УДК 51.7 DOI 10.31429/vestnik-19-3-17-24

Аналитические решения для нестационарной модели ветровых течений

В.С. Кочергин[1✉], **С.В. Кочергин**[1], **С.Н. Скляр**[2]

[1] Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия
[2] Американский Университет в Центральной Азии (AUCA), ул. Аалы Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизстан

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается упрощенная трехмерная математическая модель ветровых течений в водоеме, полученная в результате анализа модели, основанной на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики, записанных в традиционных приближениях. Найдено аналитическое решение для интегральных составляющих горизонтальных компонент скорости нестационарной модели ветровых течений. В данной работе компоненты касательного напряжения трения ветра задаются по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации, а аналитическое решение получено для нестационарной задачи.

Ключевые слова: безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение, функция тока, интегральная скорость.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Аналитические решения для нестационарной модели ветровых течений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 17–24. DOI 10.31429/vestnik-19-3-17-24

Поступила 31 мая 2022 г. После доработки 13 августа 2022 г. Принято 15 августа 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

Analytical Solutions for a Non-Stationary Model of Wind Currents

V.S. Kochergin[1✉], **S.V. Kochergin**[1], **S.N. Sklyar**[2]

[1] Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia
[2] American University of Central Asia, Aaly Tokombaev str., 7/6, Bishkek, 720060, Kirgizstan

✉ Vladimir S. Kochergin; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. The paper considers a simplified three-dimensional mathematical model of wind currents in a reservoir obtained by analyzing a model based on a system of complete nonlinear equations of hydrothermodynamics written in traditional approximations. An analytical solution has been found for the integral components of the horizontal velocity components of a non-stationary wind flow model. In this paper, the components of the tangential wind friction stress are set according to a special law that allows describing complex wind situations, and an analytical solution is obtained for a non-stationary problem.

Keywords: dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution, current function, integral velocity.

Funding. The work was carried out for the state assignment on the topic 0555-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal studies”).

The author(s) declare no competing interests.The author(s) contributed equally.

Cite as: Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical solutions for a non-stationary model of wind currents. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 17–24. DOI 10.31429/vestnik-19-3-17-24

Received 31 May 2022. Revised 13 August 2022. Accepted 15 August 2022. Published 12 October 2022.

В данной работе рассматривается упрощенная трехмерная математическая модель ветровых течений в водоеме, полученная в результате анализа модели, основанной на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики, записанных в традиционных приближениях [1]. Анализ проведен на основе процедуры обезразмеривания модели с последующем исключении из системы уравнений членов, описывающих адвекцию и горизонтальную диффузию. Дополнительные ограничения состоят в рассмотрении задачи в прямоугольной области и задании компонент касательного напряжения трения ветра по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации. В рамках вышеуказанных ограничений найдено аналитическое решение для интегральных составляющих горизонтальных компонент скорости модели ветровых течений [2–4]. Отметим, что принятые ограничения являются достаточно мягкими и позволяют сохранить в модели наиболее важные свойства моделируемых объектов. Это дает возможность при выборе основных параметров в модели, отражающих специфику водоема, получить некоторые свойства течений в этом водоеме «в первом приближении». Подобные задачи ранее реализованы в [5,6] при помощи метода обращения динамического оператора при тестировании используемых разностных схем специального вида для вычисления полей скорости, а в работах [7–10] исследуется модель с переменными скоростями в трехмерном пространстве, что позволяет анализировать точность вычисления не только ее горизонтальных компонент, но и вертикальной составляющей. В данной работе компоненты касательного напряжения трения ветра задаются по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации, а аналитическое решение получено для нестационарной задачи.

1. Задача в безразмерном виде

Будем считать, что поверхность (зеркало) рассматриваемого водоема в плоскости xOy имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]\,,$$

глубина его $H > 0$ — постоянна. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом: Ox — на восток, Oy — на север, Oz — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$$

рассмотрим следующую модель ветровых течений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \ell v = -\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \ell u = -\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$t > 0, \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega},$$

— с краевыми условиями

$$\left\{z = 0,\ (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0\right\}: \quad k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x,\ k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y,\ w = 0; \tag{1.2}$$

$$\left\{z = H,\ (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0\right\}: \quad k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b,\ k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b,\ w = 0; \tag{1.3}$$

$$\{0 \leqslant z \leqslant H,\ (x, y) \in \partial\Omega_0\}: \quad Un_x + Vn_y = 0. \tag{1.4}$$

В (1.4) используются интегральные скорости

$$U(x, y) = \int\limits_0^H u(x, y, z)dz, \quad V(x, y) = \int\limits_0^H v(x, y, z)dz,$$

а в (1.3) принимается следующий вариант параметризации придонного трения:

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{1.5}$$

Пусть в соответствии с [2–4]

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \mathrm{const}. \tag{1.6}$$

Компоненты ветрового воздействия зададим в следующем виде:

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y). \end{cases} \tag{1.7}$$

Здесь приняты обозначения:

$$r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q};$$

$$l, s = 0, 1, 2, \ldots; \quad m, p = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных (F_1, F_2, G_1, G_2) и четыре целых (l, m, s, p) числовых параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Например, при $F_1 = \frac{Fq}{\pi}$, $F_2 = G_1 = G_2 = 0$, $l = 0$, $m = 1$ имеем

$$\tau_x = \frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \tag{1.8}$$

а при

$$F_1 = \frac{Fq}{\pi}, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -\frac{Fq}{\pi}, \quad G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1 \tag{1.9}$$

имеем циклон над акваторией.

2. Аналитическое решение

В работе [11] получено аналитическое решение для уравнения функции тока в стационарном случае. Основные формулы для стационарной модели имеют вид

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y),$$

где

$$\Psi_1(x, y) = \left[C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)\right] \sin\left(q_m y\right),$$

$$D_1 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2) F_1 + \beta r_l F_2}{\mu^2 (r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m, \quad D_2 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2) F_2 - \beta r_l F_1}{\mu^2 (r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m,$$

$$C_1 = D_1 \frac{e^{Br} - (-1)^l}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_2 = D_1 \frac{(-1)^l - e^{Ar}}{e^{Ar} - e^{Br}},$$

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}, \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}.$$

Аналогично для второй составляющей решения имеем

$$\Psi_2(x, y) = \left[\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)\right] \sin(q_p y),$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\beta r_s G_1 - \mu(r_s^2 + q_p^2) G_2}{\mu^2 (r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s, \quad \bar{D}_2 = \frac{\mu(r_s^2 + q_p^2) G_1 + \beta r_s G_2}{\mu^2 (r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s,$$

$$\bar{C}_1 = \bar{D}_1 \frac{e^{\bar{B}r} - (-1)^s}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}, \quad \bar{C}_2 = \bar{D}_1 \frac{(-1)^s - e^{\bar{A}r}}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}$$

$$\bar{A} = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}, \quad \bar{B} = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}.$$

Интегральные составляющие вектора горизонтальной скорости можно определить дифференцированием, по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

В итоге получим

$$U(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\Psi_1(x,y) + \Psi_2(x,y)\right] = q_m\left[C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1\cos(r_l x) + D_2\sin(r_l x)\right]\cos(q_m y) + \\ + q_p\left[\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1\cos(r_s x) + \bar{D}_2\sin(r_s x)\right]\cos(q_p y); \quad (2.1)$$

$$V(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi_1(x,y) + \Psi_2(x,y)\right] = \\ = -\left[AC_1 e^{Ax} + BC_2 e^{Bx} - r_l D_1\sin(r_l x) + r_l D_2\cos(r_l x)\right]\sin(q_m y) - \\ - \left[\bar{A}\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{B}\bar{C}_2 e^{\bar{B}x} - r_s\bar{D}_1\sin(r_s x) + r_s\bar{D}_2\cos(r_s x)\right]\sin(q_p y). \quad (2.2)$$

3. Эволюционная модель

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) в полном объеме, не предполагая ее стационарности. Задача для интегральных скоростей, как и ранее, получается, если уравнения системы (1.1) проинтегрировать по z от 0 до H, учитывая краевые условия (1.2), (1.3), (1.6), а затем перекрестным дифференцированием исключить давление P^s

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial(\ell V)}{\partial y} - \frac{\partial(\ell U)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x,y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ Un_x + Vn_y = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

В (3.1) и далее отсутствуют начальные условия, поскольку наша цель — найти широкий класс решений задачи, а начальные условия будут определятся выбором нужного решения. Как и ранее, введем функцию тока $\Phi(x,y,t)$ по формулам (обозначения изменены, чтобы учесть стационарный случай)

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Подставив эти величины в первое уравнение из (3.1), получим

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) + \beta\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x,y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \Phi = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решения задачи (3.3) будем искать в виде

$$\Phi(x,y,t) = \Psi(x,y) + \Phi_0(x,y,t),$$

где $\Psi(x,y)$ — решение стационарной неоднородной задачи

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) + \beta\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x,y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \Psi = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0; \end{cases} \quad (3.4)$$

а $\Phi_0(x,y,t)$ — решение нестационарной однородной задачи

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mu\right)\left(\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}\right)+\beta\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x}=0, \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0, \quad t>0; \\ \Phi_0=0, \quad (x,y)\in\partial\Omega_0, \quad t>0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение стационарной задачи представлено в предыдущем разделе. Решение задачи (3.5) будем искать в виде

$$\Phi_0(x,y,t)=\varphi(x,y)\theta(t). \tag{3.6}$$

Подставим (3.6) в уравнение (3.5) и разделим переменные

$$\begin{cases} \theta'\left(t\right)=\left(\beta\rho-\mu\right)\theta\left(t\right), \quad t>0; \\ \theta(0)=\theta_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0; \\ \varphi(x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial\Omega_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

В (3.7) и (3.8) ρ — параметр метода разделения переменных, вообще говоря, комплекснозначный. Наша цель — найти нетривиальные решения задач (3.7) и (3.8), а также соответствующие значения параметра ρ, при которых эти решения существуют. Из (3.7) получаем

$$\theta(t)=\theta_0 e^{(\beta\rho-\mu)t}, \quad t>0. \tag{3.9}$$

Решение задачи (3.8) будем искать в виде

$$\varphi(x,y)=X\left(x\right)Y\left(y\right). \tag{3.10}$$

Подставим (3.10) в уравнение (3.8) и разделим переменные

$$\begin{cases} Y''\left(y\right)+\sigma Y\left(y\right)=0, \quad 0<y<q; \\ Y\left(0\right)=Y\left(q\right)=0. \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} X''(x)+\dfrac{1}{\rho}X'(x)-\sigma X(x)=0, \quad 0<x<r, \\ X(0)=X(r)=0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Решение спектральной задачи (3.11) имеет вид

$$Y\left(y\right)=\mathrm{C}\sin\left(q_n y\right), \quad \sigma=q_n^2, \quad q_n=\pi n/q, \quad n=1,2,\ldots. \tag{3.13}$$

Рассмотрим спектральную задачу (3.12). Определим функцию $X\left(x\right)$ и соответствующий спектральный параметр ρ. Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2+\frac{1}{\rho}\lambda-\sigma=0, \tag{3.14}$$

тогда $X\left(x\right)$ может быть найдена в виде

$$X(x)=Se^{\lambda_1 x}+Pe^{\lambda_2 x}. \tag{3.15}$$

Удовлетворяя краевым условиям из (3.12), приходим к выводу

$$P=-S, \quad \operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2, \quad \operatorname{Im}\lambda_1-\operatorname{Im}\lambda_2=2r_k, \quad r_k=\pi k/r \quad (k=1,2,\ldots). \tag{3.16}$$

Из (3.14) и теоремы Виета следует

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1/\rho, \\ \lambda_1 \lambda_2 = -q_n^2. \end{cases} \tag{3.17}$$

Второе из соотношений (3.17) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2 - \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 = -q_n^2, \\ \operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 + \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Далее второе из соотношений (3.16) и (3.18) дает

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 = q_n^2 + \operatorname{Re}^2\lambda_1, \\ \operatorname{Re}\lambda_1 \left(\operatorname{Im}\lambda_2 + \operatorname{Im}\lambda_1\right) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Вариант $\operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0$ невозможен, так как приводит к противоречию: $-\operatorname{Im}^2\lambda_1 = q_n^2 + \operatorname{Re}^2\lambda_1$, что следует из (3.19). Таким образом, доказано, что $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0$, и из соотношений (3.16) и (3.19) получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\lambda_1 - \operatorname{Im}\lambda_2 = 2r_k, \\ \operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 = q_n^2. \end{cases}$$

Из последних уравнений и первого соотношения (3.17) получаем две пары параметров

$$\operatorname{Im}\lambda_1 = \alpha_k^n + r_k, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 = \alpha_k^n - r_k, \quad \rho = i/2\alpha_k^n, \quad \alpha_k^n = \sqrt{r_k^2 + q_n^2}; \tag{3.20}$$

$$\operatorname{Im}\lambda_1 = r_m - \alpha_m^n, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 = -r_m - \alpha_m^n, \quad \rho = -i/2\alpha_m^n, \quad \alpha_m^n = \sqrt{r_m^2 + q_n^2}. \tag{3.21}$$

Сопоставляя (3.6), (3.9), (3.10), (3.13) и (3.15), находим решение задачи (3.5)

$$\varphi(x,y)\theta(t) = \sin\left(q_n y\right) S\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right) e^{(\beta\rho - \mu)t}. \tag{3.22}$$

Функция (3.22), вообще говоря, комплекснозначная, нас же интересуют вещественные значения решения задачи (3.5). Очевидно, что такие решения мы сможем найти, рассматривая вещественную или мнимую части функции (3.22)

$$\begin{aligned} \Phi_0(x,y,t) = \operatorname{Re}\left[\varphi(x,y)\theta(t)\right] = \sin\left(q_n y\right) \sin\left(\frac{\operatorname{Im}\lambda_1 - \operatorname{Im}\lambda_2}{2} x\right) e^{-\mu t} \times \\ \times \left[S_1 \sin\left(\frac{\operatorname{Im}\lambda_1 + \operatorname{Im}\lambda_2}{2} x + \beta \operatorname{Im}\rho t\right) + S_2 \cos\left(\frac{\operatorname{Im}\lambda_1 + \operatorname{Im}\lambda_2}{2} x + \beta \operatorname{Im}\rho t\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Последняя формула получена путем несложных преобразований, в ней S_1, S_2 — произвольные вещественные числа. Рассмотрим вариант (3.20), из формулы (3.23) получим

$$\Phi_0(x,y,t) = \sin\left(r_k x\right) \sin\left(q_n y\right) e^{-\mu t} \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right]. \tag{3.24}$$

Рассматривая второй вариант выбора параметров (3.21), получаем

$$\Phi_0(x,y,t) = \sin\left(r_k x\right) \sin\left(q_n y\right) e^{-\mu t} \left[-S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right]. \tag{3.25}$$

Это говорит о том, что при произвольных вещественных параметрах S_1, S_2 множества решений (3.24) и (3.25) совпадают, поэтому ограничимся множеством решений вида (3.24). Если вместо вещественной части функции (3.22) рассматривать ее мнимую часть, то также получим множество решений вида (3.24), это несложно проверить. Теперь можно выписать множество решений задачи (3.3)

$$\Phi(x,y,t) = \Psi(x,y) + \Phi_0(x,y,t) = \Psi(x,y) + \\ + \sin(r_k x)\sin(q_n y)\,e^{-\mu t}\left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right]. \quad (3.26)$$

Выбор конкретного решения из множества (3.26) определяется выбором параметров S_1, S_2, k, n. В соответствии с (3.2) интегральные скорости находим по формулам

$$U(x,y,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + q_n \sin(r_k x)\cos(q_n y)\times \\ \times\left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] e^{-\mu t}, \quad (3.27)$$

$$V(x,y,t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - r_k \cos(r_k x)\sin(q_n y)\times \\ \times\left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] e^{-\mu t} - \\ - \alpha_k^n \sin(r_k x)\sin(q_n y)\left[S_1 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) - S_2 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right)\right] e^{-\mu t}. \quad (3.28)$$

Напомним, что первые слагаемые в формулах (3.27) и (3.28) являются стационарными интегральными скоростями, их значения вычисляются по формулам, найденным в предыдущем разделе.

Заключение

Для нестационарной задачи ветровой циркуляции Экмановского типа получено аналитическое решение при переменном по пространству ветровом воздействии. Полученные решения могут быть использованы в качестве эталонных для тестирования различных разностных схем. Результаты могут быть использованы при построении численных моделей динамики океана и различных водоемов.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана.* Наука, Москва, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie cirkulyacii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation.* Nauka, Moskva, 1988. (in Russian)]
2. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
3. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description.* University of California Press, 1965.
4. Стоммел, Г., *Гольфстрим.* Москва, ИЛ, 1965. [Stommel, G., *Gulfstream = Gulfstream.* Moscow, Inostrannaya Literatura, 1965. (in Russian)]
5. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.* Севастополь, Экоси-Гидрофизика, 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins.* Sevastopol, Ekosi-Gidrofizika, 2002. (in Russian)]
6. Kochergin, V.P., Dunets, T.V., Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.

7. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical Test Problem of Wind Currents. In: Chaplina T.O (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume I.* Springer Geology. Springer, Cham., 2020, pp. 17–25. DOI 10.1007/978-3-030-38177-6_3
8. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows. In: Chaplina T.O. (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume II.* Springer Geology. Springer, 2021, pp. 65–71. DOI 10.1007/978-3-030-53521-6_9
9. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах.* 2019. № 2. С. 193–198. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Processes in geoenvironments*, 2019, no. 2, pp. 193–198. (in Russian)]
10. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическое решение тестовой задачи ветровых течений при постоянном ветре. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2021. Т. 18, № 1. С. 32–35. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the test problem of wind currents at constant wind. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 1, pp. 32–35. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-18-1-32-35
11. Кочергин, В.С., Кочергин, В.С., Скляр, С.Н., Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 16–25. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the equation for the stream function in the model of flows with spatially variable wind action. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 19, no. 1, pp. 16–25. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-19-1-16-24