УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-1-42-44

О системах интегральных уравнений с разностным ядром

В. А. Бабешко[1,2✉], **О. М. Бабешко**[2], **О. В. Евдокимова**[1], **Д. А. Хрипков**[2], **Г. Н. Уафа**[1], **В. С. Евдокимов**[1], **В. В. Лозовой**[1], **А. В. Плужник**[1]

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия
[2] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
✉ Бабешко Владимир Андреевич; e-mail: babeshko41@mail.ru

Ряд смешанных задач механики сплошных сред и математической физики сводятся к решению систем интегральных уравнений, ядра которых имеют сингулярные или логарифмические особенности. В том случае, когда рассматривается слоистая среда, ядра интегральных уравнений зависят от разности аргументов. К числу подобных систем интегральных уравнений относятся уравнения Винера-Хопфа. В работе развивается подход к исследованию подобных систем интегральных уравнений, в основе которого лежит метод, разработанный для случая системы, состоящей из двух уравнений. При исследовании ряда аналогичных задач для систем конечного числа интегральных уравнений, бывает достаточным представление общего вида каждой компоненты решения. В работе дается в общем виде представление решения такой системы интегральных уравнений. Оно может служить целям изучения видов концентрации напряжений на краях области его исследования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА системы интегральных уравнений, мероморфные функции, факторизация, общий вид решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2022 г. Минобрнауки (проект FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрегистрации 122020100341-0, и при поддержке грантов РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

ПОЛУЧЕНО 24 февраля 2022 г. **ПРИНЯТО** 17 марта 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 марта 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Хрипков Д. А., Уафа Г. Н., Евдокимов В. С., Лозовой В. В., Плужник А. В. О системах интегральных уравнений с разностным ядром // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 42–44. DOI 10.31429/vestnik-19-1-42-44

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On Systems of Integral Equations with a Difference Kernel

Vladimir A. Babeshko[1,2✉], Olga M. Babeshko[2], Olga V. Evdokimova[1], Dmitry A. Khripkov[2], Galina N. Uafa[1], Vladimir S. Evdokimov[1], Viktor V. Lozovoy[1], Andrey V. Pluzhnik[1]

[1] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
✉ Vladimir A. Babeshko; e-mail: babeshko41@mail.ru

A number of mixed problems of continuum mechanics and mathematical physics are reduced to solving systems of integral equations, whose kernels have singular or logarithmic features. In the case when a layered medium is considered, the kernels of integral equations depend on the difference of arguments. Such systems of integral equations include the Wiener-Hopf equations. The paper develops a method for studying such systems of integral equations, which is based on a method developed for the case of a system consisting of two equations. When studying a number of similar problems for systems of integral equations of finite number, it is sufficient to represent the general form of each component of the solution. A general representation of the solution of such a system of integral equations is given. It can serve the purposes of studying the types of stress concentration at the edges of its research area.

KEYWORDS systems of integral equations, meromorphic functions, factorization, general form of solution.

FUNDING Some fragments of the work were carried out as part of the implementation of the State task for 2022 of Ministry of Education and Science of Russia (project FZEN-2020-0020), Southern Scientific Center of Russian Academy of Science (project 00-20-13) State Registration No. 122020100341-0, and with the support of the Russian Foundation for Basic Research grants (projects 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

RECIEVED 24 February 2022. **ACCEPTED** 17 March 2022. **PUBLISHED** 30 March 2022.

CITE AS Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Khripkov D. A., Uafa G. N., Evdokimov V. S., Lozovoy V. V., Pluzhnik A. V. On systems of integral equations with a difference kernel. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 42–44. DOI 10.31429/vestnik-19-1-42-44

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

Введение

Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа играют важную роль в самых разных областях практики. Так, эти уравнения возникают в проблемах прочности и разрушения [1], распространения волн в упругих телах [2], акустике [3], неразрушающих методах контроля [4], теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники [5], теории волн в жидкости [6], геофизике [7], и в других областях. В работе развивается подход к исследованию подобных систем интегральных уравнений, в основе которого лежит метод, разработанный для случая системы, состоящей из двух уравнений [8]. Дается в общем виде представление решения такой системы интегральных уравнений.

1. Постановка задачи

Рассматривается система одномерных интегральных уравнений Винера–Хопфа следующего вида

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi)\mathbf{q}(\xi)d\xi = \mathbf{f}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\},$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mathbf{K}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad \mathbf{K}(\alpha) = \begin{Vmatrix} K_{11}(\alpha) & K_{12}(\alpha) & \dots & K_{1N}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1}(\alpha) & K_{N2}(\alpha) & \dots & K_{NN}(\alpha) \end{Vmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}.$$

Будем считать, что элементы $K_{mp}(\alpha)$, $m,p = 1,2,\dots,N$, матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ являются в общем случае мероморфными функциями переменного α. Мероморфные функции $K_{mp}(\alpha)$ и определитель $\det \mathbf{K}(\alpha)$ имеют следующее представление и асимптотическое поведение [9]:

$$K_{mp}(\alpha) = D^{-1}(\alpha)C_{mp}(\alpha),$$

$$\det \mathbf{K}(\alpha) = D^{-N}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \det \|C_{mp}(\alpha)\|,$$

$$K_{mp}(\alpha) = T_{mp}|\alpha|^{-1}(1+O(\alpha^{-1})), \quad m = p, \quad K_{mp}(\alpha) = T_{mp}\alpha^{-1}(1+O(\alpha^{-1})),$$

$$m \neq p, \quad |\alpha| \gg 1, \quad p = 1,2,\dots,N.$$

Исследование и решение задачи включает два шага. Во-первых, в системе интегральных уравнений, благодаря наличию мероморфной матрицы-функции (1.1), выявляется система дифференциальных уравнений, исследование и построение общего решения которой проводится с применением метода [10] исследуется и строится ее общее решение. Во-вторых, используется аппарат факторизации для сведения системы интегральных уравнений к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, которую удалось решить точно.

Детали исследования повторяют примененный в [8] подход для случая системы двух уравнений, поэтому в настоящей статье не повторяются.

Решение системы интегральных уравнений в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{Q}_\eta(x) = \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{A}(\eta)e^{-i\eta x} + \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{Y}(x),$$

$$\mathbf{Y}(x) = \left\{\sum_{m=1}^\infty y_{pm}e^{iz_{mp}x}\right\}, \quad \mathbf{K}^{-1}(\eta) = \|g_{ps}\|.$$

В координатной форме решение имеет представление

$$q_{p\eta}(x) = B_p(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{s=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} g_{ps}y_{sm}e^{iz_{ms}x}, \quad B_p(\eta) = \sum_{s=1}^{N} g_{ps}A_p(\eta). \tag{1.2}$$

Все, входящие в представление решения параметры, определяются применением подходов работ [8, 10]. Представленное решение (1.2) может служить целям изучения особенностей поведения каждой компоненты $q_{p\eta}(x)$, $p = 1, 2, \ldots, N$ при $x \to 0$.

Вывод

Таким образом, метод, разработанный применительно к системе двух уравнений Винера–Хопфа [8], оказался доступным для построения точного решения для системы произвольного конечного числа уравнений.

Построенное решение позволяет выявить его общий вид и возможность применения в смешанных задачах.

Решению этой проблемы способствовал новый универсальный метод моделирования, позволяющий более просто исследовать и решать не только граничные задачи для дифференциальных уравнений, но и системы интегральных уравнений Винера–Хопфа, имеющих в качестве преобразований Фурье ядер интегральных уравнений мероморфные функции. Благодаря этому результату оказывается возможным исследовать решения смешанных задач также в средах сложных реологий. Одновременно в статье впервые приводится представление точных векторных решений произвольных систем интегральных уравнений Винера–Хопфа с мероморфной матрицей-функцией, что дает возможность принимать высокоточные управленческие решения по излучению волн в многокомпонентных материалах.

Литература [References]

1. Freund L.B. *Dynamic Fracture Mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
2. Achenbach J.D. *Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.* North-Holland, Amsterdam, 1973.
3. Abrahams I.D., Wickham G.R. General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, pp. 819–838.
4. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material. *Q. J. Apple. Math. Mech.*, 1984, vol. 37, pp. 565–580.
5. Sautbekov S., Nilsson B. Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener-Hopf method. *AIP Conf. Proc.*, 2009, vol. 1106, pp. 110–117.
6. Chakrabarti A., George A.J. Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Appl. Math. Lett.*, 1994, vol. 7, pp. 43–47.
7. Davis A.M.J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1987, vol. 39, pp. 25–55.
8. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной факторизационной задаче Гильберта-Винера и методе блочного элемента. *Доклады Академии наук*, 2014, т. 459, № 5, с. 557–561. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On one Hilbert-Wiener factorization problem and the block element method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561. (in Russian)]
9. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука, 1979. [Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical regions.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
10. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740021040039