

УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-2-17-28

## Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин методом граничных состояний

Д. А. Иванычев  

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; e-mail: [lsivdml@mail.ru](mailto:lsivdml@mail.ru)

В работе представлена методика построения упругих полей для анизотропных пластин средствами энергетического метода граничных состояний. На боковой поверхности пластин задаются усилия, приводящие к изгибу и кручению. Базисы пространств состояний, составляющих основу метода, формируется согласно фундаментальной системе многочленов Вейерштрасса. Доказан изоморфизм пространств внутренних и граничных состояний, который позволяет свести отыскание внутреннего состояния к изучению изоморфного ему граничного состояния. Механические характеристики представлены в виде рядов Фурье.

Приведено решение первой основной задачи изгиба с кручением для прямоугольной пластины из стеклопластика с соответствующими выводами, задачи кручения для пластинки нетривиальной формы и основной смешанной задачи для прямоугольной пластинки. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задач и графическая визуализация результатов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА** анизотропия, анизотропные пластинки, метод граничных состояний, изгиб, кручение, равновесие.

**ФИНАНСИРОВАНИЕ** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**ПОСТУПИЛА** 9 апреля 2022 г. **ПОСЛЕ ДОРАБОТКИ** 14 апреля 2022 г. **ПРИНЯТО** 18 апреля 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 июня 2022 г.

**ЦИТИРОВАНИЕ** Иванычев Д. А. Моделирование напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин методом граничных состояний // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 2. С. 17–28. DOI 10.31429/vestnik-19-2-17-28

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов. © Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Axisymmetric Thermoelastic Deformation of Transversely Isotropic Rotation Bodies

Dmitry A. Ivanychev 

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; e-mail: [lsivdml@mail.ru](mailto:lsivdml@mail.ru)

The paper presents a technique for constructing elastic fields for anisotropic plates by means of the energy method of boundary states. Forces are set on the side surface of the plates, leading to the problems of bending and torsion. The developed theory for constructing bases for the spaces of internal and boundary states is based on a general approximate solution of the problem of plate bending. Relations are formed that determine the desired elastic state. The bases of the state spaces that form the basis of the method are formed according to the fundamental system of Weierstrass polynomials. An isomorphism of the spaces of internal and boundary states is proved, which makes it possible to establish a one-to-one correspondence between the elements of these spaces. The isomorphism of spaces makes it possible to reduce the search for an internal state to the study of a boundary state isomorphic to it. Mechanical characteristics are presented in the form of Fourier series.

The solution of the test first main problem of bending with torsion for a rectangular fiberglass plate with the corresponding conclusions, the problem of torsion for a plate of a non-trivial shape, and the problem with mixed boundary conditions for a rectangular plate, where both twisting and bending forces are set on one face, and the opposite face pinched. Explicit and indirect signs of convergence of problem solving and graphical visualization of the results are presented.

**KEYWORDS** anisotropy, anisotropic plates, boundary state method, bending, torsion, equilibrium.

**FUNDING** The study did not have sponsorship.

**RECEIVED** 9 April 2022. **REVISED** 14 April 2022. **ACCEPTED** 18 April 2022. **PUBLISHED** 30 June 2022.

**CITE AS** Ivanychev D. A. Axisymmetric thermoelastic deformation of transversely isotropic rotation bodies // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 17–28. DOI 10.31429/vestnik-19-2-17-28

The author declare no competing interests. © The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

В настоящее время приближенная теория изгиба пластин с разной степенью анизотропии, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява, хорошо изучена. Исследования по теории изгиба тонких пластин связаны с работами Амбарцумяна С.А., Артюхина Ю.П., Бережницкого Л.Т., Williams M.L., Грилицкого Д.В., Isida M., Калоерова С.А., Лехницкого С.Г., Линькова А.М., Пелеха Б.Л., Максименко В.Н., Подружина Е.Г., Попова Г.Я., Прусова И.А., Reissner E., Tamate O., Тимошенко С.П., Фильштинского Л.А., Hasebe N. и др. Однако приближенность основных гипотез создает определенные трудности при численной реализации задач изгиба. Особенностью традиционных методов расчета можно считать отсутствие универсального подхода при решении задач, большой объем вычислительных операций, большую размерность разрешающей системы уравнений. Не смотря на все это, численным методам решения задач изгиба уделено внимание в ряде работ. Например, в работе [1] рассматривается двумерная краевая задача статического поперечного изгиба тонкой прямоугольной пластинки из анизотропного материала. Прогобы пластинки определялись модифицированным методом сплайн-коллокации, приводящего к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [2] приводится методика численного определения напряженно-деформированного состояния изгибаемой тонкой ортотропной пластинки при нетрадиционных способах закрепления ее краев. На основе технической теории изгиба тонких анизотропных пластин строятся представления фундаментальных решений для ортотропных пластин, имеющих каноническую форму [3]. В работе [4] построены комплексные потенциалы и интегральные представления для определения напряженно-деформированного состояния при изгибе анизотропных пластин, имеющих дефекты типа трещин, отверстий и содержащих абсолютно жесткие криволинейные стержни и двумерные жесткие шайбы.

Ряд работ посвящен изгибу односвязных и многосвязных анизотропных пластин [5–8].

В настоящей работе предлагается совершенствование нового энергетического метода граничных состояний на класс задач изгиба и кручения анизотропных тонких плит.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие тонкой плиты, толщина которой мала по сравнению с другими размерами, и испытывающей малые, по сравнению с толщиной, деформации (не превышающие толщины). Такие плиты еще называют пластинками. Плоская пластинка деформируется нагрузками, распределенными по краю и приводящими к скручивающим моментам. Последние могут быть как заданными, так и реактивными, возникающими в местах закреплений (рис. 1). Пластинка толщиной  $h$  в каждой точке имеет одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Объемные силы отсутствуют.

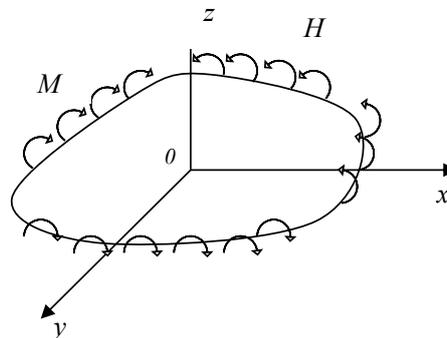


Рис. 1. Анизотропная пластинка

Приближенная теория задачи изгиба и кручения анизотропных пластин (тонких плит) рассмотрена С.Г. Лехницким [9]. Перемещения точек пластинки  $u$  и  $v$  определяются через

функцию прогиба срединной плоскости  $w(x, y)$ , определяющей форму изогнутой срединной поверхности

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}; & v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; & \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Обобщенный закон Гука имеет вид (компонента  $\sigma_{zz}$  пренебрегается)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\tau_{xy}; \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $a_{ij}$  — упругие параметры среды [10].

Уравнение прогибов анизотропной пластинки

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (1.3)$$

Общее решение задачи, выражающее компоненты тензора напряжений и вектора перемещений через две комплексные переменные, сопряженные аффинными преобразованиями, имеет вид

$$\begin{aligned} w &= 2 \operatorname{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]; \\ M_x &= -2 \operatorname{Re}[p_1 w_1''(z_1) + p_2 w_2''(z_2)]; & M_y &= -2 \operatorname{Re}[q_1 w_1''(z_1) + q_2 w_2''(z_2)]; \\ H_{xy} &= H_{yx} = -2 \operatorname{Re}[r_1 w_1''(z_1) + r_2 w_2''(z_2)]; \\ N_x &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 s_1 w_1'''(z_1) + \mu_2 s_2 w_2'''(z_2)]; & N_y &= 2 \operatorname{Re}[s_1 w_1'''(z_1) + s_2 w_2'''(z_2)]; \\ \sigma_{xx} &= \frac{12M_x}{h^3} z; & \sigma_{yy} &= \frac{12M_y}{h^3} z; & \tau_{xy} &= \frac{12H_{xy}}{h^3}; \\ \tau_{xz} &= \frac{6N_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right); & \tau_{yz} &= \frac{6N_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $M_x, M_y$  — изгибающие моменты;  $H_{xy}, H_{yx}$  — скручивающие моменты;  $N_x, N_y$  — перерезывающие силы;  $p_i, q_i, r_i$  — константы, определяемые параметрами анизотропии  $a_{ij}$ .

Функции  $w_i(z_i)$  — аналитические по своим переменным;  $z_1 = x + \mu_1 y, z_2 = x + \mu_2 y$  — обобщенные комплексные переменные;  $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$  — комплексные корни векового уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (1.5)$$

где  $D_{ij}$  — жесткости анизотропной пластинки.

$$\begin{aligned} D_{ij} &= B_{ij} \frac{h^3}{12}; & B_{11} &= \frac{1}{\Delta} (a_{22}a_{66} - a_{26}^2); & B_{22} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{66} - a_{16}^2); \\ B_{12} &= \frac{1}{\Delta} (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}); & B_{66} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2); \\ B_{16} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}); & B_{26} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}); \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

Интегральные значения моментов и перерезывающих сил

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z \, dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z \, dz; \quad H_{xy} = H_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz; \quad (1.8)$$

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} \, dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} \, dz.$$

Целью работы является построение аналитического решения для однородной анизотропной пластинки. Ее достижению отвечает система взаимосвязанных процедур: корректная постановка, обезразмеривание, выбор метода решения, верификация полученных результатов, графическая иллюстрация.

Для решения основных задач механики в теории изгиба анизотропных пластин предлагается метод граничных состояний (МГС).

## 2. Основные положения метода граничных состояний

Метод граничных состояний [11] является энергетическим методом решения краевых задач уравнений математической физики. Его фундамент составляют пространства внутренних  $\Xi$  и граничных  $\Gamma$  состояний

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (2.1)$$

Основную сложность формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Скалярное произведение в пространстве  $\Xi$  внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния пластинки, занимающей область  $V$ :

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 \, dv. \quad (2.2)$$

Граничное состояние определяется компонентами вектора перемещения точек границы и поверхностных усилий

$$\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (2.3)$$

где  $n_j$  — компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний  $\Gamma$  скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела  $\partial D$ , например для 1-го и 2-го состояния

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\partial D} p_i^1 u_i^2 \, dl,$$

причем в силу принципа возможных перемещений:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_{\partial D} p_i^1 u_i^2 dl = \int_{\partial D} p_i^2 u_i^1 dl.$$

Доказано, что в случае гладкой границы оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом [11]. По определению каждому элементу  $\xi_k \in \Xi$  соответствует единственный элемент  $\gamma_k \in \Gamma$ , причем это соответствие взаимно-однозначное:  $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$ . Это позволяет свести отыскание внутреннего состояния к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий. В случае первой и второй основной задачи механики проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомого внутреннего  $\xi$  и граничного  $\gamma$  состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в явном виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k. \quad (2.4)$$

Коэффициенты Фурье в случае первой основной задачи с заданными на границе усилиями  $\mathbf{p} \in \{p_x, p_y, p_z\}$ , имеют вид

$$c_k = (\mathbf{p}, \mathbf{u}^k) = \int_{\partial D} (p_x u^k + p_y v^k + p_z w^k) dl, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{u}^k \in \{u^k, v^k, w^k\}$  — вектор перемещения в базисном элементе  $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$ .

Коэффициенты Фурье в случае второй основной задачи с заданными на границе перемещениями  $\mathbf{u} \in \{u, v, w\}$ , имеют вид

$$c_k = (\mathbf{u}, \mathbf{p}^k) = \int_{\partial D} (u p_x^k + v p_y^k + w p_z^k) dl,$$

где  $\mathbf{p}^k \in \{p_x^k, p_y^k, p_z^k\}$  — вектор усилия в базисном элементе  $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$ .

Основная смешанная задача состоит в определении механических характеристик, если на одной части границы  $\partial D_p$  заданы поверхностные усилия  $\mathbf{p}$ , а на другой части границы  $\partial D_u$  — поверхностные перемещения  $\mathbf{u}$ . Тогда задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_{kj} c_j = q_k; \quad Q_{kj} = 2\delta_{jk} - a_{kj};$$

$$a_{kj} = \int_{\partial D_p} u_i^{(j)} p_i^{(k)} dl + \int_{\partial D_u} p_i^{(j)} u_i^{(k)} dl; \quad q_k = \int_{\partial D_u} u_i p_i^{(k)} dl + \int_{\partial D_p} p_i u_i^{(k)} dl,$$

где компоненты с верхними индексами  $(j)$  и  $(k)$  принадлежат соответствующим компонентам в базисе граничных состояний. Компоненты без индексов соответствуют заданным граничным условиям [12, 13].

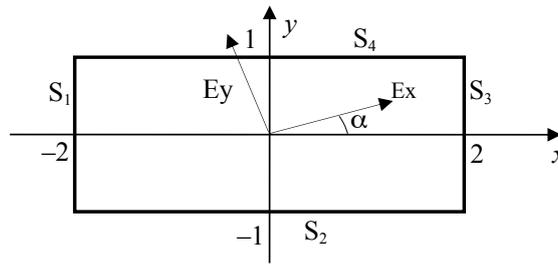


Рис. 2. Срединная плоскость прямоугольной пластинки,  $z = 0$

### 3. Решение основных задач средствами МГС

**Первая основная задача.** Процесс реализации решения этого класса задач проведем на примере достаточно простой тестовой задачи для прямоугольной сплошной пластинки (рис. 2) из тканевого стеклопластика горячего прессования СТЭТ с углом поворота осей анизотропии относительно координатных на угол  $\alpha = \pi/6$ . Для стеклопластика [14] безразмерные физические параметры среды равны:  $E_x = 3,59$ ,  $E_y = 2,93$ ,  $G_{xy} = 0,76$ ,  $\nu_{xy} = 1,777$ . Пластинка занимает область  $D = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1, -0,1 \leq z \leq 0,1\}$ .

Пластинка нагружена по боковым граням усилиями, приводящими к скручивающим и изгибающим моментам

$$\{p_x, p_y, p_z\} = \begin{cases} \{0, z, 0\}, & x = -2, -1 \leq y \leq 1, -0,1 \leq z \leq 0,1; \\ \{z, z, 0\}, & y = -1, -2 \leq x \leq 2, -0,1 \leq z \leq 0,1; \\ \{0, -z, 0\}, & x = 2, -1 \leq y \leq 1, -0,1 \leq z \leq 0,1; \\ \{-z, -z, 0\}, & y = 1, -2 \leq x \leq 2, -0,1 \leq z \leq 0,1. \end{cases}$$

Упругие параметры среды

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4021 & -0,1682 & 0,1516 \\ -0,1682 & 0,4334 & -0,0973 \\ 0,1516 & -0,0973 & 0,8844 \end{pmatrix};$$

параметры  $B_{ij}$  и  $D_{ij}$  рассчитываются по зависимостям (1.6).

Комплексные корни векового уравнения (1.5):

$$\mu_1 = -0,2716 + 1,483i, \quad \mu_2 = 0,1897 + 0,6772i.$$

Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций  $w_1(z_1)$  и  $w_2(z_2)$ . Для ограниченной односвязной области можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса

$$\begin{pmatrix} w_1(z_1) \\ w_2(z_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_2^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} iz_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На основании системы многочленов и общего решения (1.4) формируются базисные элементы пространства внутренних состояний (2.1). Базисный набор векторов перемещений при  $n = 2$  представлен в табл. 1.

Далее проводится ортонормирование базиса внутренних состояний с помощью разработанного рекурсивно-матричного алгоритма ортогонализации [13]. Первые четыре базисных элемента, дающие нулевые скалярные произведения (2.2), отброшены. Базисный элемент  $\varsigma_8$  линейно зависим по отношению к элементам  $\varsigma_5, \varsigma_6, \varsigma_7$ . В табл. 2 после переобозначения, приведем их ортонормированные выражения.

Таблица 1. Базисный набор векторов перемещений

	$u$	$v$	$w$
$\varsigma_1$	$-2z$	$0,5432z$	$2x - 0,5432y$
$\varsigma_2$	$-2z$	$-0,3794z$	$2x + 0,3794y$
$\varsigma_3$	$0$	$2,9656z$	$-2,9656y$
$\varsigma_4$	$0$	$1,3543z$	$1,3543y$
$\varsigma_5$	$-4xz + 1,0864yz$	$1,0864xz + 8,5019yz$	$2x^2 - 1,0864xy - 4,2509y^2$
$\varsigma_6$	$-4xz - 0,7588yz$	$-0,7588xz + 1,6903yz$	$2x^2 + 0,7588xy - 8,8451y^2$
$\varsigma_7$	$5,9319yz$	$5,9319xz - 3,2222yz$	$-5,9319xy + 1,6111y^2$
$\varsigma_8$	$2,7087yz$	$2,7087xz + 1,0276yz$	$-2,7087xy - 0,5138y^2$

Таблица 2. Ортонормированный базисный набор векторов перемещений

	$u$	$v$	$w$
$\xi_1$	$-3,9647xz + 1,0768yz$	$1,0768xz + 8,4269yz$	$1,9823x^2 - 1,0768xy - 4,2134y^2$
$\xi_2$	$-7,7246xz - 2,4122yz$	$-2,4122xz - 0,2312yz$	$3,8623x^2 + 2,4122xy + 0,1156y^2$
$\xi_3$	$-0,0244xz + 5,872yz$	$5,872xz - 3,1945yz$	$0,0122x^2 - 5,872xy + 1,5972y^2$

На данном этапе формируется пространство граничных состояний (2.3) и вычисляются коэффициенты Фурье (2.5). Для решения тестовой задачи потребовалось три коэффициента Фурье

$$c_1 = -0,05643; \quad c_2 = 0,02696; \quad c_3 = -0,0456.$$

Окончательно искомые поля механических характеристик восстанавливаются по зависимостям (2.4)

$$u = 0,01655xz - 0,39355yz; \quad v = -0,39355xz - 0,3361yz;$$

$$w = -0,00828x^2 + 0,39355xy + 0,16805y^2;$$

$$\sigma_{xx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_{yy} = \tau_{xy} = -z.$$

Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение (1.3), (1.7) и интегральные выражения (1.8) удовлетворяются тождественно.

Форма пластинки изображена на рис. 3. Здесь и далее контур пластинок, для наглядности, изображен в гипертрофированном виде.

В заключении можно сказать, что решение является строгим.

Рассмотрим теперь пластинку из того же материала, но нетривиальной формы (рис. 4). Область пластинки  $D = D_1 + D_2 + D_3$ ,

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid -1,5 \leq x \leq -0,5, -1 \leq y \leq 1, -0,1 \leq z \leq 0,1\};$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid -0,5 \leq x \leq 0,5, -1,5 \leq y \leq 1,5, -0,1 \leq z \leq 0,1\};$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \mid 0,5 \leq x \leq 1,5, -1 \leq y \leq 1, -0,1 \leq z \leq 0,1\}.$$

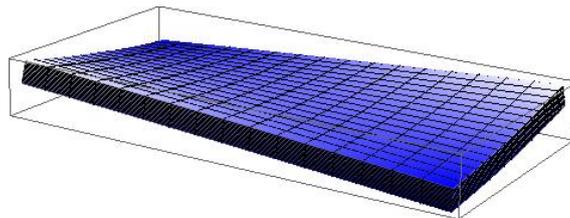


Рис. 3. Форма изогнутой пластинки

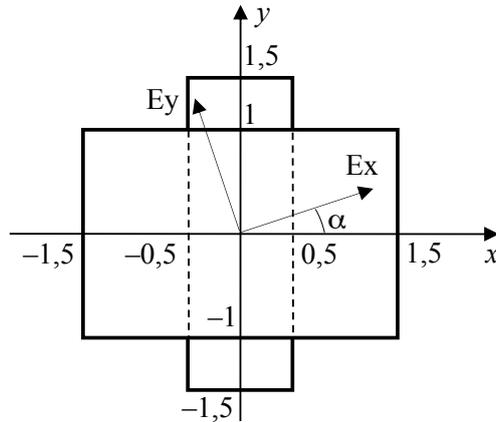


Рис. 4. Срединная плоскость пластинки нетривиальной формы,  $z = 0$

Таблица 3. Ненулевые коэффициенты Фурье

k	$c_k$										
1	-0,023	11	0,0559	25	0,0003	35	0,0108	49	-0,0095	59	0,0017
2	0,5157	16	-0,013	26	-0,0044	40	-0,0079	50	-0,0008	64	-0,0054
3	-0,1255	17	0,0312	27	0,0061	41	0,0179	51	0,0038	65	0,0141
8	0,0231	18	-0,0163	32	0,0102	42	0,0019	56	0,0098	66	-0,0037
9	-0,0441	19	-0,038	33	-0,0163	43	-0,0126	57	-0,0045	67	-0,0017
10	0,0462	24	0,0011	34	0,0047	48	-0,0055	58	0,0021		

Граничные условия, имитирующие скручивание пластинки по двум граням

$$\{p_x, p_y, p_z\} = \begin{cases} \{10z, 0, 0\}, & y = -1,5, \quad -0,5 \leq x \leq 0,5, \quad -0,1 \leq z \leq 0,1; \\ \{-10z, 0, 0\}, & y = 1,5, \quad -0,5 \leq x \leq 0,5, \quad -0,1 \leq z \leq 0,1; \end{cases}$$

на остальных поверхностях пластинки усилия отсутствуют.

Для приближенного решения данной задачи использовался отрезок базиса внутренних состояний в  $N = 69$  элементов. В табл. 3 приведены ненулевые коэффициенты Фурье.

Рис. 5 представляет собой график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком правильности полученного решения.

На рис. 6 представлены изолинии компонент тензора напряжений на поверхности  $z = 0,1$  (в силу симметрии изображена первая квадранта области): а — компоненты  $\tau_{xy}$ , б — компоненты  $\sigma_x$ .

Контур пластинки в деформированном состоянии представлен на рис. 7.

Результат решения первой основной задачи для пластинки нетривиальной формы — приближенное аналитическое решение.

**Вторая основная задача.** Во второй основной задаче механики в качестве граничных условий задается вектор перемещения точек границы, компоненты которого не связаны между собой, и задачей является отыскание напряженно-деформированного состояния от такого рода воздействия на границу тела. В теории изгиба пластин компоненты перемещения связаны между собой зависимостями (1.1), в противном случае будет нарушена гипотеза прямых нормалей [8]. Таким образом, задавая выражение для компоненты перемещения  $w$ , однозначно определяются две другие составляющие, а также деформации (1.1) и напряжения (1.2) и задача в такой постановке теряет смысл.

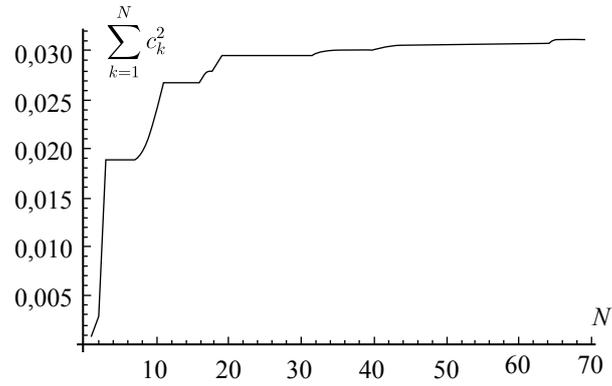


Рис. 5. Сумма Бесселя

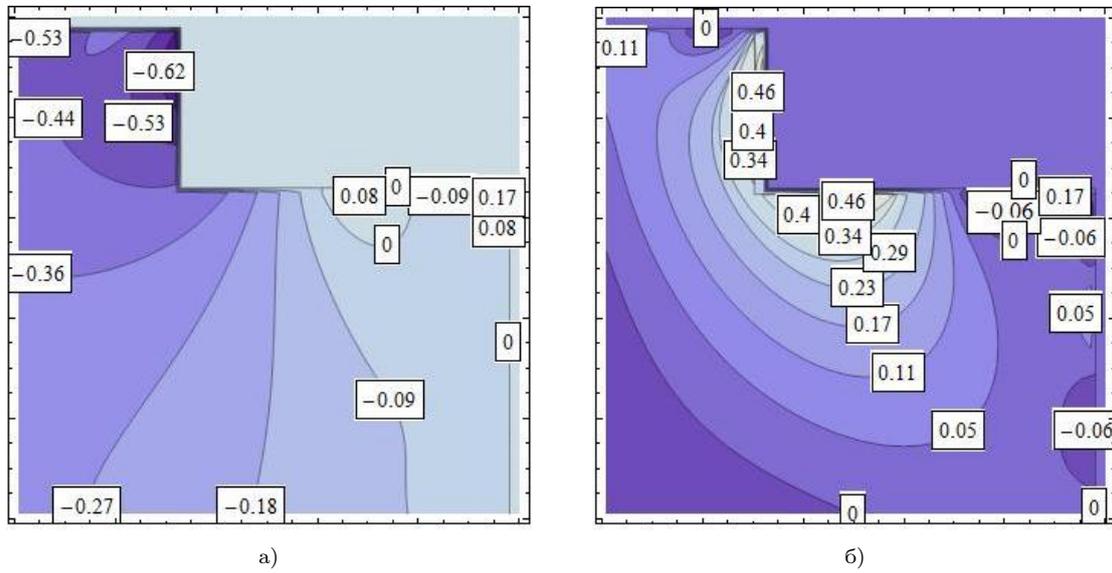


Рис. 6. Компоненты тензора напряжений: а)  $\tau_{xy}$ , б)  $\sigma_x$

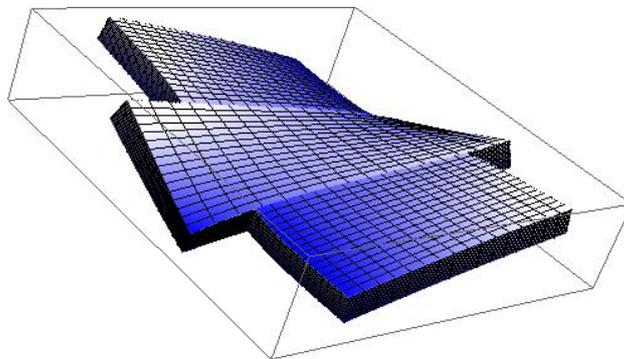


Рис. 7. Контур пластинки в деформированном состоянии

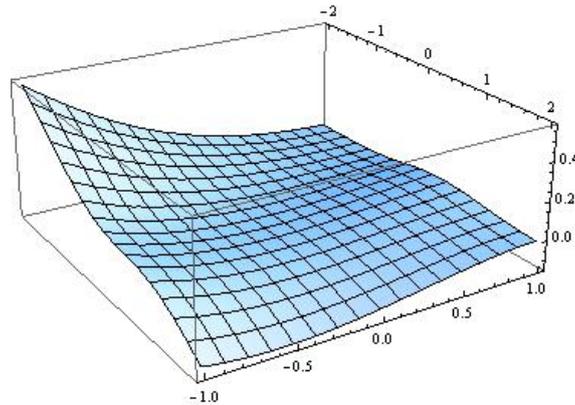


Рис. 8. Контур деформированной срединной поверхности

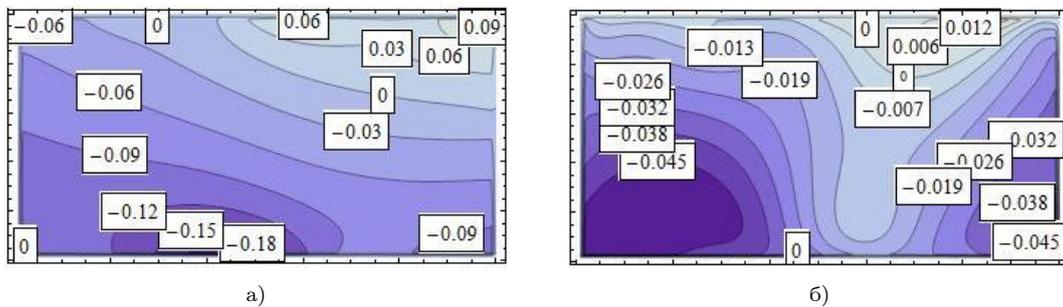


Рис. 9. Компоненты тензора напряжений: а)  $\sigma_{yy}$ , б)  $\tau_{xy}$

**Основная смешанная задача.** Рассмотрим пластинку с теми же геометрическими размерами и упругими константами, что и в тестовой задаче (рис. 2).

Один край пластинки  $S_4$  жестко защемлен, на противоположном краю  $S_2$  приложены усилия, приводящие к скручивающим и изгибающим моментам

$$\mathbf{p} \in S_1 \cup S_3, \quad \mathbf{p} = 0; \quad \mathbf{u} \in S_4, \quad \mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{p} \in S_2, \quad \mathbf{p} = \{z, z, 0\}.$$

Матрицу коэффициентов  $a_{kj}$  и коэффициенты  $q_k$  приводить не будем. В решении данной задачи использовался базис внутренних состояний из 55 элементов. Полученное выражение для компоненты перемещения  $w$  имеет вид (сокращено в силу полной необозримости):

$$w \approx 0,017x^2 - 0,031x^3 - 0,0064x^4 + \dots + 0,066xy - 0,0645x^2y + 0,0097x^3y + \dots \\ \dots + 0,086y^3 - 0,0096xy^2 + 0,0163x^2y^2 - 0,022x^3y^2 - 0,006x^4y^2 + \dots$$

На рис. 8 изображен контур деформированной срединной поверхности пластинки.

На рис. 9 представлены изолинии компонент тензора напряжений на поверхности  $z = 0,1$ : а — компоненты  $\sigma_{yy}$ , б — компоненты  $\tau_{xy}$ .

Анализ вышеизложенного позволяет сделать вывод о том, что метод граничных состояний оказался эффективным средством выписывания явного приближенного аналитического решения в задачах механики для анизотропных тонких плит.

## Литература [References]

1. Недорезов П.Ф. Численное исследование напряженно-деформированного состояния в задачах изгиба тонкой анизотропной прямоугольной пластинки. *Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика.*

- Механика. Информатика*, 2009, т. 9, вып. 4, ч. 2, с. 142–148. [Nedorezov P.F. Numerical study of the stress-strain state in the problems of bending of a thin anisotropic rectangular plate. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of the Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 2, pp. 142–148. (in Russian)]
2. Ромакина О.М., Шевцова Ю.В. Метод сплайн-коллокации и его модификация в задачах статического изгиба тонкой ортотропной прямоугольной пластинки. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2010, т. 10, вып. 1, с. 78–82. [Romakina O.M., Shevtsova Yu.V. Spline-collocation method and its modification in problems of static bending of a thin orthotropic rectangular plate. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of the Saratov University. New series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2010, vol. 10, iss. 1, pp. 78–82. (in Russian)]
  3. Максименко В.Н., Подружин Е.Г. Фундаментальные решения в задачах изгиба анизотропных пластин. *Прикладная механика и техническая физика*, 2003, т. 44, № 4, с. 135–143. [Maksimenko V.N., Podruzhin E.G. Fundamental solutions in problems of bending of anisotropic plates. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 4, pp. 135–143. (in Russian)]
  4. Рябчиков П.Е. Напряженно-деформированное состояние анизотропных пластин сложной формы при изгибе: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2007. [Ryabchikov P.E. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie anizotropnykh plastin slozhnoy formy pri izgibe = Stress-strain state of complex-shaped anisotropic plates under bending*. Diss. ... Cand. Phys.-Math. Sciences. Novosibirsk, 2007. (in Russian)]
  5. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями. Издательское объединение «Вища школа», Киев–Донецк, 1976. [Kosmodamiansky A.S. *Napryazhennoe sostoyanie anizotropnykh sred s otverstiyami i polostyami = Stress state of anisotropic media with holes and cavities*. Publishing association “Vishcha school”, Kyiv, Donetsk, 1976. (in Russian)]
  6. Подружин Е.Г. Приложение метода сингулярных интегральных уравнений к задачам изгиба анизотропных пластин с многосвязным контуром. Дисс. д-ра техн. наук. Новосибирск, 2007. [Podruzhin E.G. *Prilozhenie metoda singulyarnykh integral'nykh uravneniy k zadacham izgiba anizotropnykh plastin s mnogosvyaznym konturom = Application of the method of singular integral equations to problems of bending of anisotropic plates with a multiply connected contour*. Diss. Dr. Tech. Sciences. Novosibirsk, 2007. (in Russian)]
  7. Максименко В.Н., Подружин Е.Г. Изгиб конечных анизотропных пластин, содержащих гладкие отверстия и сквозные криволинейные разрезы. *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2006, т. 9, № 4, с. 125–135. [Maksimenko V.N., Podruzhin E.G. Bending of end anisotropic plates containing smooth holes and through curvilinear cuts. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki = Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 2006, vol. 9, no. 4, pp. 125–135. (in Russian)]
  8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Наука, Москва, 1967. [Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin = Theory of anisotropic plates*. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)]
  9. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, Москва, 1957. [Lekhnitsky S.G. *Anizotropnye plastinki = Anisotropic plates*. GITTL, Moscow, 1957. (in Russian)]
  10. Лехницкий С.Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. *Прикладная математика и механика*, 1938, т. II, вып. 2, с. 181–210. [Lekhnitsky S.G. On some questions related to the theory of bending of thin slabs. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1938, vol. II, iss. 2, pp. 181–210. (in Russian)]
  11. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137. [Penkov V.B., Penkov V.V. Boundary State Method for Solving Problems of Linear Mechanics. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal = Far Eastern Russian Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (in Russian)]
  12. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Применение метода граничных состояний для решения основной смешанной задачи линейного континуума. *Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика*, 2000, т. 6, вып. 2, с. 124–127. [Penkov V.B., Penkov V.V. Application of the boundary state method for solving the basic mixed linear continuum problem. *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika = News of the Tula State University. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2000, vol. 6, iss. 2, pp. 124–127.]
  13. Саталкина Л.В. Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. *Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспи-*

рантов Липецкого государственного технического университета. ЛГТУ, Липецк, 2007, с. 130–131. [Sataikina L.V. Increasing the basis of the state space under severe restrictions on the energy consumption of calculations. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Collection of abstracts of the scientific conference of students and post-graduate students of the Lipetsk State Technical University*. LGTU, Lipetsk, 2007, pp. 130–131. (in Russian)]

14. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Наука, Москва, 1977. [Lekhnitsky S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela = Theory of elasticity of an anisotropic body*. Nauka, Moscow, 1977. (in Russian)]