УДК 517.958+556.5.072 DOI 10.31429/vestnik-19-1-25-34

Моделирование процесса диффузии – конвекции загрязняющей примеси от периодического источника

О. Н. Лапина, А. Г. Нестеренко, Ю. Г. Никитин, А. В. Павлова ✉

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Павлова Алла Владимировна; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Работа посвящена развитию численно-аналитических методов решения задач миграции примесей в атмосфере и водной среде, основанных на применении интегральных преобразований и новых эффективных алгоритмах построения символов функций Грина многослойной среды. Рассмотрена периодическая задача конвекции–диффузии, описывающая распространение и распад субстанций в многослойной среде. Источники выброса моделируются функциями, допускающими выделение в качестве множителя, зависящего от времени, периодической функции, представимой в виде ряда Фурье. Приведена схема построения решения краевой задачи, в основе которой лежит построение интегрального представления решения в образах Фурье. Приведены расчеты функции концентрации вещества для задачи конвекции–диффузии–распада с периодическим локализованным источником, реализованные по описанному алгоритму. В численной модели вычисление интеграла Фурье основано на формулах Гаусса–Кронрода высокого порядка.

Представленная модель позволит учитывать суточные, недельные и сезонные технологические и природные циклы функционирования загрязняющих предприятий.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА турбулентная диффузия, конвекция, деградация примеси, периодический во времени источник, функция Грина, преобразование Фурье.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Работа выполнена при поддержке РФФИ и Администрации Краснодарского края (проект 19-41-230011 р_а).

ПОЛУЧЕНО 16 февраля 2022 г. **ПРИНЯТО** 1 марта 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 марта 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г., Павлова А. В. Моделирование процесса диффузии – конвекции загрязняющей примеси от периодического источника // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 25–34. DOI 10.31429/vestnik-19-1-25-34

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Modelling of the Diffusion–Convection Process of a Pollutant with a Periodic Source

Olga N. Lapina, Aleksandr G. Nesterenko, Yuri G. Nikitin, Alla V. Pavlova✉

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Alla V. Pavlova; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

The Krasnodar region with its unique natural resources requires a thorough environmental assessment, an adequate evaluation of the harmful effects the technical and economic facilities have on natural processes, as well as means to forecast the consequences of their influence on the region's ecosystem.

The use of various approaches to modeling the process of the pollutant spread allows implementing methods applicable for the assessment of the state of the regional ecological system. The work is devoted to the development of numerical-analytical methods for solving problems of the impurities migration in the atmosphere and the aquatic environment, based on the use of integral transformations and new efficient algorithms for the construction of the Green's symbols functions for a multilayer medium.

The paper considers a periodic convection-diffusion problem that describes the propagation and decay of substances in a multilayer medium. Emission sources are modeled by functions that allow for selection of a periodic function that can be represented as a Fourier series, as a time-dependent multiplier. We present a method for constructing a solution to a boundary value problem, which is based on the construction of an integral representation for the solution in Fourier images. Calculations of the substance concentration function for the problem of convection–diffusion–decay with a periodic localized source, implemented according to the described algorithm, are presented. In the numerical model, the calculation of the Fourier integral is based on the higher-order Gauss–Kronrod formulas.

The presented model allows accounting for the daily, weekly and seasonal technological and natural work cycles of polluting enterprises. The results can find practical application in identification of contaminated zones and territories resulting from planned and emergency emissions into the atmosphere or water areas.

KEYWORDS turbulent diffusion, convection, impurity degradation, time-periodic source, Green's function, Fourier transform.

FUNDING The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Krasnodar Territory (project 19-41-230011 p_a).

RECIEVED 16 February 2022. ACCEPTED 1 March 2022. PUBLISHED 30 March 2022.

CITE AS Lapina O. N., Nesterenko A. G., Nikitin Yu. G., Pavlova A. V. Modelling of the diffusion – convection process of a pollutant with a periodic source. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 25–34. DOI 10.31429/vestnik-19-1-25-34

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

Введение

Краснодарский край с его уникальными природными ресурсами нуждается в тщательной экологической экспертизе состояния окружающей среды, адекватной оценке вредного воздействия на природные процессы технических и хозяйственных объектов, прогнозировании последствий их воздействия на экосистему региона.

В связи с увеличением промышленных выбросов и негативными изменениями климата вопросам исследования атмосферной диффузии и загрязнения воздуха и водных акваторий уделяется все большее внимание.

На сегодняшний день используются различные модели кинетики и динамики газообразных примесей и аэрозолей. В нашей стране ведущими разработчиками таких моделей являются ИВМ РАН и ИВМ СО РАН. В работах Марчука Г.И., Дымникова В.П., Алояна А.Е., Пененко В.В., Саркисяна А.С., Толстых М.А. и др. [1–5 и др.] представлен широкий круг моделей регионального и трансграничного переноса загрязняющих примесей с учетом химических реакций и фазовых переходов. В них разработаны методы численного решения задач конвекции – диффузии – реакции. Однако область применения сложных многопараметрических моделей порой существенно ограничена, так как требует значительных вычислительных мощностей. Для численного моделирования таких задач широко используются конечно-разностные методы [6] и метод конечных элементов [7]. Численная аппроксимация уравнений конвекции – диффузии – реакции приводит к системе алгебраических уравнений большой размерности. Для явных схем из-за ограничений на устойчивость это приводит к большим вычислительным затратам. При реализации прямыми методами неявных схем требуется обращение матриц большой размерности, что также требует больших вычислительных затрат.

Использование различных подходов к моделированию процесса распространения загрязняющих веществ (ЗВ) позволяет реализовать методы, применимые для оценки состояния экологической системы региона. Большой класс краевых задач конвекции – диффузии – реакции для полуограниченных сред в виде многослойных пакетов был исследован в фундаментальных работах Бабешко В.А. и его учеников [8, 9 и др.].

Настоящая работа посвящена развитию численно-аналитических методов решения задач миграции примесей в атмосфере и водной среде, основанных на применении интегральных преобразований, новых эффективных алгоритмах построения символов функций Грина многослойной среды [10]. В данной работе в продолжение [11–13] рассмотрена периодическая задача конвекции – диффузии, описывающая распространение и распад субстанций в многослойной среде, которая позволит эффективно учитывать суточные, недельные и сезонные технологические и природные циклы функционирования загрязняющих предприятий.

1. Постановка задачи диффузии-конвекции-распада и схема решения

Важнейшие физические процессы, определяющие характер распространения загрязнений — миграция за счет конвекции и диффузия. Уравнение переноса вещества для среднемасштабного приближения имеет вид [1, 8]

$$\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial t}+u\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial x}+v\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial y}+(w-w_g)\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial z}+\sigma\phi(M,t)= \\ =\mu\left(\frac{\partial^2\phi(M,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(M,t)}{\partial y^2}\right)+\nu\frac{\partial^2\phi(M,t)}{\partial z^2}+f(M,t). \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) приняты обозначения: $\phi(M,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в точке $M(x,y,z)$ в момент времени t, u, v, w — скорости ветра в направлениях осей OX, OY, OZ соответственно, w_g — скорость вертикального оседания примеси, σ — коэффициент распада (деградации примеси), μ, ν — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно, $f(M,t)$ — функция источника, $-\infty<x,y<+\infty$, $0\leqslant z\leqslant h$.

Исходным для применяемого в работе метода решения является построение интегрального представления решения краевой задачи в образах Фурье [10]. Рассмотрим сначала однородное стационарное уравнение

$$u\frac{\partial\phi(M)}{\partial x}+v\frac{\partial\phi(M)}{\partial y}+(w-w_g)\frac{\partial\phi(M)}{\partial z}+\sigma\phi(M)= \\ =\mu\left(\frac{\partial^2\phi(M)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(M)}{\partial y^2}\right)+\nu\frac{\partial^2\phi(M)}{\partial z^2}. \quad (1.2)$$

Граничные условия на верхней и нижней границе слоя можно представить в виде

$$\left.\left(\nu\frac{\partial\phi(M)}{\partial z}+\kappa_1\phi(M)\right)\right|_{z=h}=q_1(x,y), \qquad \left.\left(\nu\frac{\partial\phi(M)}{\partial z}-\kappa_2\phi(M)\right)\right|_{z=0}=q_2(x,y),$$

где $q_j(x,y)\neq 0$ $(j=1,2)$ при наличии источника на границе.

Применим к (1.2) двукратное преобразование Фурье по переменным x, y, тогда в образах Фурье уравнение примет вид

$$\nu\frac{\partial^2\Phi(\alpha,\beta,z)}{\partial z^2}-(w-w_g)\frac{\partial\Phi(\alpha,\beta,z)}{\partial z}-\theta\Phi(\alpha,\beta,z)=0, \quad (1.3)$$

где

$$\Phi(\alpha,\beta,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y,z)\exp(\mathrm{i}(\alpha x+\beta y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\theta=\mu\left(\alpha^2+\beta^2\right)-\mathrm{i}(\alpha u+\beta v)+\sigma.$$

Следуя [10], введем в рассмотрение вектор $\mathbf{\Phi}=\{\Phi,\Phi'\}$, где $\Phi'=\mathrm{d}\Phi/\,\mathrm{d}z$. Уравнению (1.3) соответствует матричная система уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}}{\mathrm{d}z}=\mathbf{A}\mathbf{\Phi},$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\theta}{\nu} & \dfrac{w-w_g}{\nu}\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$ запишется в виде $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$, следовательно,

$$\nu\lambda^2-\lambda(w-w_g)-\theta=0. \quad (1.4)$$

Корни (1.4) известны

$$\lambda_{1,2}=\frac{(w-w_g)\pm\sqrt{(w-w_g)^2+4\nu\theta}}{2\nu}. \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид $\mathbf{h}_1 = \{1, \lambda_1\}$, $\mathbf{h}_2 = \{1, \lambda_2\}$. Общее решение системы запишется

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{j=1}^{2} t_j \mathbf{h}_j \exp\left(\lambda_j z\right),$$

а общее решение (1.3)

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{2} t_j \exp\left(\lambda_j z\right),$$

где коэффициенты t_j определяются из граничных условий.

Рассмотрим теперь среду миграции загрязняющей субстанции, состоящую из N слоев ($N \geqslant 2$), в пределах каждого слоя $\{-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty;\ z_{n+1} < z < z_n\}$, $n = \overline{1, N}$, свойства среды будем считать постоянными, $z_1 = h$, $z_{N+1} = 0$, тогда установившийся процесс рассеяния примеси в каждом слое описывается уравнением (1.2). Положим, что источник расположен на одной из границ раздела слоев.

Интегральная характеристика концентрации в n-м слое имеет вид

$$\Phi^{(n)} = t_1^{(n)} \exp\left(\lambda_1^{(n)} z\right) + t_2^{(n)} \exp\left(\lambda_2^{(n)} z\right), \quad n = \overline{1, N}.$$

Здесь $\lambda_j^{(n)}$ $(j = 1, 2)$ — собственные значения для n-го слоя, определяемые соотношениями (1.5), $t_j^{(n)}$ подлежат определению.

В трансформантах Фурье условия на верхней и нижней границах среды можно записать в виде

$$\left.\left(\nu^{(N)} \frac{\mathrm{d}\Phi^{(N)}(z)}{\mathrm{d}z} - \kappa^{(N)} \Phi^{(N)}(z)\right)\right|_{z=z_{N+1}} = Q^{(N+1)},$$

$$\left.\left(\nu^{(1)} \frac{\mathrm{d}\Phi^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} + \kappa^{(1)} \Phi^{(1)}(z)\right)\right|_{z=z_1} = Q^{(1)}.$$

На границах раздела слоев, за исключением границы, содержащей источник, выполняются условия

$$\Phi^{(n-1)}(z_n) = \Phi^{(n)}(z_n), \qquad \nu^{(n-1)} \frac{\mathrm{d}\Phi^{(n-1)}(z_n)}{\mathrm{d}z} = \nu^{(n)} \frac{\mathrm{d}\Phi^{(n)}(z_n)}{\mathrm{d}z}.$$

В плоскости источника условия имеют разрывный вид, например,

$$\nu^{(j-1)} \frac{\mathrm{d}\Phi^{(j-1)}(z_j)}{\mathrm{d}z} = \nu^{(j)} \frac{\mathrm{d}\Phi^{(j)}(z_j)}{\mathrm{d}z}, \qquad \Phi^{(j-1)}(z_j) = \Phi^{(j)}(z_j) + Q^{(j)}. \tag{1.6}$$

Здесь $Q^{(j)}$ — Фурье-образы функций источников q_l $(l = \overline{1, N+1})$. Возможно также задание разрыва потока. Введем вектор $\mathbf{B}^{(j)}$, который для случая разрыва функции концентрации (1.6) имеет вид $\mathbf{B}^{(j)} = \{0, 1\}$, а для разрывного потока — $\mathbf{B}^{(j)} = \{1, 0\}$.

При наличии одного источника выброса (в плоскости $z = z_j$) рекуррентные формулы для определения векторов $\mathbf{t}^{(n)} = \left\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\right\}$ запишутся в виде

$$\mathbf{t}^{(n-1)} = \mathbf{D}^{(n-1)} \mathbf{t}^{(n)}, \quad n \neq j,$$

$$\mathbf{t}^{(j-1)} = \mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{t}^{(j)} + (\mathbf{C}^{(j-1)}(z_j))^{-1} \mathbf{B}^{(j)}.$$

Здесь элементы матрицы $\mathbf{D}^{(n)}$ имеют следующий вид:

$$D_{11}^{(n)} = \left(\nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)}\right) \exp\left(z_{n+1}\left(\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n)}\right)\right) \left(\eta^{(n)}\right)^{-1},$$

$$D_{12}^{(n)} = \left(\nu^{(n+1)}\lambda_2^{(n+1)} - \nu^{(n)}\lambda_2^{(n)}\right)\exp\left(z_{n+1}\left(\lambda_2^{(n+1)} - \lambda_1^{(n)}\right)\right)\left(\eta^{(n)}\right)^{-1},$$
$$D_{21}^{(n)} = \left(\nu^{(n)}\lambda_1^{(n)} - \nu^{(n+1)}\lambda_1^{(n+1)}\right)\exp\left(z_{n+1}\left(\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_2^{(n)}\right)\right)\left(\eta^{(n)}\right)^{-1},$$
$$D_{22}^{(n)} = \left(\nu^{(n)}\lambda_1^{(n)} - \nu^{(n+1)}\lambda_2^{(n+1)}\right)\exp\left(z_{n+1}\left(\lambda_2^{(n+1)} - \lambda_2^{(n)}\right)\right)\left(\eta^{(n)}\right)^{-1},$$
$$\eta^{(n)} = \sqrt{\left(w^{(n)} - w_g^{(n)}\right)^2 + 4\nu^{(n)}\theta^{(n)}}.$$

Далее по алгоритму, изложенному в [10], с использованием рекурсии строится представление для символа функции Грина $K^{(n,j)}$. А Фурье образ концентрации примеси в n-ом слое $\Phi^{(n)}$ выражается через символ $K^{(n,j)}$ и трансформанту функции источника $Q^{(j)}$

$$\Phi^{(n)}(z) = K^{(n,j)}(z)\,Q^{(j)}, \quad z_{n+1} \leqslant z \leqslant z_n, \quad n = \overline{1,N}. \tag{1.7}$$

Для нескольких источников загрязнения, включая возможные источники на границах среды, формула (1.7) примет вид

$$\Phi^{(n)}(z) = \sum_{j=1}^{M} K^{(n,j)}(z)\,Q^{(j)}, \quad z_{n+1} \leqslant z \leqslant z_n, \quad n = \overline{1,N},$$

M — число источников.

Таким образом, если в области своих носителей заданы величины $q^{(j)}(x,y)$, то значение концентрации $\phi^{(n)}(x,y,z)$ в произвольной точке слоя определяется формулой

$$\phi^{(n)}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} K^{(n,j)}(\alpha,\beta,z)\,Q^{(j)}(\alpha,\beta)\exp\left(-i\left(\alpha x + \beta y\right)\right)\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta.$$

Метод вычисления обратных преобразований Фурье, основанный на применении формул Гаусса–Кронрода высокого порядка, описаны в работе [12].

2. Задача для периодического источника

Рассмотрим случай, когда пространственные и временные зависимости источника в правой части уравнения (1.1) разделяются, т.е.

$$f(M,t) = f_0(M)\,\tau(t).$$

Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial t} + u\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial x} + v\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial y} + (w - w_g)\frac{\partial\phi(M,t)}{\partial z} + \sigma\phi(M,t) =$$
$$= \mu\left(\frac{\partial^2\phi(M,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(M,t)}{\partial y^2}\right) + \nu\frac{\partial^2\phi(M,t)}{\partial z^2} + f_0(M)\,\tau(t). \tag{2.1}$$

Будем рассматривать в качестве $\tau(t)$ вещественнозначную периодическую функцию, представимую в виде ряда Фурье в комплексной форме

$$\tau(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi m t}{T}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(-\mathrm{i}\omega m t\right), \tag{2.2}$$

$$C_m = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tau(t)\exp\left(\mathrm{i}\omega m t\right)\mathrm{d}t, \quad \omega = \frac{\pi}{T},$$

где C_m — комплексный коэффициент ряда Фурье, ω — частота, T — полупериод.

Можно использовать и другое разложение $\tau(t)$ в ряд Фурье по синусам и косинусам

$$\tau(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos(\omega m t) + b_m \sin(\omega m t), \tag{2.3}$$

$$a_m = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \tau(t)\cos(\omega m t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \tau(t)\cos\left(\frac{\pi m t}{T}\right)\mathrm{d}t, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$b_m = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \tau(t)\sin(\omega m t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \tau(t)\sin\left(\frac{\pi m t}{T}\right)\mathrm{d}t, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Коэффициенты рядов C_m (2.2) и a_m, b_m (2.3) связывают следующие соотношения:

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_{\pm m} = \frac{a_m \pm \mathrm{i} b_m}{2}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Возьмем один из членов ряда (2.2) $C_m \exp(-\mathrm{i}m\omega t)$, m-й комплексной гармонике будет соответствовать правая часть (2.1) вида $f(M,t) = C_m f_0(M)\exp(-\mathrm{i}m\omega t)$. Введем обозначение

$$\phi_m = \phi_m(x, y, z, m, \omega)$$

и рассмотрим уравнение (2.1) для отдельной гармоники, представив соответствующую ей функцию концентрации загрзнителя как $\phi_m \exp(-\mathrm{i}m\omega t)$. Опуская общий временной множитель $\exp(-\mathrm{i}m\omega t)$, получаем стационарное уравнение для амплитуды $\phi_m(M)$

$$u\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + v\frac{\partial \phi_m}{\partial y} + (w - w_g)\frac{\partial \phi_m}{\partial z} + \phi_m(\sigma - \mathrm{i}m\omega) = \\ = \mu\left(\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2}\right) + \nu\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z^2} + f_m(M), \quad f_m(M) = C_m f_0(M). \tag{2.5}$$

Исследование граничных задач для стационарного уравнения диффузии – конвекции – распада проведено в работе [12].

В рассматриваемом случае соотношения (1.5) примут вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{(w - w_g) \pm \sqrt{(w - w_g)^2 + 4\nu\mu(\alpha^2 + \beta^2) - \mathrm{i}(\alpha u + \beta v) + (\sigma - \mathrm{i}m\omega)}}{2\nu}.$$

Тогда решение (2.1) можно представить в виде ряда

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_m \exp(-\mathrm{i}\omega m t).$$

Пусть на подстилающей поверхности $(z = z_{N+1})$ или внутри слоя $(z = z_j)$ задан источник в виде

$$f_0(x, y, z_j)\,\tau(t) = q(x, y)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp(-\mathrm{i}\omega m t). \tag{2.6}$$

Трансформанта Фурье концентрации загрязнителя для (2.5) запишется [10]

$$\Phi_m(\alpha, \beta, z) = C_m K_m(\alpha, \beta, z)\, Q(\alpha, \beta),$$

где K_m — символ функции Грина.

Тогда для уравнения (2.1) с источником вида (2.6) будем иметь

$$\Phi\left(\alpha,\beta,z,t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Phi_m\left(\alpha,\beta,z\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega mt\right)=Q\left(\alpha,\beta\right)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_mK_m\left(\alpha,\beta,z\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega mt\right).$$

Если рассматривается многослойная среда рассеяния примеси от периодического по времени источника, решение задачи строится по тому же алгоритму, что и для стационарного источника, с учетом приведенных выше формул

$$\Phi^{(n)}\left(\alpha,\beta,z,t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Phi_m^{(n)}\left(\alpha,\beta,z,m,\omega\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega mt\right)=$$
$$=Q\left(\alpha,\beta\right)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_mK_m^{(n)}\left(\alpha,\beta,z\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega mt\right).\quad(2.7)$$

При численной реализации число членов ряда Фурье определяется заданной точностью.

Применяя обратное преобразование Фурье

$$\phi_m^{(n)}\left(x,y,z,m,\omega\right)=\frac{C_m}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K_m^{(n)}\left(\alpha,\beta,z\right)Q\left(\alpha,\beta\right)\exp\left(-\mathrm{i}\left(\alpha x+\beta y\right)\right)\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,\qquad(2.8)$$

окончательно получаем

$$\phi^{(n)}\left(x,y,z,t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi_m^{(n)}\left(x,y,z,m,\omega\right)\exp\left(-\mathrm{i}m\omega t\right),\quad z_{n+1}\leqslant z\leqslant z_n.$$

3. Пример численного решения задачи для двухслойной среды с периодическим источником выброса

Рассмотрим задачу для двухслойной среды с периодическим источником в плоскости раздела слоев. Пусть на верхней и нижней границах отсутствуют вертикальные потоки примеси

$$\left.\frac{\partial\phi^{(1)}\left(x,y,z\right)}{\partial z}\right|_{z=z_1}=0,\qquad\left.\frac{\partial\phi^{(2)}\left(x,y,z\right)}{\partial z}\right|_{z=z_3}=0.$$

В плоскости источника имеют место следующие условия:

$$\nu^{(1)}\left.\frac{\partial\phi^{(1)}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_2}=\nu^{(2)}\left.\frac{\partial\phi^{(2)}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_2}+q_2\left(x,y\right),\quad(x,y)\in\Omega,$$

$$\nu^{(1)}\left.\frac{\partial\varphi^{(1)}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_2}=\nu^{(2)}\left.\frac{\partial\varphi^{(2)}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_2},\quad(x,y)\notin\Omega,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(2)}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_3}=0.$$

Возьмем в качестве $\tau\left(t\right)$ модельную неотрицательную функцию

$$f_0(t)=0,5+0,2\cos(\omega t)+0,1\sin(\omega t)+0,1\cos(2\omega t)+0,05\sin(2\omega t),$$

$$\omega=10,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}.$$

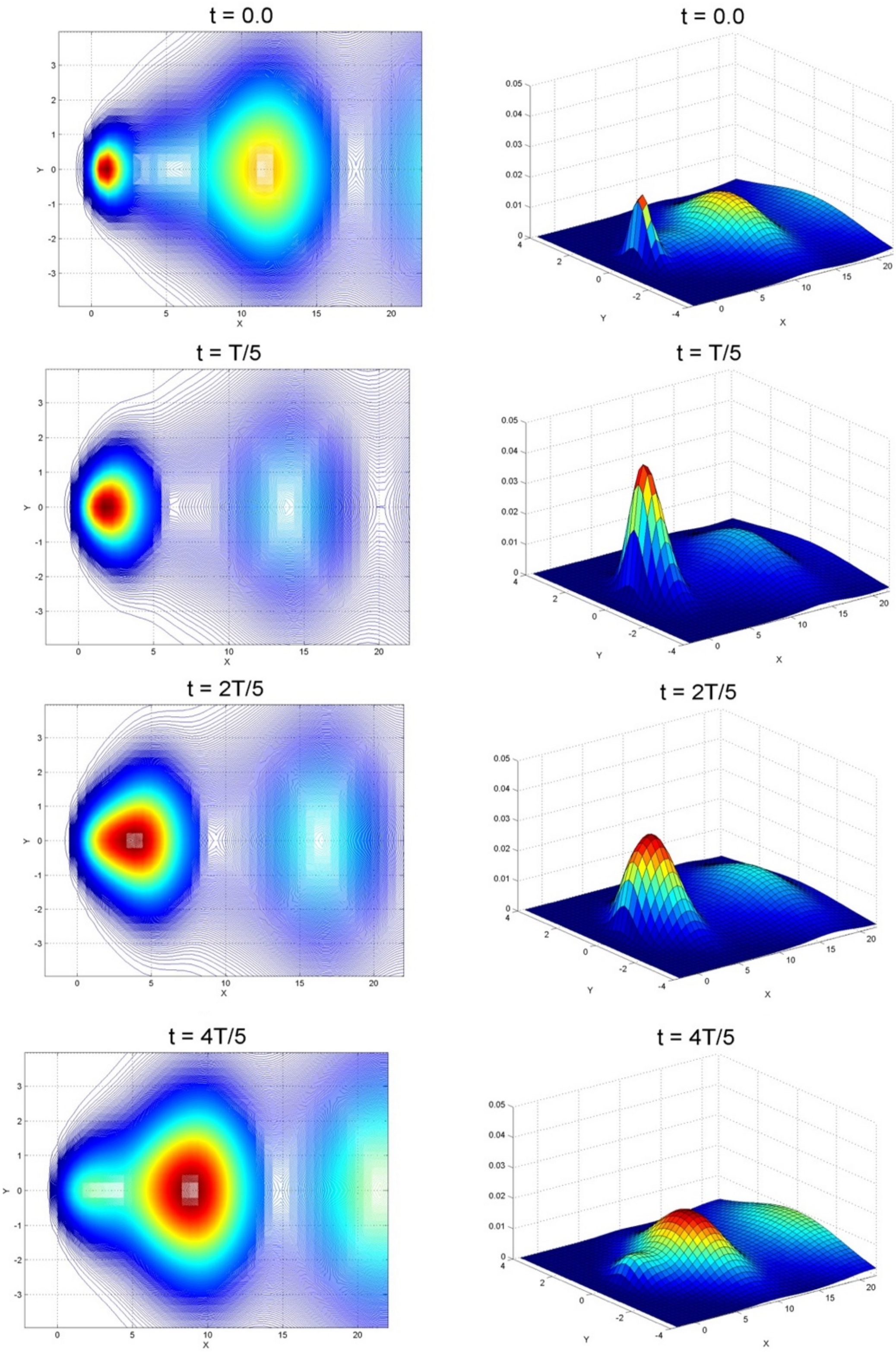

Рис. 1. Распределение загрязняющей примеси на уровне периодического источника в однородном слое: $u = 20$, $v = 0$, $w = 0$, $w_g = 0,6$, $\nu = 1$, $\mu = 2,5$, $\sigma = 0,1$, $z_1 = 1$,$z_2 = 0,5$, $z_3 = 0$

В представлении функции $\tau(t)$ (2.3) $a_0 = 1$, $a_1 = 0,2$, $b_1 = 0,1$, $a_2 = 0,1$, $b_2 = 0,05$, откуда по формулам (2.4) $C_0 = 0,5$, $C_{-1} = 0,1 - \mathrm{i}0,05$, $C_{-2} = 0,05 - \mathrm{i}0,025$, $C_1 = 0,1 + \mathrm{i}0,05$, $C_2 = 0,05 + \mathrm{i}0,025$.

Теперь для каждого $m = 0, \pm1, \pm2$ получим $\Phi_m^{(n)}$ по формулам (2.7) и вычислим интегралы (2.8) для получения оригиналов.

Для простоты положим модельные параметры слоев одинаковыми: $u = 20$, $v = 0$, $w = 0$, $w_g = 0,6$, $\nu = 1$, $\mu = 2,5$, $\sigma = 0,1$, $z_1 = 1$, $z_2 = 0,5$, $z_3 = 0$. А функцию $q(x,y)$ зададим в квадрате малого размера:

$$q(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |x|, |y| \leqslant 0,05; \\ 0, & |x|, |y| > 0,05. \end{cases}$$

На рис. 1 представлено распределение концентрации $\phi^{(1)}(x, y, z_2, t_m)$ для моментов времени $t_m = mT/5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Параметр $t = t_m$ соответствует долям периода T.

В правом столбце функции концентрации представлены в виде поверхностей, в левом — в виде линий уровней.

Заключение

Изучение закономерностей распространения загрязнителей и анализ данных их пространственно-временного распределения исключительно важны для оценки состояния воздушного и водного бассейнов и тенденций изменения экологической ситуации. Результаты подобных исследований определяют стратегию планирования мероприятий по обеспечению экологических норм, они могут найти практическое приложение при определении загрязненных зон и территорий в результате плановых и аварийных выбросов в атмосферу или водные акватории. В совокупности разработанные математические модели [11–13], а также модель для периодических источников, представленная в настоящей работе, и полученные на их основе данные могут быть использованы для формирования экологической модели территорий Краснодарского края, включающей в себя методы экологического мониторинга и прогнозирования, и послужить одним из инструментов экологической экспертизы.

Литература [References]

1. Марчук Г.И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* Наука, Москва, 1982. [Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical modeling in the problem of the environment.* Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]

2. Марчук Г.И. *Численное решение задач динамики атмосферы и океана.* Наука, Москва, 1973. [Marchuk G.I. *Chislennoe reshenie zadach dinamiki atmosfery i okeana = Numerical solution of problems of atmospheric and ocean dynamics.* Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]

3. Алоян А.Е. *Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере.* Наука, Москва, 2008. [Aloyan A.E. *Modelirovanie dinamiki i kinetiki gazovykh primesey i aerozoley v atmosfere = Modeling of dynamics and kinetics of gas impurities and aerosols in the atmosphere.* Nauka, Moscow, 2008. (in Russian)]

4. Пененко В.В., Алоян А.Е. *Модели и методы для задач охраны окружающей среды.* Наука, Новосибирск, 1985. [Penenko V.V., Aloyan A.E. *Modeli i metody dlya zadach okhrany okruzhayushchey sredy = Models and methods for environmental protection tasks.* Nauka, Novosibirsk, 1985. (in Russian)]

5. Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. *Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях.* ИВМ РАН, Москва, 2015. [Agoshkov V.I., Aseev N.A., Novikov I.S. *Metody issledovaniya i resheniya zadach o lokal'nykh istochnikakh pri lokal'nykh ili integral'nykh nablyudeniyakh = Methods of research and solving problems about local sources with local or integral observations.* IVM RAN, Moscow, 2015. (in Russian)]

6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии.* Книжный дом “Либроком”, Москва, 2015. [Samarsky A.A., Vabishevich P.N. *Chislennye metody resheniya zadach konvektsii-diffuzii = Numerical methods for solving convection-diffusion problems.* Book House “Librocom”, Moscow, 2015 (in Russian)]

7. Chawla M.M., Al-Zanaidi M.A., Al-Sahhar M.S. Stabilized fourth order extended methods for the numerical solution of ODEs. *Intern. J.Computer Math.*, 1994, vol. 52, pp. 99–107.
8. Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Евдокимов С.М. Об учете типов источников и зон оседания загрязняющих веществ. *Доклады Академии наук*, 2000, т. 371-1, pp. 32–34. [Babeshko O.M., Evdokimova O.V., Evdokimov S.M. On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants. *Doklady Akademii nauk = Proc. of the Russian Academy of Sciences*, 2000, vol. 371-1, pp. 32–34 (in Russian)]
9. Бабешко В.А., Павлова А.В., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Математическое моделирование экологических процессов распространения загрязняющих веществ. Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 2009. [Babeshko V.A., Pavlova A.B., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Mathematical modeling of environmental processes of pollutants distribution. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (in Russian)]
10. Сыромятников П.В. Матричный метод построения символа функции Грина для стационарных задач турбулентной диффузии в многослойных средах. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, №3, с. 62–71. [Syromyatnikov P.V. Matrix method for constructing the symbol of the Green's function for stationary problems of turbulent diffusion in multilayer media. *Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 62–71. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-15-3-62-71
11. Сыромятников П.В. Матричный метод решения нестационарных задач конвекции-диффузии в полуограниченных многослойных и градиентных средах. *Наука Юга России*, 2018, т. 14, № 4, с. 3–13. [Syromyatnikov P.V. Matrix method for solving nonstationary convection-diffusion problems in semi-bounded multilayer and gradient media. *Nauka Yuga Rossii = Science in the South of Russia*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 3–13. (in Russian)] DOI 10.7868/S25000640180401
12. Кривошеева М.А., Лапина О.Н., Нестеренко А.Г., Никитин Ю.Г., Сыромятников П.В. Аналитическое и численное моделирование стационарной краевой задачи диффузии-конвекции-распада для однородного слоя на основе уравнений турбулентной диффузии. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 3, с. 37–47. [Krivosheeva M.A., Lapina O.N., Nesterenko A.G., Nikitin Yu.G., Syromyatnikov P.V. Analytical and numerical modeling of a stationary boundary value problem of diffusion-convection-decay for a homogeneous layer based on the equations of turbulent diffusion. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 37–47. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-17-3-37-47
13. Сыромятников П.В., Кривошеева М.А., Лапина О.Н., Нестеренко А.Г., Никитин Ю.Г. Решение методом факторизации смешанной краевой задачи диффузии-конвекции-распада для однородного слоя на основе уравнений турбулентной диффузии. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 1, с. 36–45. [Syromyatnikov P.V., Krivosheeva M.A., Lapina O.N., Nikitin Yu.G. Solution by the factorization method of a mixed boundary value problem of diffusion-convection-decay for a homogeneous layer based on the equations of turbulent diffusion. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 1, pp. 36–45. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-18-1-36-45