

УДК 51.37

DOI 10.31429/vestnik-19-2-53-61

Тестирование разностных схем при решении уравнения для функции тока на основе решения задачи ветровых течений

В. С. Кочергин¹✉, С. В. Кочергин¹, С. Н. Скляр²¹ Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия² Американский Университет в Центральной Азии (АУСА), ул. Аалы Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизстан✉ Кочергин Владимир Сергеевич; e-mail: vskocher@gmail.com

В работе производится тестирование ряда известных разностных схем, используемых для решения уравнения с малым параметром при старшей производной. Численное решение уравнения для функции тока сравнивается с полученным точным аналитическим аналогом, что позволяет выбрать разностную дискретизацию на основе проекционного варианта интегро-интерполяционного метода. Это особенно важно при аппроксимации производных и нахождении интегральных скоростей в том числе на границе области интегрирования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение, функция тока, интегральная скорость.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

ПОСТУПИЛА 16 апреля 2022 г. **ПОСЛЕ ДОРАБОТКИ** 18 апреля 2022 г. **ПРИНЯТО** 19 апреля 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 июня 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н. Тестирование разностных схем при решении уравнения для функции тока на основе решения задачи ветровых течений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 2. С. 53–61. DOI 10.31429/vestnik-19-2-53-61

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. © Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Testing of Difference Schemes in Solving the Equation for the Stream Function Based on Solving the Problem of Wind Currents

Vladimir S. Kochergin¹✉, Sergei V. Kochergin¹, Sergei N. Sklyar²¹ Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia² American University of Central Asia, Aaly Tokombaev str., 7/6, Bishkek, 720060, Kirgizstan✉ Vladimir S. Kochergin; e-mail: vskocher@gmail.com

The paper tests a number of well-known difference schemes used to solve the equation with a small parameter at the highest derivative. The numerical solution of the equation for the current function is compared with the obtained exact analytical analogue, which allows you to choose a difference discretization based on the projection version of the integro-interpolation method. This is especially important when approximating derivatives and finding integral velocities, including at the boundary of the integration domain. When solving problems of modeling transfer, diffusion–advection, various approaches are widely used to approximate the first derivatives – these are various monotonic schemes that use monotonicizers, artificial viscosity, various options for correcting flows. In this paper, in the numerical implementation of the model, well-known difference schemes are used for comparison: central differences, directional differences, schemes of A.A. Samarsky and A.M. Ilyin. The equation for the current function is integrated by the Seidel method. As a result of numerical experiments, it is shown that the best results are obtained when using the Ilyin scheme, and the biggest differences from the exact solution are obtained when using the directional difference scheme and the central difference scheme with a large grid step in space. Implemented testing of difference schemes and comparison of calculation results with an accurate analytical solution allows for a reasonable choice of discretizations when integrating such equations. Such a choice naturally depends on the level of sampling of the model and allows, all other things being equal, to increase the accuracy of reproduction of the desired solution or reduce the required computing resources.

KEYWORDS dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution, current function, integral velocity.

FUNDING The work was carried out for the state assignment on the topic 0555-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal studies”).

RECEIVED 16 April 2022. **REVISED** 18 April 2022. **ACCEPTED** 19 April 2022. **PUBLISHED** 30 June 2022.

CITE AS Kochergin V. S., Kochergin S. V., Sklyar S. N. Testing of difference schemes in solving the equation for the stream function based on solving the problem of wind currents // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 53–61. DOI 10.31429/vestnik-19-2-53-61

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

В последние годы возрастает значение численного моделирования динамики океана при решении актуальных проблем экологического мониторинга и задач прогноза погоды. Интенсивное развитие вычислительной техники позволило существенно продвинуться в этом направлении, особенно за счет увеличения дискретизации решаемых задач. Однако использование современных компьютерных мощностей и новых вычислительных схем и алгоритмов может дать ощутимый эффект при решении таких задач. При выборе той или иной модели динамики океана чаще всего происходит сравнение модельных результатов между собой, исходя из опыта и субъективных предпочтений исследователей. Поэтому наличие точного решения той или иной задачи позволяет осуществить такой выбор используемых схем и алгоритмов для ее численной реализации более объективным способом. Модели динамики океана достаточно сложны [1]. Аналитические решения существуют для самых простых постановок, например, модель Стоммела [2–4] для задачи ветровых течений Экмановского типа. В [5, 6] такая задача реализована при помощи метода обращения динамического оператора для исследования применяемых вычислительных схем специального вида для вычисления полей скорости. В работах [7, 8] рассматривается модель, учитывающая переменность скорости по всем трем направлениям, что позволяет анализировать точность вычисления не только ее горизонтальных компонент, но и вертикальной составляющей. В этих работах показано преимущество реализации алгоритма прогонки для вычисления вертикальной скорости. Сравнение численных результатов осуществляется с точным решением. Задача в такой постановке рассматривается и в данной работе для оценки точности расчета функции тока и сравнения результата с полученным в [7] аналитическим решением.

1. Задача в безразмерном виде

Рассмотрим водоем с плоским дном прямоугольной формы. Пусть поверхность рассматриваемого водоема в плоскости xOy задается следующим образом:

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q],$$

глубина $H > 0$. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом: Ox — на восток, Oy — на север, Oz — вертикально вниз. В области $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\}$, рассмотрим следующую систему уравнений движения в безразмерной форме:

$$\begin{cases} -\ell v = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \ell u = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\left\{ z = 0, (x, y) \in \Omega_0 \right\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \quad (1.2)$$

$$\left\{ z = H, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \quad (1.3)$$

$$\{0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial\Omega_0\} : Un_x + Vn_y = 0. \quad (1.4)$$

В (1.4) интегральные скорости определяются по формулам

$$U(x, y) = \int_0^H u(x, y, z) dz, \quad V(x, y) = \int_0^H v(x, y, z) dz,$$

а в (1.3) используется следующий вариант параметризации придонного трения

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \quad (1.5)$$

В соответствии с моделью Стоммела предположим, что

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const}; \\ \tau_x &= \frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. Аналитическое решение

В (1.1) проинтегрируем каждое уравнение от поверхности до дна, с учетом краевых условий, имеем

$$\begin{cases} \mu U - \ell V = -H \frac{\partial P^s}{\partial x} + \tau_x, \\ \ell U + \mu V = -H \frac{\partial P^s}{\partial y} + \tau_y, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega^0, \quad Un_x + Vn_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Из первых двух уравнений в (2.1) исключаем градиенты давления, за счет перекрестного дифференцирования, вводим функцию тока $\Psi(x, y)$ по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

В результате для функции тока получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -F \sin\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \\ \Psi = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение задачи (2.2) ищем в виде

$$\Psi(x, y) = X(x) \sin\left(\frac{\pi y}{q}\right).$$

Для функции $X(x)$ из (2.2) получаем задачу

$$\begin{cases} \mu X'' + \beta X' - \mu \left(\frac{\pi}{q}\right)^2 X = F, \quad 0 < x < r; \\ X(0) = X(r) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) представим как сумму частного решения

$$\bar{X}(x) = -\frac{F}{\mu(\pi/q)^2}$$

неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$X_0(x) = \bar{C}_1 e^{Ax} + \bar{C}_2 e^{Bx},$$

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{q}\right)^2}; \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{q}\right)^2}.$$

Константы определим так, чтобы удовлетворить краевым условиям в (2.2), и в итоге получим

$$X(x) = \bar{X}(x) + X_0(x) = \frac{F}{\mu(\pi/q)^2} (C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} - 1),$$

$$\Psi(x, y) = \frac{F}{\mu(\pi/q)^2} (C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} - 1) \sin\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad (2.4)$$

$$C_1 = \frac{1 - e^{Br}}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_1 + C_2 = 1.$$

3. Численные методы решения задачи

Рассмотрим задачу (2.2) для функции тока, записав ее для общей правой части

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Phi(x, y), & (x, y) \in \Omega_0, \\ \Psi = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0; \end{cases} \quad (3.1)$$

Построим численный метод для ее решения. С этой целью в области $\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]$ рассмотрим вычислительную сетку

$$\omega_h \equiv \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i = (i-1)\Delta x, y_j = (j-1)\Delta y; \right. \\ \left. i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}; \Delta x = \frac{r}{n-1}; \Delta y = \frac{q}{k-1} \right\}. \quad (3.2)$$

Пусть сеточная функция $\{\Psi_{i,j}\}$, определенная на этой сетке, состоит из приближенных значений для величин $\{\Psi(x_i, y_j)\}$ — точного решения. Для определения значений $\{\Psi_{i,j}\}$ рассмотрим многопараметрическое семейство разностных схем

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \\ + \beta \left(\frac{1 + \theta_{i,j}}{2} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1 - \theta_{i,j}}{2} \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) = \Phi(x_i, y_j), & i = \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{2, k-1}; \\ \Psi_{i,j} = 0, & i, j \in \partial\omega_h, \quad \theta_{i,j} \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Здесь $\theta_{i,j}$ — набор параметров определяющий аппроксимацию производной $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ в узле сетки (x_i, y_j) . Преобразуем это семейство следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\beta \Delta x}{2\mu} (1 + \theta_{i,j}) \right) \Psi_{i+1,j} + \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(1 - \frac{\beta \Delta x}{2\mu} (1 - \theta_{i,j}) \right) \Psi_{i-1,j} + \frac{\mu}{\Delta y^2} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) = \\ = \left(\frac{2\mu}{\Delta y^2} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\beta \Delta x}{2\mu} \theta_{i,j} \right) \right) \Psi_{i,j} + \Phi_{i,j}; \quad i = \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{2, k-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем разностное число $R \equiv \frac{\beta \Delta x}{2\mu}$, а последнюю сеточную задачу будем решать, используя итерационный метод Зейделя,

$$\begin{aligned} \left[\frac{2\mu}{\Delta y^2} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} (1 + R\theta_{i,j}) \right] \Psi_{i,j}^m &= \frac{\mu}{\Delta x^2} [1 + R(1 + \theta_{i,j})] \Psi_{i+1,j}^{m-1} + \\ &+ \frac{\mu}{\Delta x^2} [1 - R(1 - \theta_{i,j})] \Psi_{i-1,j}^m + \frac{\mu}{\Delta y^2} (\Psi_{i,j+1}^{m-1} + \Psi_{i,j-1}^m) - \Phi_{i,j}, \quad (3.4) \\ i &= \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{2, k-1}; \\ \Psi_{i,j}^m &= 0, \quad i, j \in \partial\omega_h; \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad \Psi_{i,j}^0 = 0, \quad i, j \in \omega_h. \end{aligned}$$

Численные эксперименты показали, что при решении данного уравнения метод сходится, но для получения удовлетворительных результатов расчеты необходимо проводить с двойной точностью. Параметры $\theta_{i,j}$ обычно задают как некоторые функции от разностного числа R . В нашем случае число R — постоянная величина, поэтому семейство параметров превратится в один параметр: $\theta_{i,j} = \theta(R_{i,j}) = \theta(R)$. Функцию $\theta(R)$ можно выбирать различными способами, в частности:

1. $\theta(R) = 0$ — схема с центральной разностью [9];
2. $\theta(R) = \text{sign}(R)$ — схема с направленной разностью [9];
3. $\theta(R) = \frac{|R|}{1+|R|} \text{sign}(R)$ — схема Самарского А.А. [10];
4. $\theta(R) = \text{cth}(R) - \frac{1}{R}$ — схема Ильина А.М. [11, 12].

Выбор функции $\theta(R)$ с использованием вариантов 2–4 гарантирует однозначную разрешимость системы уравнений (3.3), так как в этом случае сеточный оператор этой системы будет оператором монотонного вида [13].

4. Результаты численных экспериментов

Для иллюстрации рассмотрим в качестве модельного объекта прямоугольный водоем с плоским дном с характерными размерами Черного моря:

$$a = 11 \cdot 10^7 \text{ (см)} = 1100 \text{ (км)}, \quad b = 5 \cdot 10^7 \text{ (см)} \approx 500 \text{ (км)}, \quad D = 2 \cdot 10^5 \text{ (см)} = 2000 \text{ (м)},$$

где a — размер по долготе, а b — по широте, D — глубина.

Выберем характерные масштабы

$$L = 10^7 \text{ (см)}, \quad h = 2 \cdot 10^5 \text{ (см)}.$$

Тогда имеем

$$r = 11, \quad q = 5, \quad H = 1, \quad k = 0,05, \quad \ell_0 = 1, \quad \beta = 0,00023, \quad F = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}, \quad \mu = 0,001.$$

Сравнение будем производить в следующих нормах:

$$NC = \frac{\max_{\omega_h} |\Psi - \bar{\Psi}| \cdot 100}{\max_{\omega_h} |\bar{\Psi}|}, \quad NL = \frac{\sum_{\omega_h} |\Psi - \bar{\Psi}| \cdot 100}{\sum_{\omega_h} |\bar{\Psi}|}, \quad (4.1)$$

где $\bar{\Psi}$ — рассчитанное значение по аналитической формуле (2.4), Ψ — оценка функции тока, получаемая тем или иным способом. На рис. 1 изображены точные (аналитические) значения $\bar{\Psi}$.

Рис. 2–5 характеризуют Ψ , полученную при использовании различных дискретизаций при интегрировании уравнения для функции тока (3.1) на пространственной сетке 23×11 узлов. Рис. 2 изображает структуру функции тока в случае использования схемы центральной разности при аппроксимации члена с первой производной. Рис. 3 получен при использовании

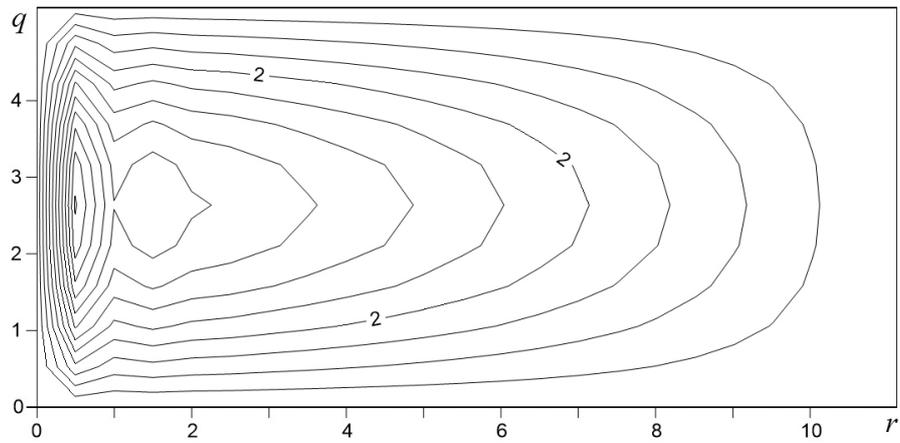


Рис. 1. Аналитические значения функции тока

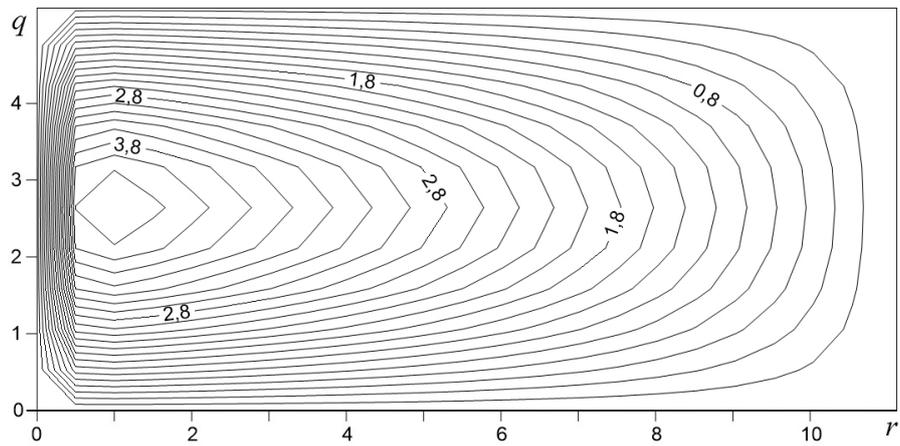


Рис. 2. Функция тока, полученная по схеме 1 (центральная разность)

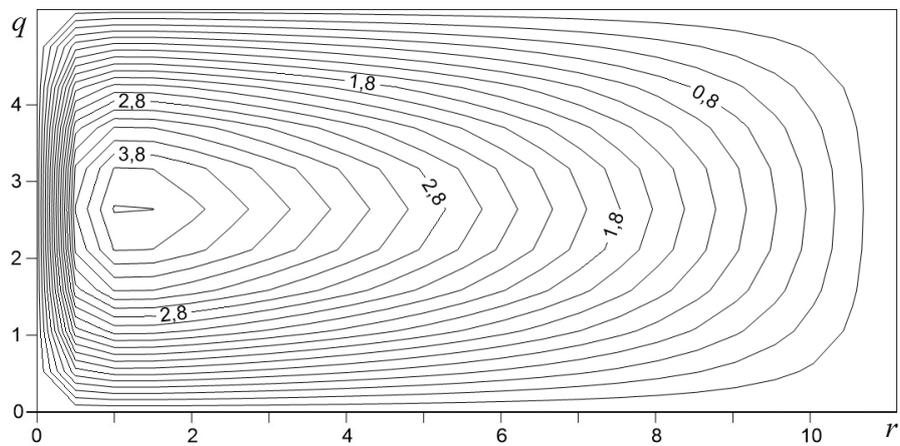


Рис. 3. Функция тока, полученная по схеме 2 (направленная разность)

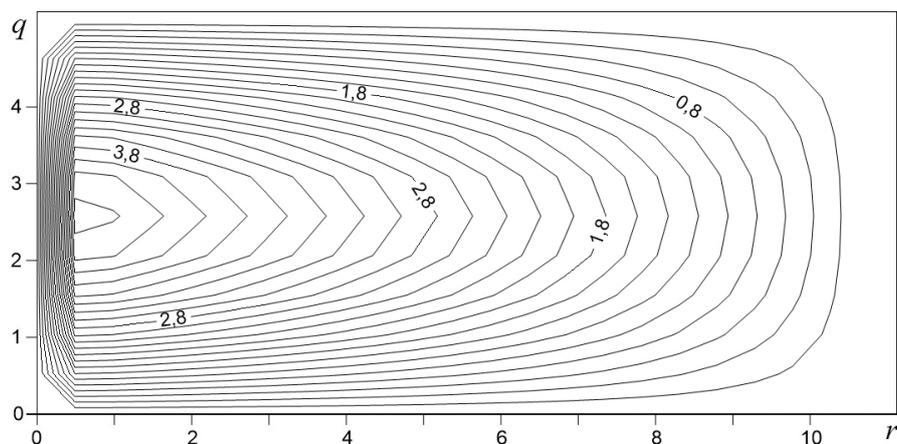


Рис. 4. Функция тока, полученная по схеме 3 (Самарского А.А.)

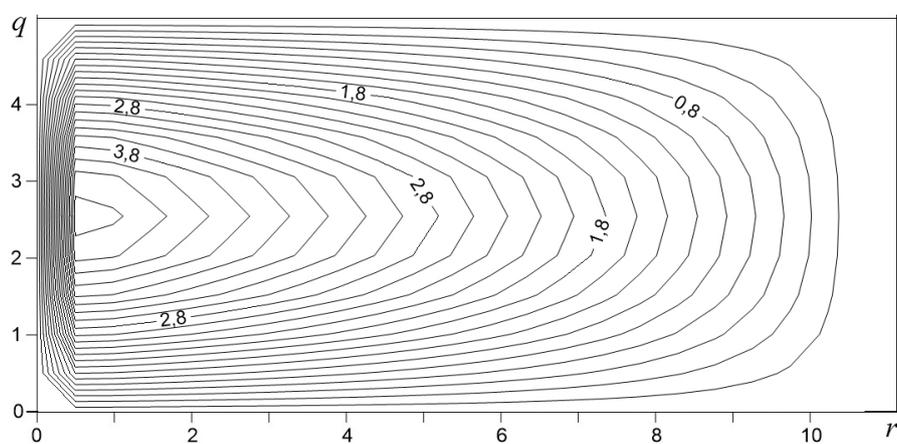


Рис. 5. Функция тока, полученная по схеме 4 (Ильина А.М.)

для этих целей схемы направленной разности. Результат полученный при использовании схемы Самарского А.А. представлен на рис. 4, расчет с использованием схемы Ильина А.М. изображен на рис. 5.

Из рис. 1, 2 видно, что при заданных значениях входных параметров на данной сетке в решении уравнения для функции тока явным образом просматривается пилообразная структура, которая характерна при использовании схем с центральными разностями. Использование схемы направленных разностей улучшает структуру решения, но оно получается более сглаженным. На рис. 4 представлен результат расчета с использованием схемы Самарского, а рис. 5 характеризует результат интегрирования уравнения для функции тока, полученный на основе использования схемы Ильина.

В табл. 1 представлены значения норм для различных схем при увеличении узлов сетки. Для схемы 1 (центральной разности) увеличение дискретизации приводит к существенному улучшению результатов. Схема направленных разностей из-за своего сглаживающего эффекта дает большую ошибку, особенно в норме NC . Из табл. 1 видно, что наилучшие результаты получены при использовании схемы 4 (Ильина А.М.). Используемый при этом сеточный оператор монотонный.

Таблица 1. Значения норм для различных схем с увеличением узлов сетки

№	Число узлов сетки	Схема 1		Схема 2		Схема 3		Схема 4	
		NC	NL	NC	NL	NC	NL	NC	NL
1	23×11	25,6713	3,9142	21,2091	2,9935	6,8603	1,1309	0,3094	0,4082
2	111×51	1,9175	0,1101	11,1673	0,9447	2,1644	0,1787	0,1669	0,0212
3	221×101	0,4648	0,0277	6,4508	0,4969	0,7120	0,0588	0,0062	0,0067
4	441×201	0,1159	0,0089	3,4327	0,2616	0,2083	0,0022	0,0094	0,0071

Заключение

Таким образом, в работе проведено сравнение численных решений задачи с точными (аналитическими) значениями функции тока. В результате расчетов показано существенное влияние разностной дискретизации на получаемые результаты. Используемая в расчетах монотонная схема А.А. Ильина позволяет получать решения с хорошей точностью при дискретизации задачи на более крупной сетке. Использование таких схем приводит к существенной экономии вычислительных ресурсов при интегрировании моделей динамики водоемов.

Литература [References]

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. *Математическое моделирование циркуляции океана*. Москва, Наука, 1988. [Marchuk G.I., Sarkisyan A.S. *Matematicheskoe modelirovanie cirkulyacii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation*, Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
2. Stommel H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
3. Stommel H. *The gulf stream*. A Physical and Dynamical Description. University of California Press, 1965.
4. Стоммел Г. *Гольфстрим*. Москва, ИЛ, 1965. [Stommel G. *Gulfstream = Gulfstream*. Moscow, Inostrannaya Literatura, 1965. (in Russian)]
5. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, ЭкоСи-Гидрофизика, 2002. [Eremeev V.N., Kochergin V.P., Kochergin S.V., Sklyar S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins*. Sevastopol, Ekosi-Gidrofizika, 2002. (in Russian)]
6. Kochergin V.P., Dunets T.V. Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*. 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
7. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical Test Problem of Wind Currents. In: Chaplina T.O. (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume I*. Springer Geology. Springer, Cham., 2020, pp. 17–25.
8. Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows. In: Chaplina T.O. (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume II*. Springer Geology. Springer, 2021, pp. 65–71.
9. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980. [Patrick J. Roache *Computational fluid dynamics = Computational fluid dynamics*. Moscow, Mir, 1980. (in Russian)].
10. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1983. [Samarskiy A. A. *Teoriya raznostnyh skhem = Theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)].
11. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin A. M. Raznostnaya skhema dlya differencial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshej proizvodnoj = Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)].
12. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. Москва, Мир, 1983. [Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A. *Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pgranichnym sloem = Uniform numerical methods for solving problems with a boundary layer*. Moscow, Mir, 1983. (in Russian)].

13. Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. Москва, Мир, 1969.
[Kollatz L. *Funkcional'nyj analiz i vychislitel'naya matematika = Functional analysis and computational mathematics*. Moscow, Mir, 1969. (in Russian)].