УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-1-65-69

# О литосферных плитах из многокомпонентных материалов

**О. В. Евдокимова**[1], **О. М. Бабешко**[2], **В. А. Бабешко**[1,2]✉, **И. С. Телятников**[1], **Д. А. Хрипков**[2], **Г. Н. Уафа**[1], **А. С. Мухин**[2], **Е. М. Горшкова**[2]

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия
[2] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
✉ Бабешко Владимир Андреевич; e-mail: babeshko41@mail.ru

Ранее в работах авторов построена серия моделей литосферных плит на деформируемых основаниях, которые взаимодействуют своими торцами, вызывая стартовые землетрясения. В качестве литосферных плит принимались пластины Кирхгофа. Вопрос поведения литосферных плит, моделируемых материалами иных реологий, в частности, многокомпонентными, решался рассмотрением моделей линейной теории упругости. Однако были рассмотрены только граничные задачи для антиплоских задач. И лишь в последнее время удалось разработать универсальный метод моделирования, позволивший представлять решения граничных задач для многокомпонентных материалов, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных, в виде разложений по решениям более простых граничных задач. Таким образом, достоинством метода является возможность ухода от необходимости решения сложных граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных путем замены их на отдельные дифференциальные уравнения, среди которых самыми простыми являются уравнения Гельмгольца. Именно с помощью комбинаций решений граничных задач для этого уравнения можно описывать поведение сложных решений многокомпонентных граничных задач. В настоящей работе дан вывод интегральных уравнений, возникающих в рассматриваемой граничной задаче, и способ их решения с перспективой их применения в задачах многокомпонентных материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА литосферные плиты, блочные элементы, векторные граничные задачи, интегральные уравнения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2022 г. Минобрнауки (проект FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрегистрации 122020100341-0, и при поддержке грантов РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

ПОЛУЧЕНО 25 февраля 2022 г. ПРИНЯТО 17 марта 2022 г. ПУБЛИКАЦИЯ 30 марта 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А., Телятников И. С., Хрипков Д. А., Уафа Г. Н., Мухин А. С., Горшкова Е. М. О литосферных плитах из многокомпонентных материалов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 65–69. DOI 10.31429/vestnik-19-1-65-69

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.



## About Lithospheric Plates Made of Multicomponent Materials

Olga V. Evdokimova[1], Olga M. Babeshko[2], Vladimir A. Babeshko[1,2]✉, Ilya S. Telyatnikov[1], Dmitry A. Khripkov[2], Galina N. Uafa[1], Aleksey S. Mukhin[2], Elena M. Gorshkova[2]

[1] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
✉ Vladimir A. Babeshko; e-mail: babeshko41@mail.ru

Earlier in the works of the authors, a series of models of lithospheric plates on deformable bases that interact with their ends, causing starting earthquakes was built. Kirchhoff plates were taken as lithospheric plates. The question of the behavior of lithospheric plates, simulated materials of other rheologies, in particular, multicomponent ones, were solved by considering models of the linear theory of elasticity. However, it was possible to consider only boundary value problems for anti-plane tasks. And only recently it has been possible to develop a universal modeling method that made it possible to present solutions of boundary value problems for multicomponent materials described by systems of partial differential equations in the form of decompositions for solutions of simpler boundary value problems. Thus, the advantage of the method is the possibility of avoiding the need to solve complex boundary value problems for systems of partial differential equations by replacing them with separate differential equations, among which the Helmholtz equations are the simplest. Namely, with the help of combinations of solutions of boundary value problems for this equation, it is possible to describe the behavior of complex solutions of multicomponent boundary value problems. In this paper, the derivation of integral equations arising in the boundary problem under consideration and the method of their solution with the prospect of their application in problems of multicomponent materials is given.

KEYWORDS lithospheric plates, block elements, vector boundary value problems, integral equations.

FUNDING Some fragments of the work were carried out as part of the implementation of the State task for 2022 of Ministry of Education and Science of Russia (project FZEN-2020-0020), Southern Scientific Center of Russian Academy of Science (project 00-20-13) State Registration No. 122020100341-0, and with the support of the Russian Foundation for Basic Research grants (projects 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

RECIEVED 25 February 2022. ACCEPTED 17 March 2022. PUBLISHED 30 March 2022.

CITE AS Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Babeshko V. A., Telyatnikov I. S., Khripkov D. A., Uafa G. N., Mukhin A. S., Gorshkova E. M. About lithospheric plates made of multicomponent materials. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 65–69. DOI 10.31429/vestnik-19-1-65-69

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.



## Введение

Несмотря на выход ряда работ по прогнозу стартовых землетрясений, теория блочных структур, состоящих из деформируемых блоков сложной формы, по-разному взаимодействующих на границах между собой, не разработана до конца. Имеется много вопросов относительно результатов взаимодействия компонентов блочных структур, состоящих из многокомпонентных материалов. Численные методы, реализованные в пакетах типа «COMCOL» содержащего раздел программ Bodies, оказываются несостоятельными при решении некоторых типов граничных задач даже для простой блочной структуры, состоящей из трех классических блоков. Как раз этот класс граничных задач оказывается доступным для исследования и решения методом блочного элемента. Вторым обстоятельством, приведшим к разработке теории блочных структур, и, как следствие, появлению метода блочного элемента, явилась необходимость совершенствования исследований в области сейсмологии, а также теории наиболее опасных скрытых дефектов в покрытиях материалов. Метод блочного элемента позволяет точно удовлетворять системам дифференциальных уравнений в частных производных граничных задач и объединяет одновременно несколько методов, являясь конвергентным. В области сейсмологии в многочисленных работах детально изучены механизмы возникновения землетрясений как результата разрыва сплошности деформируемой среды в эпицентре, а также последствия землетрясений, состоящие в появлении и распространении сейсмических волн.

Исследованиям землетрясений посвящено огромное количество работ ученых разных стран. К числу первых исследователей, наблюдавших последствия Калифорнийского землетрясения 1906 г. и сделавших верные по тем временам заключения о его причине, следует отнести Рейда [1]. Он понял, что землетрясения происходят в связи с накоплением энергии в коре Земли, которая высвобождается, разорвав слой сдвигом либо растяжением.

Основа для исследования поставленной Рейдом проблемы была заложена основоположником теории трещин Гриффицем [2]. К этому времени уже успешно изучались возникающие при землетрясениях сейсмические волны, в том числе, открытые Лембом [3] и Герглотцем [4]. В 1923 г. Накано [5] поставил задачу нахождения таких источников, действующих в глубине Земли, которые вызывали бы на поверхности такие же знаки первых вступлений волн, как и при реальных землетрясениях. В 1935 г.эту проблему решил Ляв [6], построив некоторые дипольные источники. Эти подходы применялись и развивались Хондой [7], Ходгсоном [8]. В дальнейшем в работах была принята вместо точечной модели источников в очаге землетрясений дислокационная модель. Она оказалась более реальной в связи с размерами очагов землетрясений.

Дальнейшее развитие математических методов позволило более полно использовать аппарат математический физики и теории упругости.

В работах Кострова [9] для описания очага землетрясения был использован динамический вариант функций Грина. Применение этого математического аппарата позволило получить выражение для элементов упругого поля в любой точке через вектор скачка смещения на разрыве. Он получался как функция координат на разрыве и времени. Начиная с этих работ, строились различные модели землетрясений, отправляясь от геометрии разрыва, который принимался как трещина с плоскостью различной ориентации, производилось исследование глубинного строения. В первую очередь следует назвать работы, связанные с исследованиями скоростей и типов волн, проходивших через глубинные зоны Земли. Именно таким путем граница между корой Земли и верхней мантией [10] была установлена югославским ученым Мохоровичичем (1909). Граница между гранитным и базальтовым слоями в коре Земли была обнаружена австрийским ученым Конрадом [11] (1925). Именно граница между разнородными материалами, допускающая скольжение гранита с трением при температуре 600 °C [12, 13], была положена в основу движения литосферных плит и позволила обнаружить существование стартовых землетрясений [14–16].

## 1. Постановка задачи

В работе [17] и предшествующих статьях авторов предложен и реализован для ряда областей метод разложения решений граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных по решениям более простых граничных задач отдельных уравнений. В основе метода лежит преобразование Галеркина, которое ранее в теоретических исследованиях применялась во всем пространстве. Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считая, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются с такой же временной функцией, исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На верхней границе среды вводится декартова система координат таким образом, что ось $ox_3$ направлена по внешней нормали, оси $ox_1$, $ox_2$ лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A,\ |x_2| \leqslant \infty)$ и $\Omega_A(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ находятся литосферные плиты, описываемые граничной задачей для дифференциальных уравнений Гельмгольца.

$$\begin{gathered}\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2\right] \varphi_{-A}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A,\ |x_2| \leqslant \infty), \\ \left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2\right] \varphi_{A}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)\end{gathered} \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A}(x_1, x_2) = \phi(-A, x_2), \quad x_1 \to -A, \qquad \varphi_A(x_1, x_2) = \phi(A, x_2), \quad x_1 \to A,$$

Для исследования (1.1) построим упакованные блочные элементы, порождаемые поставленной граничной задачей. Для этого можно применить метод, детально изложенный в работе [14].

В результате его применения строятся внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned}\omega_{-A}(\alpha_1) = -i(\alpha_1 + k)\varphi_{-A}(-C)e^{-i\alpha_1 C} + Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C} - \\ - Q_{-A}(\alpha_1) - T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C} + T_{-A}(\alpha_1),\end{aligned}$$

$$\omega_A(\alpha_1) = i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - Q_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_A(\alpha_1).$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье строчных букв заглавными.

На базе нового универсального метода моделирования [18] предложен способ построения интегральных и функциональных уравнений трещин нового типа в средах со сложной реологией, граничные задачи которых описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, функциональные уравнения граничных задач принимают вид

$$K(\alpha_1)Q_{-A}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\left[-Q_{-A}(\alpha_1) + S_{-A}\right],$$

$$
\begin{gathered}
\left[K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\right] Q_{-A}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_{-A}, \\
K(\alpha_1) Q_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\left[-Q_A(\alpha_1) + S_A\right], \\
\left[K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\right] Q_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_A, \\
S_{-A} = -i(\alpha_1 + k)\varphi_{-A}(-A)e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} - T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\
S_A = i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_A(\alpha_1).
\end{gathered}
$$

Их исследование и решение приводит к системам интегральных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{X}_-(\alpha_1) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_-(\xi)\mathrm{X}_+(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi-\alpha_1)}d\xi = \left\{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_{-\mathrm{C}}^- e^{-i\alpha_1 \mathrm{C}}\right\}^-, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 < 0; \\
&\mathrm{X}_+(\alpha_1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_+(\xi)\mathrm{X}_-(\xi)e^{-i\xi 2A}}{K_-(\xi)(\xi-\alpha_1)}d\xi = \left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_{\mathrm{A}}^+ e^{i\alpha_1 A}\right\}^+, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 > 0.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Доказано, что оператор в правой части системы интегральных уравнений является вполне непрерывным в пространстве непрерывных с некоторым весом функций. Поэтому для построения приближенного решения системы интегральных уравнений можно использовать теорию интегралов Дирихле при вычислении интегралов в этих уравнениях. Достаточно в первом уравнении замкнуть контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, а во втором — в нижнюю и применить метод теории вычетов. В результате, ограничившись конечным числом полюсов, получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений, которая достаточно просто решается.

## Вывод

Таким образом, доказана возможность решения граничной задачи в высоких приближениях при моделировании литосферных плит блочными элементами для уравнений Гельмгольца. Необходимые формулы представления решений векторных граничных задач, разложенных по решениям более простых, а также необходимые соотношения для представления с помощью формул (1.2) искомых решений, даются в работах [17–19].

## Литература [References]


1. Reid N.F. The Mechanism of the Earthquake. The California Earthquake of April 18, 1906. *Rep. of the State Investigation Commiss.*, vol. 2, pt. 1. Washington, 1910.
2. Griffith A. The Phenomena of Rupture in Solids. *Trans. R. Soc. London*, 1920, vol. 221A, pp. 163–197.
3. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philos. Trans. Rou. Soc. London, Ser. A*, 1904, vol. 203, iss. 359, pp. 1–42. DOI 10.1098/rsta.1904.0013
4. Herglotz G. Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. *Physikalische Zeitschrift*, 1907, vol. 8, pp. 145–147.
5. Nakano H. Notes on the nature of the forces which give rise to the earthquake motions. *Seismol. Bull. Centr. Met. Obs. Japan*, vol. 1, pp. 92–120.
6. Love A. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Cambridge, 1927.
7. Honda H. The elastic waves generated from a spherical source. *Science Rep. Tohoku Univ., Ser. 5, Geophys.*, 1959, vol. 11, pp. 178–183.
8. Hodgson J. Nature of faulting in large earthquake. *Bull Geol. Soc. America Bull.*, 1957, vol. 68, pp. 611–644.
9. Костров Б.В. *Механика очага тектонического землетрясения.* Наука, Москва, 1975. [Kostrov B.V. *Mekhanika ochaga tektonicheskogo zemletrasenia = Mechanics of the seismic center of the tectonically earthquake.* Nauka, Moscow, 1975. (in Russian)]
10. Gutenberg B., Richter C. *Seismicity of the Earth and associated phenomena.* Princeton Univ. Press, 1954.

11. Gutenberg B., Richter C. Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1956, vol. 46, iss. 1, pp. 105–145.
12. Mitchell E., Fialko Y., Brown K. Temperature dependence of frictional healing of Westerly granite: Experimental observations and numerical Simulations. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2013, vol. 14, pp. 567–582.
13. Mitchell E., Fialko Y., Brown K. Frictional properties of gabbro at conditions corresponding to slow slip events in subduction zones. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2015, vol. 16, pp. 4006–4020.
14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The theory of the starting earthquake. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 1(2), pp. 37–80. DOI 10.31429/vestnik-13-1-2-37-80
15. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI 10.1007/s00707-017-2092-0
16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, pp. 4727–4739. DOI 10.1007/s00707-018-2255-7
17. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики. *Доклады Академии наук*, 2020, т. 495, с. 34–38. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The block element method in the expansion of solutions to complex boundary value problems in mechanics. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2020, vol. 495, p. 34–38. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740020060048
18. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740021040039
19. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. [Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains.* Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]