 4-хмерное евклидово пространство R_4 , а слой — вещественное 5-мерное пространство аффинной связности L_5 . Структурные дефекты описываются полем объекта связности в L_5 .

1. Уравнения колебаний упруго-пластической среды с дислокациями

Волновая природа пластической деформации твердых тел обсуждалась в работах [4, 5, 7]. Собственные и вынужденные волны деформаций упруго-пластической среды не изучались. Из полевых уравнений теории [3] в линейном приближении следует система волно-

¹Богатов Николай Маркович, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей физики и информационных систем Кубанского государственного университета.

²Савченко Андрей Павлович, аспирант кафедры общей физики и информационных систем Кубанского государственного университета.

вых уравнений, описывающих динамику дислокаций:

$$\begin{aligned} e^{abc} \partial_b H_c^{(j)} &= \partial_0 E^{a(j)} - \frac{1}{2s_2} \sigma^{ab} \delta_b^{(j)}, \\ e^{abc} \partial_b E_c^{(j)} &= -\partial_0 H^{a(j)}, \\ \partial_j H^{j(k)} &= 0, \\ \partial_j E^{j(k)} &= -\frac{1}{2s_2} \rho c^2 \partial_0 u^{(k)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где e^{abc} — символ Леви-Чивитта; ∂_0, ∂_j — частные производные по временной $x^0 = ct$ и пространственным x^j координатам в R_4 ; $H^{j(k)} = P^{0j(k)}$, $P^{0j(k)}$ — k -компонента суммарного вектора Бюргерса дефектов, пересекающих единичную площадку с вектором нормали в направлении j , или пространственный тензор плотности дефектов; $E_s^{(k)} = -\frac{1}{2} e_{sj} P^{ij(k)}$, $P^{ij(k)}$ — поток пространственного тензора плотности дефектов в направлении i ; σ_{ab} — тензор напряжений; $\delta_b^{(j)}$ — символ Кронекера; s_2 — константа теории, характеризующая пластические свойства кристалла; ρ — плотность материала; c — скорость света; $u^{(k)}$ — k -компонента малых смещений среды; латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; индексы в скобках обозначают компоненты в L_5 . Во всех операциях с тензорами используется правило: по совпадающим индексам выполняется суммирование. Система (1.1) имеет структуру уравнений Максвелла. Аналогия уравнений динамики дефектов с уравнениями электродинамики отмечалась в работах [4, 5].

Для упрощения расчетов считаем среду изотропной. Дислокации, являющиеся трансляционными дефектами, описываются полевыми переменными $\Theta_b^{(k)}$. Компоненты тензора напряжений термоупругой среды с дислокациями имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \lambda \delta_{ab} (\partial_k u_k + \Theta_{kk} - 3\alpha T) + \\ &+ \mu (\partial_a u_b + \Theta_{ab} + \\ &+ \partial_b u_a + \Theta_{ba} - 2\delta_{ab} \alpha T), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где λ, μ — коэффициенты Ламэ; $u_k = \delta_{k(i)} u^{(i)}$; $\Theta_{ba} = \delta_{a(k)} \Theta_b^{(k)}$; α — коэффициент термического расширения; T — абсолютная температура.

Поверхностная плотность дислокаций с компонентой вектора Бюргерса $b^{(k)}$, пересека-

ющих поверхность тела с нормалью в направлении i , определяется формулой

$$N_D^{ik} = \left| \frac{H^{i(k)}}{b^{(k)}} \right|. \quad (1.3)$$

Компоненты N_D^{ik} не образуют тензор, суммирования по индексу k в правой части формулы (1.3) нет. Измеряемые величины N_D^{ik} положительны.

Выразим $E_j^{(k)}$ и $H^{j(k)}$ через полевые переменные $\Theta_b^{(k)}$

$$H^{j(k)} = \frac{1}{2} e^{jsb} \left[\frac{\partial}{\partial x^s} \Theta_b^{(k)} - \frac{\partial}{\partial x^b} \Theta_s^{(k)} \right], \quad (1.4)$$

$$E_j^{(k)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial x^0}. \quad (1.5)$$

Используя систему уравнений (1.1) и соотношения (1.4), (1.5), получим уравнения для $\Theta_b^{(k)}$

$$\begin{aligned} &-\Delta \frac{1}{2} e^{ipk} \left[\frac{\partial}{\partial x^p} \Theta_k^{(s)} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Theta_p^{(s)} \right] = \\ &= -\partial_0^2 \frac{1}{2} e^{ipk} \left[\frac{\partial}{\partial x^p} \Theta_k^{(s)} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Theta_p^{(s)} \right] - \\ &-\frac{1}{2s_2} e^{ikp} \partial_k \left[\lambda \delta_p^{(s)} (\Theta_{ff} - 3\alpha T + \partial_f u_f) + \right. \\ &+ \mu (\Theta_p^{(s)} + \delta_{p(f)} \delta^{(s)g} \Theta_g^{(f)} + \partial_p u^{(s)} + \\ &+ \delta_{p(f)} \delta^{(s)g} \partial_g u^{(f)} - 2\alpha T \delta_p^{(s)}) \left. \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\partial_0 \partial_j \Theta_{kj} = -\frac{1}{s_2} \rho c^2 \partial_0 u_k, \quad (1.7)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнения (1.6), (1.7) дополним уравнением движения среды с дислокациями, выведенным из полевых уравнений теории [3]

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu) \partial_j (\partial_m u_m) + \mu \Delta u_j - \\ &\rho c^2 \partial_0^2 u_j + \lambda \partial_j (\Theta_{mm} - 3\alpha T) + \\ &+ \mu \partial_j (\Theta_{ij} + \Theta_{ji} - 2\delta_{ij} \alpha T) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя систему уравнений (1.6)–(1.8), изучим характеристики собственных и вынужденных колебаний упруго-пластической среды с дислокациями в поле постоянной температуры.

2. Волны деформаций упруго-пластической среды с дислокациями

Пусть волны распространяются в направлении оси Y декартовой системы координат X, Y, Z

$$u_j(t, y) = U_j \exp \{i(\omega t - ky)\}, \quad (2.1)$$

$$\Theta_{ij}(t, y) = B_{ij} \exp \{i(\omega t - ky)\}, \quad (2.2)$$

где U_j и B_{ij} — амплитуды колебаний полей $u_j(t, y)$, $\Theta_{ij}(t, y)$ соответственно; ω — частота гармонических колебаний; k — волновое число. Подставив (2.1), (2.2) в (1.6)–(1.8), получим систему линейных алгебраических уравнений для амплитуд колебаний U_j, B_{ij} .

Рассмотрим продольные волны смещений среды, тогда $U_2 \neq 0$, $U_1 = 0$, $U_3 = 0$. Решение однородных уравнений, не содержащих U_2 , считаем тривиальным. Взаимосвязанные колебания дислокаций и смещений описываются уравнениями

$$B_{11}\lambda + B_{22}(\lambda + 2\mu) + B_{33}\lambda + \\ + iU_2 \left[\frac{\rho\omega^2}{k} - (\lambda + 2\mu)k \right] = 0, \quad (2.3)$$

$$B_{11}(2k^2s_2 + 2\mu + \lambda) + B_{22}\lambda + \\ + B_{33}\lambda - i\lambda k U_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$B_{11}\lambda + B_{22}\lambda + \\ + B_{33}(2k^2s_2 + 2\mu + \lambda) - i\lambda k U_2 = 0, \quad (2.5)$$

$$kB_{22} + \frac{i}{s_2}\rho c^2 U_2 = 0. \quad (2.6)$$

Выразим U_2 через B_{22} из (2.6) и подставим в уравнения (2.3)–(2.5). Ненулевые решения для B_{11}, B_{22}, B_{33} существуют, если определитель однородной системы уравнений равен нулю

$$\begin{vmatrix} \lambda & \beta & \lambda \\ 2\alpha & \lambda\gamma & \lambda \\ \lambda & \lambda\gamma & 2\alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Здесь $\alpha = k^2s_2 + \lambda/2 + \mu$, $\gamma = 1 + \frac{k^2s_2}{\rho c^2}$,

$$\beta = (\lambda + 2\mu)\gamma - \frac{\omega^2 s_2}{c^2}.$$

Из (2.7) получим дисперсионное соотношение для собственных продольных волн смещений упруго-пластической среды

$$\omega_l^2(k) = \frac{c^2}{s_2}\gamma \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\alpha + \lambda/2} \right). \quad (2.8)$$

Упругому состоянию среды соответствует $s_2 \rightarrow \infty$. В этом случае ω_l стремится к классическому выражению ω_{le}

$$\omega_{le}(k) = k\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

В отличие от ω_{le} частота ω_l не равна нулю при $k \rightarrow 0$

$$\omega_l(0) = c\sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{s_2(\lambda + \mu)}},$$

однако $\omega_l(k) \rightarrow \omega_{le}(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

Значения $\omega_l(k) \in [0, \omega_l(0))$ достигаются при $k^2 < 0$, следовательно, в этом диапазоне частот распространяющиеся продольные волны смещений не существуют, а колебания среды затухают или нарастают в пространстве.

Выразим амплитуды B_{11}, B_{22}, B_{33} через амплитуду U_2 , получим

$$B_{22} = -i\frac{\rho c^2}{ks_2}U_2,$$

$$B_{11} = B_{33} =$$

$$= -i\frac{U_2\lambda k}{2(\alpha + \lambda/2)} \left(1 + \frac{\rho c^2}{k^2 s_2} \right). \quad (2.9)$$

Амплитуда U_2 имеет действительное значение, а B_{11}, B_{22}, B_{33} — мнимые при действительных k , следовательно, фазы волн $\Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33}$ смещены на $\pi/2$ относительно фазы u_2 .

Из (1.3), (1.4), (2.2), (2.9) найдем амплитуды волн поверхностной плотности дислокаций:

$$N_{31} = N_{13} = -\frac{U_2\lambda k}{2d(\alpha + \lambda/2)} \left(1 + \frac{\rho c^2}{k^2 s_2} \right),$$

где d — период решетки.

Таким образом, продольная волна смещения порождает волны краевых дислокаций в упруго-пластической среде, которые имеют

вектор Бюргерса и линии дислокаций ортогональные направлению распространения волны. Колебания поверхностной плотности дислокаций происходят в противофазе с продольными колебаниями смещений среды. В упругой среде ($s_2 \rightarrow \infty$) генерация дислокаций отсутствует ($N_{13} \rightarrow 0$, $N_{31} \rightarrow 0$).

Рассмотрим поперечные волны смещений среды. Из двух равноправных поперечных составляющих $u_1(y, t)$, $u_3(y, t)$ выберем для определенности смещение вдоль оси X , тогда $U_1 \neq 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$. Система характеристических уравнений для амплитуд колебаний следует из уравнений (1.6)–(1.8). Решение однородных уравнений этой системы, не содержащих U_1 , считаем тривиальным. Оставшиеся уравнения имеют следующий вид:

$$B_{11}\lambda + 2B_{33}\alpha = 0, \quad (2.10)$$

$$B_{11} \left(2\alpha - 2\frac{\omega^2}{c^2} \right) + B_{33}\lambda = 0, \quad (2.11)$$

$$(B_{11} + B_{33})\lambda k + (B_{12} + B_{21})\mu k + iU_1(\rho\omega^2 - \mu k^2) = 0, \quad (2.12)$$

$$2k^2 B_{12} + \frac{\mu}{s_2}(B_{12} + B_{21}) - i\frac{\mu}{s_2}kU_1 = 0, \quad (2.13)$$

$$kB_{21} + \frac{i}{s_2}\rho c^2 U_1 = 0. \quad (2.14)$$

Из уравнений (2.13), (2.14) найдем

$$iU_1 = -\frac{ks_2}{\rho c^2} B_{21},$$

$$B_{12} = -\frac{\gamma\mu}{2k^2 s_2 + \mu} B_{21}.$$

Подставив U_1 и B_{12} в (2.12), получим уравнение

$$(B_{11} + B_{33})\lambda + B_{21}\eta = 0, \quad (2.15)$$

где $\eta = \gamma \left(1 - \frac{\mu}{2k^2 s_2 + \mu} \right) \mu - \frac{s_2}{c^2} \omega^2$.

Решив систему однородных линейных алгебраических уравнений (2.10), (2.11), (2.15), найдем неизвестные B_{11} , B_{33} , B_{21} . Нетривиальное решение этой системы существует, если определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha - 2\frac{\omega^2}{c^2} s_2 & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \eta \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) имеет два решения:

$$\omega_t^2(k) = \frac{2\mu k^2 (k^2 s_2 + \rho c^2)}{\rho (2k^2 s_2 + \mu)}, \quad (2.17)$$

$$\omega_{tc}^2(k) = \frac{c^2 (k^2 s_2 + \mu) (\alpha + \lambda/2)}{s_2 \alpha}.$$

При $s_2 \rightarrow \infty$ имеем

$$\omega_t(k) \rightarrow \omega_{te}(k) = k \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \omega_{tc}(k) \rightarrow ck.$$

Здесь $\omega_{te}(k)$ — классическое дисперсионное соотношение для свободных поперечных волн деформации в упругой среде, $\omega_t(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, $\omega_t(k) \rightarrow \omega_{te}(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Частотам $\omega_{tc}(k)$ соответствует фазовая скорость $v_{tc} \geq c$, следовательно, они не характеризуют волны деформации и далее не рассматриваются.

Выразим амплитуды B_{11} , B_{33} , B_{21} , B_{12} через U_1

$$B_{11} = -i\frac{U_1}{\lambda} \left(\frac{\rho c^2}{k s_2} (k^2 s_2 + \mu) + \frac{2\mu k (\rho c^2 + k^2 s_2)}{2k^2 s_2 + \mu} \frac{2\alpha}{\alpha + \lambda/2} \right),$$

$$B_{33} = -i\frac{U_1}{2} \left(\frac{2\mu k (\rho c^2 + k^2 s_2)}{(2k^2 s_2 + \mu) (\alpha + \lambda/2)} + \frac{\rho c^2 (k^2 s_2 + \mu)}{k s_2 \alpha} \right), \quad (2.18)$$

$$B_{21} = -iU_1 \frac{\rho c^2}{k s_2}, \quad (2.19)$$

$$B_{12} = iU_1 \frac{\gamma\mu}{2k^2 s_2 + \mu} \frac{\rho c^2}{k s_2}. \quad (2.20)$$

Величина U_1 является действительной, амплитуды B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{33} имеют мнимые значения, следовательно, фазы колебаний ненулевых компонент Θ_{ij} смещены на $\pi/2$ относительно фазы поперечных колебаний среды.

Амплитуды волн поверхностной плотности дислокаций получим из (1.3), (1.4), (2.2), (2.18)–(2.20):

$$N_{13} = \frac{U_1 k}{2d} \left(\frac{2\mu k (\rho c^2 + k^2 s_2)}{(2k^2 s_2 + \mu) (\alpha + \lambda/2)} + \frac{\rho c^2 (k^2 s_2 + \mu)}{k s_2 \alpha} \right), \quad (2.21)$$

$$N_{31} = \frac{U_1 k}{\lambda d} \left(\frac{\rho c^2}{k s_2} (k^2 s_2 + \mu) + \frac{2\mu k (\rho c^2 + k^2 s_2)}{2k^2 s_2 + \mu} \frac{2\alpha}{\alpha + \lambda/2} \right), \quad (2.22)$$

$$N_{32} = -\frac{U_1 \mu k}{d} \frac{\gamma}{2k^2 s_2 + \mu} \frac{\rho c^2}{k s_2}. \quad (2.23)$$

Амплитуды N_{13} , N_{31} соответствуют волнам поверхностной плотности дислокаций с векторами Бюргерса, перпендикулярными направлению распространения, и фазой, совпадающей с фазой поперечной волны смещений $u_1(y, t)$. Вектор Бюргерса для волны с амплитудой N_{32} параллелен направлению распространения, а фаза отличается на π от фазы волны смещений.

Заключение

Волны смещений среды образуются в результате действия внешних или внутренних источников деформаций. Например, пусть на внешней границе тела $y = 0$ находится источник гармонических колебаний $u_j(t) = U_j \exp\{i\omega t\}$, тогда волна смещений $u_j(t, y) = U_j \exp\{i(\omega t - ky)\}$ порождает волны плотности краевых дислокаций в упруго-пластической среде, распространяющиеся в том же направлении, с амплитудами, пропорциональными амплитуде смещений. Волновое число k определяется дисперсионным соотношением (2.8) для продольных и (2.17) для поперечных волн смещений.

С продольными волнами смещений связаны краевые дислокации, имеющие вектор Бюргерса и линии, перпендикулярные направлению распространения волны смещений. Колебания поверхностной плотности дислокаций и смещений происходят в противофазе. В частотном диапазоне

$\omega_l(k) \in [0, \omega_l(0))$ возникают колебания среды, затухающие или нарастающие в пространстве.

С каждым направлением поляризации поперечных волн смещений связаны два типа краевых дислокаций: первый тип имеет векторы Бюргерса перпендикулярные, а второй тип — параллельные направлению распространения волны смещений. Направление линий дислокаций второго типа перпендикулярно плоскости поляризации. Фаза волн плотности дислокаций первого типа совпадает с фазой поперечной волны смещений, фаза плотности дислокаций второго типа отличается от нее на π . Затухание или нарастание колебаний для поперечных смещений отсутствует в данной модели.

Литература

1. Bonnet R. Elastic field of a straight dislocation parallel to interfaces: a new approach // Comptes Rendus Physique. 2003. V. 4. № 8. P. 961–966.
2. Roy A., Acharya A. Finite element approximation of field dislocation mechanics // J. Mech. and Phys. Sol. 2005. V. 53. № 1. P. 143–170.
3. Bogatov N. M. Gauge field theory of dislocations formation by thermal stresses // Phys. Stat. Sol. (b). 2001. V. 228. № 3. P. 651–661.
4. Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1987. 168 с.
5. Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Данилов В. И. и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука СО АН СССР, 1990. 254 с.
6. Мусиенко А. И., Копчик В. А. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций в кристаллах с многоатомными решетками // Кристаллография. 1996. Т. 41. № 4. С. 586–590.
7. Косевич А. М. Динамическая теория дислокаций // УФН. 1964. Т. 84. № 4. С. 579–609.