УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-1-45-49

О факторизационных методах в смешанных задачах в усложненных областях

О. М. Бабешко[1], **О. В. Евдокимова**[2], **В. А. Бабешко**[1,2✉], **Е. М. Горшкова**[1], **О. А. Гришко**[1], **В. С. Евдокимов**[2], **О. А. Бушуева**[2]

[1] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
[2] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия
✉ Бабешко Владимир Андреевич; e-mail: babeshko41@mail.ru

Применение факторизационных методов является удобным математическим средством для исследования и решения смешанных задач. Наиболее широкое применение они нашли в смешанных задачах, сводящихся к уравнениям Винера–Хопфа. Последние чаще всего встречаются в тех случаях, когда изучаются смешанные задачи для слоистой среды, а также полупространства. Однако возможность использования факторизационных методов гораздо шире, если отказаться от поиска только уравнений Винера–Хопфа. С этим приходится сталкиваться, если сосредоточиться на поиске факторизационных свойств в иных типах интегральных или функциональных уравнений, возникающих при решении смешанных задач. Такие уравнения встречаются при рассмотрении смешанных задач, поставленных на топологических многообразиях — цилиндрах, конусах, сферах, шарах клиньях и на других подобных областях и т.д. В работе обсуждаются методы исследования и решения подобных уравнений с учетом последних результатов в области граничных задач.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА смешанные задачи, факторизация, интегральные уравнения, бесконечные системы алгебраических уравнений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2022 г. Минобрнауки (проект FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрегистрации 122020100341-0, и при поддержке грантов РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

ПОЛУЧЕНО 26 февраля 2022 г. **ПРИНЯТО** 17 марта 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 марта 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Горшкова Е. М., Гришко О. А., Евдокимов В. С., Бушуева О. А. О факторизационных методах в смешанных задачах в усложненных областях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 45–49. DOI 10.31429/vestnik-19-1-45-49

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On Factorization Methods in Mixed Problems in Complicated Domains

Olga M. Babeshko[1], Olga V. Evdokimova[2], Vladimir A. Babeshko[1,2✉], Elena M. Gorshkova[1], Olga A. Grishko[1], Vladimir S. Evdokimov[2], Olga A. Bushueva[2]

[1] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia
✉ Vladimir A. Babeshko; e-mail: babeshko41@mail.ru

The use of factorization methods is a convenient mathematical tool for the study and solution of mixed problems. They are most widely used in mixed problems, which are reduced to Wiener-Hopf equations. The latter are most often found in cases where mixed problems are studied for a layered environment, as well as half-spaces. However, the possibility of using factorization methods is much wider if we abandon the search only for Wiener-Hapf equations. We have to face this if we focus on finding factorization properties in other types of integral or functional equations that arise when solving mixed problems. Such equations occur when considering mixed problems posed on topological manifolds – cylinders, cones, spheres, balls, wedges and other similar areas. The paper discusses methods for investigating and solving such equations, taking into account the latest results in the field of boundary value problems.

KEYWORDS mixed problems, factorization, integral equations, infinite systems of algebraic equations.

FUNDING Separate fragments of the work were carried out as part of the implementation of the State task for 2022 of Ministry of Education and Science of Russia (project FZEN-2020-0020), Southern Scientific Center of Russian Academy of Science (project 00-20-13) State Registration No. 122020100341-0, and with the support of the Russian Foundation for Basic Research grants (projects 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

RECIEVED 26 February 2022. ACCEPTED 17 March 2022. PUBLISHED 30 March 2022.
CITE AS Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Babeshko V. A., Gorshkova E. M., Grishko O. A., Evdokimov V. S., Bushueva O. A. On factorization methods in mixed problems in complicated domains. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 45–49. DOI 10.31429/vestnik-19-1-45-49
The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

Введение

Исследованию смешанных граничных задач механики деформируемого твердого тела, гидромеханики, математической физики посвящено большое число работ [1–22]. Здесь, в основном, указаны те работы, которые связаны с постановкой смешанных задач в неклассических областях, в отличие от классического полупространства.

Более сложные интегральные уравнения, чем традиционные уравнения Винера–Хопфа, возникают также на границе многослойной среды, если задаются области смены граничных условий с усложненными границами [3–19]. В качестве границ этих областей могут рассматриваться не только прямые, но и полосы, окружности, эллипсы, клинья, границы полуполос, прямоугольников и др. В работе обсуждаются методы исследования и решения подобных уравнений с учетом последних результатов в области граничных задач.

Важно заметить, что ранее рассматривавшиеся смешанные задачи для уравнений Гельмгольца, теперь, благодаря новому универсальному методу моделирования, они попадают в число решаемых для смешанных векторных граничных задач [23]. Ниже приводятся примеры интегральных уравнений для некоторых из указанных смешанных граничных задач.

1. Постановка задачи

Ряд смешанных задач механики сплошной среды и математической физики, рассматриваемые как на слоистой среде, так и на цилиндрах и шарах, сводятся к решению интегральных уравнений следующего вида

$$\int_{b_1}^{b_2} k(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x),$$
$$k(x,\xi) = \sum_{r=1}^{\infty} s_r \begin{pmatrix} \phi(x,\gamma_r)\theta(\xi,\gamma_r), & x>\xi \\ \phi(\xi,\gamma_r)\theta(x,\gamma_r), & x<\xi \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Входящие в представление ядра постоянные связаны с символом ядра, имеющим вид

$$K(u) = \sum_{r=1}^{\infty} s_r(u^2-\gamma_r^2)^{-1}, \quad s_r = \left\{\left[K^{-1}(\gamma_r)\right]'\right\}^{-1} 4\pi\gamma_r.$$

Функция $K(u)$ является мероморфной, как правило, четной, имеющей нули z_n и полюса γ_r, обладающие асимптотическим поведением

$$z_n = in[1+o(1.1)], \quad n\to\infty; \quad \gamma_r = ir[1+o(1.1)], \quad r\to\infty.$$

Здесь функции $\phi(x,\gamma_r)$, $\theta(\xi,\gamma_r)$ являются линейно независимыми решениями однородного дифференциального уравнения Гельмгольца вида

$$L_\lambda y \equiv y_{xx} + \alpha(x)y_x + \left[s(x)+\lambda^2\beta(x)\right]y = 0. \tag{1.2}$$

Эти независимые решения, или собственные функции оператора L_λ, в связи с имеющимся произволом, подбираются таким образом, чтобы выполнялись свойства

$$\phi(x,\lambda_r) = \theta(x,\lambda_r) = 1, \quad \lambda_r = ir\left[1+O(r^{-\varepsilon})\right], \quad \varepsilon>0,$$

$$\phi_x(x,\lambda) = i\phi(x,\lambda)\left[1 + O(\lambda^{-\varepsilon})\right], \quad \theta_x(x,\lambda) = -i\theta(x,\lambda)\left[1 + O(\lambda^{-\varepsilon})\right], \quad \operatorname{Im}\lambda \gg 1.$$

Возможности их подбора с указанными свойствами описаны в [3]. Ниже приводятся некоторые примеры собственных функций, формирующих ядра в (1.1) со следующими свойствами:

1) $\alpha = s = 0, \quad \beta = 1,$
$\phi(x,\lambda) = e^{i\lambda(x-b_1)}, \quad \theta(x,\lambda) = e^{i\lambda(b_2-x)};$

2) $\alpha = x^{-1}, \quad s = -nx^{-1}, \quad \beta = 1,$
$\phi(x,\lambda) = K_n(-i\lambda x)K_n^{-1}(-i\lambda b_1), \quad \theta(x,\lambda) = I_n(-i\lambda x)I_n^{-1}(-i\lambda b_2);$

3) $\alpha = x^{-1}, \quad s = \nu = \mathrm{const}, \quad \beta = -x^{-2},$
$\phi(x,\lambda) = K_{i\lambda}(-i\nu x)K_{i\lambda}^{-1}(-i\nu b_1), \quad \theta(x,\lambda) = I_{i\lambda}(-i\nu x)I_{i\lambda}^{-1}(-i\nu b_2);$

4) $\alpha = -\operatorname{cth} x, \quad s = \mu sh^{-2}x, \quad \beta = 1,$
$\phi(x,\lambda) = Q^{\mu}_{-0,5+i\lambda}(\operatorname{ch} x)/Q^{\mu}_{-0,5+i\lambda}(\operatorname{ch} a), \quad \theta(x,\lambda) = P^{\mu}_{-0,5+i\lambda}(\operatorname{ch} x)/P^{\mu}_{-0,5+i\lambda}(\operatorname{ch} b);$

5) $\alpha = \operatorname{ctg} x, \quad s = \nu(\nu-1), \quad \beta = -\sin^2 x,$
$\phi(x,\lambda) = P^{-i\lambda}_{\nu-1}(\cos x)/P^{-i\lambda}_{\nu-1}(\cos b_1), \quad \theta(x,\lambda) = P^{-i\lambda}_{\nu-1}(\cos x)/P^{-i\lambda}_{\nu-1}(\cos b_2).$

Здесь $K_n(x)$ — функция Макдональда, $I_n(x)$ — функция Инфельда, $P_n^{\mu}(x)$ — шаровая функция, $Q_n^{\mu}(x)$ — модифицированная шаровая функция.

В связи с разработкой нового универсального метода моделирования. позволяющего представлять решения векторных граничных задач разложенными по решениям граничных задач для уравнения Гельмгольца решение уравнений типа (1.1) приобрело новое значение в приложениях [23].

Наличие свойств собственных функций оператора Гельмгольца (1.2) в разных криволинейных координатах приводит к интегральным преобразованиям, дискретным, в форме рядов, или непрерывным, в форме интегралов.

В частности, имеет место интегральное преобразование [23]

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\theta(x,\lambda)R(\lambda)d\eta(\lambda), \quad F(\lambda) = \int\limits_{b_1}^{b_2} R(\lambda)\theta(\xi,\lambda)f(\xi)\sigma^2 d\xi, \tag{1.3}$$

Здесь вместо $\theta(x,\lambda)$ может стоять $\phi(x,\lambda)$ или их комбинация.

В работе [3] предложен метод исследования интегральных уравнений (1.1) путем поиска общего вида решений интегральных уравнений и последующего сведения их к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Для этого, принимаем функцию $f(x)$ в форме (1.3) и отыскиваем решение в виде

$$q(x) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[X_n\phi(x,\gamma_r) + Y_n\theta(\xi,\gamma_r)\right] \tag{1.4}$$

Внеся соотношение (1.4) в (1.1) и используя соотношения интегрирования собственных функций одного и того же дифференциального оператора [3] после преобразований и приравнивания левых и правых частей уравнений, получим соотношения в форме бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. После ряда преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений представимых в форме

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A} = \|a_{rn}\|, \quad \mathbf{B} = \|b_{rn}\|, \\ a_{rn} = (\gamma_r - z_n)^{-1}, \quad b_{rn} = O(\gamma_r^{-1}z_n^{-1}, z_n^{-2}, \gamma_r^{-2}), \quad \mathbf{F} = \{f_r\}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Элементы бесконечной матрицы $\mathbf{B}$ в (1.5) имеют на порядок более быстрое убывание, чем бесконечной матрицы $\mathbf{A}$. Таким образом, для приближенного решения интегрального уравнения достаточно ограничиться матрицей $\mathbf{A}$. Значения w и f_r в (1.4) и (1.5) получаются в результате использования представления (1.3).

Уравнение (1.5) можно свести к уравнению второго рода, подействовав оператором $\mathbf{A}^{-1}$. Тогда будем иметь

$$\mathbf{X} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}.$$

Элементы обратной бесконечной матрицы строятся в результате решения методом факторизации интегрального уравнения Винера–Хопфа [3, 4, 14]. Обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \|\tau_{gr}\|, \quad \tau_{gr} = \frac{1}{K'_+(-z_g)(\gamma_r - z_g)\left[K_+^{-1}(-\gamma_r)\right]'}.$$

Благодаря более быстрому убыванию элементов оператора $\mathbf{B}$ (1.5) достаточно просто доказывается, что оператор $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ является вполне непрерывным [3, 4].

В каждом конкретном случае требуется исследование нормы оператора $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, которая при некоторых значениях параметров, входящих в (1.5), может оказываться меньше единицы. В этом случае можно получить точное решение интегрального уравнения методом последовательных приближений.

Вывод

Таким образом, показано, что интегральные уравнения смешанных граничных задач, поставленные на топологических многообразиях, также доступны для исследования и решения факторизационными методами. Построенные решения скалярных смешанных граничных задач с применением уравнений Гельмгольца с помощью универсального метода моделирования могут быть перенесены на векторные граничные задачи [23].

Литература [References]

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. *Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.* Наука, Москва, 1983. [Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami = Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers.* Nauka, Moscow, 1983. (in Russian)]
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. *Контактные задачи механики растущих тел.* Наука, Москва, 1991. [Arutyunyan N.Kh., Manzhirov A.V., Naumov V.E. *Kontaktnye zadachi mekhaniki rastushchikh tel = Contact problems in the mechanics of growing bodies.* Nauka, Moscow, 1991. (in Russian)]
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Наука, Москва, 1979. [Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamical mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Наука, Москва, 1974. [Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical mixed problems of elasticity theory.* Moscow: Nauka, 1974. (in Russian)]
5. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кириллова Е.В. Динамическая контактная задача для кругового штампа, сцепленного с упругим слоем. *Прикладная математика и механика*, 1992, т. 56, вып. 5, с. 780–785. [Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kirillova E.V. Dynamic Contact Problem for a Circular Die Bonded to an Elastic Layer. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, vol. 56, iss. 5, pp. 780–785. (in Russian)]
6. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы. *Прикладная математика и механика*, 1996, т. 60, вып. 2, с. 282–289. [Glushkov E.V., Glushkova N.V. Diffraction of elastic waves on spatial cracks of an arbitrary shape in terms of shape. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, iss. 2, pp. 282–289. (in Russian)]
7. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н. Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах. *Прикладная математика и механика*, 1998, т. 62, вып. 2, с. 297–303. [Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lapina O.N. Diffraction of normal modes in compound and stepped

elastic waveguides. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, iss. 2, pp. 297–303. (in Russian)]

8. Горячева И.Г., Добычин И.Г. *Контактные задачи в трибологии.* Машиностроение, Москва, 1988. [Goryacheva I.G., Dobychin I.G. *Kontaktnye zadachi v tribologii = Contact problems in tribology.* Mashinostroenie, Moscow, 1988. (in Russian)]
9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой, с ядрами, зависящие от разности аргументов. *Успехи мат. наук*, 1958, т. 13, вып. 2, с. 3–72. [Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Systems of integral equations on the half-line, with kernels, depending on the difference of the arguments. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1958, vol. 13, iss. 2, pp. 3–72. (in Russian)]
10. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Проекционные методы решения уравнений Винера-Хопфа.* Кишинев: Изд-во АН Молдав. ССР, 1967. [Gokhberg I.Ts., Feldman I.A. *Proektsionnye metody resheniya uravneniy Vinera-Khopfa = Projection methods for solving the Wiener-Hopf equations.* Publishing House of the Academy of Sciences of Moldova SSR, Chisinau, 1967. (in Russian)]
11. Игумнов Л.А. Интегральные представления для голоморфных векторов теории упругости. *Прикл. проблемы прочности и пластичности*, 2000, № 61, с. 210–219. [Igumnov L.A. Integral representations for holomorphic vectors of elasticity theory. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnostPrikladnye problemy prochnosti i plastichnosti = Applied Problems of Strength and Plasticity*, 2000, no. 61, pp. 210–219. (in Russian)]
12. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.* Наука, Москва, 1976. [Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. *Trekhmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti = Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity.* Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)]
13. Мусхелишвили Н.И. *Системы интегральных уравнений.* Физматлит, Москва, 1962. [Muskhelishvili N.I. *Sistemy integral'nykh uravneniy = Systems of integral equations.* Fizmatlit, Moscow, 1962. (in Russian)]
14. Нобл Б. *Метод Винера-Хопфа.* ИЛ, Москва, 1962. [Noble B. *Metod Vinera-Khopfa = Wiener-Hopf method.* Foreign Literature, Moscow, 1962. (in Russian)]
15. Попов Г.Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* Наука, Москва, 1982. [Popov G.Ya. *Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleniy = Concentration of elastic stresses near punches, cuts, thin inclusions and reinforcements.* Nauka, Moscow, 1982.]
16. Chen J.R., Lu Y., Ye G.R., Cai G.R. 3-D electroelastic fields in functionally graded piezoceramic hollow sphere under mechanical and electric loading. *Arch. Appl. Mech.*, 2002, vol. 72, no. 1, pp. 39–51.
17. Bazi F.L., Budyn E., Chessa J., Belytschko T. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks . *Computational Mechanics*, 2003, vol. 31, pp. 38–48. DOI 10.1007/s00466-002-0391-2
18. Liew K.M., Lim H.K., Tan M.J., He X.Q. Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 2002, vol. 29, p. 486.
19. Babeshko V.A., Vorovich I.I., Obraztsov I.P. The peculiarity of vibration process localization in semirestricted regions. In: *Proc. of the IUTAM Symposium on Elastic Wave Propagation and Ultrasonic Evaluation. Boulder CO USA. 1989.* Horth-Holland, 1990. pp. 53–55.
20. Gray L.J., Kaplan T., Richardson J.D., Paulino G.H. Green's functions and boundary integral analysis for exponentially graded materials. *Trans. ASME. J.*, 2003, iss. 4, pp. 543–549.
21. Hwang S.C., McMeeking R.M. A finite element model of ferroelastic polycrystals. *Intern. J. Solids Struct.*, 1999, vol. 36, no. 10, pp. 1541–1556.
22. Kagawa Y., Arai H. Finite element simulation of energy-trapped electromechanical resonators. *J. Sound and Vibr.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 317–335.
23. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740021040039