



УДК 539.3:532.5

DOI 10.31429/vestnik-19-2-29-38

Влияние сжимающих усилий на амплитуды изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями

Ж. В. Маленко ^{1,2}, А. А. Ярошенко ^{1,2} ✉¹ Севастопольский государственный университет, ул. Университетская, 33, Севастополь, 299053, Россия² Филиал «Государственный морской университет им. адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Севастополь, ул. Героев Севастополя, 11, корпус 8/22, Севастополь, 299009, Россия

✉ Ярошенко Александр Александрович; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Работа посвящена исследованию волновых процессов, происходящих в плавающей ледяной пластине при движении по ней нагрузки. Исследовано влияние скорости перемещения нагрузки и сжимающих усилий на амплитуды образующихся изгибно-гравитационных волн. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности идеальной жидкости конечной глубины. Задача сводится к решению уравнения Лапласа с граничными условиями. Граничное условие на поверхности — уравнение колебаний ледяной пластины с учетом гидродинамических давлений на нижнюю поверхность льда. Поверхностные волны в сплошном ледяном покрове представляют собой комбинацию изгибной волны в ледяной пластине и гравитационной волны в воде.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, ледяной покров, движущиеся возмущения, критическая скорость, сжимающее усилие.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Исследование не имело спонсорской поддержки.

ПОСТУПИЛА 2 июня 2022 г. **ПОСЛЕ ДОРАБОТКИ** 13 июня 2022 г. **ПРИНЯТО** 17 июня 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 июня 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Маленко Ж. В., Ярошенко А. А. Влияние сжимающих усилий на амплитуды изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 2. С. 29–38. DOI 10.31429/vestnik-19-2-29-38

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. © Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

The Effect of Compressive Forces on the Amplitudes of Bending-Gravitational Waves Generated by Moving Perturbations

Zhanna V. Malenko^{1,2}, Aleksandr A. Yaroshenko^{1,2} ✉¹ Sevastopol State University, Univesitetskaya st., 33, Sevastopol, 299053, Russia² Branch of “Admiral F.F. Ushakov State Maritime University” in Sevastopol, Heroes of Sevastopol st., 11, housing 8/22, Sevastopol, 299009, Russia

✉ Aleksandr A. Yaroshenko; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

The work is devoted to the study of wave processes occurring in a floating ice plate when a load moves along it. The influence of the load displacement velocity and compressive forces on the amplitudes of the generated bending-gravitational waves is investigated. The ice cover is modeled by a thin elastic plate floating on the surface of an ideal liquid of finite depth. The problem is reduced to solving the Laplace equation with boundary conditions. The boundary condition on the surface is the equation of vibrations of the ice plate taking into account the hydrodynamic pressures on the lower surface of the ice. Surface waves in a solid ice sheet are a combination of a bending wave in an ice plate and a gravitational wave in water. When the load moves through the ice cover, from one to three wave systems are formed. Elastic waves are caused by the presence of ice cover. It is shown that as the compressive force increases, the amplitude of elastic waves increases. The other two waves have the character of transverse and longitudinal ship waves propagating behind the source. The increase in compressive forces and the thickness of the ice cover does not significantly affect the amplitudes of these waves.

KEYWORDS bending-gravitational waves, elastic plate, ice cover, moving perturbations, critical speed, compressive force.

FUNDING The study did not have sponsorship.

RECEIVED 2 June 2022. **REVISED** 13 June 2022. **ACCEPTED** 17 June 2022. **PUBLISHED** 30 June 2022.

CITE AS Malenko Zh. V., Yaroshenko A. A. The effect of compressive forces on the amplitudes of bending-gravitational waves generated by moving perturbations // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 29–38. DOI 10.31429/vestnik-19-2-29-38

The authors declare that there is no conflict of interest. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

В настоящее время происходит активное освоение районов Крайнего Севера и Дальнего Востока. С приходом холодов, когда замерзают реки и озера, ледяной покров используется для доставки по нему грузов. Большое число ледовых дорог и переправ в России находится в Сибири, Красноярском крае, Архангельской области, на Дальнем Востоке. Ледяные переправы через реки и водохранилища используются давно [1]. Грузоподъемность ледовых переправ и ледовых дорог определяют в зависимости от толщины ледяного покрова и его физико-механических свойств.

Одной из самых известных ледовых переправ в годы Великой Отечественной войны являлась «Дорога Жизни». Группа ученых под руководством Кобеко П.П. занималась изучением механических свойств ледового покрова Ладожского озера [2]. Ими были разработаны правила безопасного движения автомобилей по ледовой трассе. Для автомобилей была рекомендована определенная скорость, чтобы избежать разрушений ледяного покрова.

С другой стороны, для продления навигации возникает необходимость разрушения ледяного покрова рек и водоемов. Для разрушения плавающего ледяного покрова используются суда на воздушной подушке (СВП) [3, 4]. СВП, двигаясь с определенной скоростью, создают условия для разрушения льда. На данный момент имеется достаточный опыт применения СВП для разрушения ледяного покрова [5, 6].

В практических расчетах ледяного покрова широкое распространение получили расчетные методы, основанные на положениях теории упругости и гидромеханики. Ледяной покров моделируется упругой или вязкоупругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости.

Одной из фундаментальных работ, посвященных исследованию колебаний плавающего ледяного покрова при действии на него различного рода нагрузок, является монография Хейсина Д.Е. [7]. В работе исследуются плоские задачи о колебаниях пластин, вызванных движущимися нагрузками, при наличии и отсутствии сил сжатия. Трехмерные изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений без учета сжимающих усилий исследовались Доценко С.Ф. [8], Козиным В.М. [9–11]. Колебания ледяного покрова с учетом сжимающих усилий исследовались в работах Букатова А.Е. [12, 13]. В работе [14] проводится исследование амплитудных характеристик изгибно-гравитационных волн без учета сил сжатия.

Среди работ зарубежных авторов, посвященных исследованию трехмерных изгибно-гравитационных волн от движущихся возмущений, следует отметить работу Squire V.A. et al. [15]. В книге изложена история исследований, обобщены работы, в основном зарубежных авторов, вплоть до 1995 г.

Настоящая работа посвящена исследованию равномерного сжатия на амплитуды волн в зависимости от скорости перемещения нагрузки.

1. Постановка задачи

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает тонкая упругая пластинка. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость не ограничены. Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки малыми, рассмотрим влияние равномерного сжатия на трёхмерные изгибно-гравитационные волны, возникающие под действием движущихся по поверхности пластинки возмущений вида

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (1.1)$$

Волновое движение определяется потенциалом скорости ϕ , удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta \phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (1.2)$$

граничному условию на поверхности ($z = 0$).

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -p_1 f(x, y), \quad (1.3)$$

граничному условию на дне ($z = -H$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{1.4}$$

и кинематическому условию ($z = 0$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = v \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{1.5}$$

где $D_1 = D/\rho g$, $Q_1 = Q/\rho g$, $\chi_1 = \rho_1 h/\rho g$, $D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$, $p_1 = p_0/\rho g$, $\nabla^4 = \Delta_l^2$, $\Delta_l = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, ρ – плотность жидкости, E , h , ρ_1 , μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q – сжимающее усилие, ζ – возвышение поверхности пластина – жидкость.

2. Решение задачи

Применяя для решения задачи (1.1)–(1.5) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x , y , получим следующее интегральное представление для прогиба пластинки:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right), \tag{2.1}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= ((1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4) M(r))^{1/2}, \quad M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \\ r &= (m^2 + n^2)^{1/2}, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \\ x &= R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad k_0 = rv \cos \theta - \tau, \end{aligned}$$

$f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Вычисление интегралов (2.1), (2.2) проведём для трёх диапазонов скорости, перемещающей области давления,

$$0 < v < v_0, \quad v_0 < v < \sqrt{gH}, \quad v > \sqrt{gH}.$$

Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, $\tau_0 = (rv)^{-1}\tau$, v_0 – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны, \sqrt{gH} – скорость распространения длинных волн.

Подынтегральное выражение в (2.2) при $0 < v < v_0$ не имеет особенностей на пути интегрирования. При условиях $v_0 < v < \sqrt{gH}$, $r_1 \leq r \leq r_2$ или $v > \sqrt{gH}$, $0 < r < r_2$ имеет полюсы $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $r_{1,2}$ – положительные корни уравнения $\tau_0(r) = 1$.

Удовлетворяя условию излучения, заменим путь интегрирования в (2.2) на контур L , идущий по действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ с обходом точек $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ в комплексной плоскости θ по малым полуокружностям снизу и сверху соответственно.

Если $0 < v < v_0$, то применяя к (2.2) метод стационарной фазы и интегрируя после этого (2.1) по частям, получим, что ζ при больших R имеет порядок не ниже $O(R^{-1})$.

Пусть $v_0 < v < \sqrt{gH}$. Представим в этом случае интеграл (2.1) в виде суммы трёх интегралов по отрезкам $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$, $[r_2, \infty]$. Так как подынтегральное выражение в (2.1) на первом и третьем отрезках не имеет особенностей, то последовательное применение метода стационарной фазы и интегрирование по частям показывают, что двойные интегралы, соответствующие первому и третьему отрезкам, имеют порядок $O(R^{-1})$. Следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_{r_1}^{r_2} r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right) + O(R^{-1}), \tag{2.3}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_L k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta. \quad (2.4)$$

Вычисляя (2.4) с учётом знаков выражения $\operatorname{Re}(i \cos(\theta - \gamma))$ на малых полуокружностях, обходящих точки $\theta = \theta_{1,2}$, и, подставляя в (2.3) полученные выражения для I , найдём

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^9 \eta_j + O(R^{-1}), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \int_{r_1}^{r_2} N_1(r, \gamma) dr, & 0 \leq \gamma \leq \bar{\gamma}; & & \eta_2 &= \int_{r_1}^{n_1} N_1(r, \gamma) dr, & \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi; \\ \eta_3 &= \int_{n_2}^{r_2} N_1(r, \gamma) dr, & \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi; & & \eta_4 &= \int_{n_1}^{n_2} N_1(r, \gamma) dr, & \bar{\gamma} - \pi \leq \gamma \leq 0; \\ \eta_5 &= \int_{n_3}^{n_4} N_2(r, \gamma) dr, & 0 \leq \gamma \leq \pi - \bar{\gamma}; & & \eta_6 &= \int_{r_1}^{r_2} N_2(r, \gamma) dr, & -\bar{\gamma} \leq \gamma \leq 0; \\ \eta_7 &= \int_{r_1}^{n_3} N_2(r, \gamma) dr, & -\pi \leq \gamma < \bar{\gamma} - \pi; & & \eta_8 &= \int_{n_4}^{r_2} N_2(r, \gamma) dr, & -\pi \leq \gamma \leq \bar{\gamma} - \pi; \end{aligned}$$

$$\eta_9 = R^{-1/2} \int_{r_1}^{r_2} B_3(r, \gamma) \cos(rR - \pi/4) dr,$$

$$N_{1,2} = B_{1,2} \exp(iR\Phi_{1,2}), \quad B_{1,2} = if^*(r)M(r)(\tau v \sqrt{1 - \tau_0^2})^{-1},$$

$$B_3 = qr f^*(r)M(r)\tau^{-1},$$

$$\Phi_{1,2} = r(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma), \quad q = 2(\sqrt{2\pi r}(v^2 r^2 \cos^2 \gamma - \tau^2))^{-1},$$

$$\bar{\gamma} = \pi - \operatorname{arctg}(\max \tau_1(r)), \quad \tau_1 = \tau_0^{-1} \sqrt{1 - \tau_0^2},$$

$n_{1,2}$ — вещественные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\tau_1(r)$, а $n_{3,4}$ — вещественные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \tau_1(r)$.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилия удовлетворяют условию $0 < Q_1 < Q_0$, где $Q_0 = q_1(r_4)$, r_4 — положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1},$$

$$q_2 = \operatorname{th} rH + rH(\operatorname{ch} rH)^{-2}, \quad q_3 = (1 + \chi_1 r g \operatorname{th} rH) \operatorname{th} rH.$$

В этом случае фазовые функции Φ_1 и Φ_2 в интегралах $\eta_2, \eta_4, \eta_5, \eta_7$ не имеют стационарных точек, а $\eta_9 = O(R^{-1})$. Следовательно, $\eta_2 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_7 = O(R^{-1})$. Стационарные точки фазовой функции Φ_1 в интегралах η_1, η_3 являются корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2 = (r\tau_0)' \sqrt{1 - \tau_0^2} (1 - \tau_0(r\tau_0)')^{-1}, \quad (2.6)$$

а функции Φ_2 в интегралах η_6, η_8 — корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = -\tau_2(r). \quad (2.7)$$

При $v_0 < v < v_1$ уравнение (2.6) имеет в рассматриваемых диапазонах изменения $r \in [r_1, r_2]$ один корень $r = \alpha_3$, а $\tau'_2(r) > 0$. Один корень имеет уравнение (2.6) и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, если $0 < \gamma < \gamma_2$ или $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Обозначим его через α_1 в первом случае и через α_3 — во втором. Если же $v_1 < v < \sqrt{gH}$, а $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$, то имеется три корня $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. При этом $\tau'_2(r) = 0$ в двух точках $r = \alpha_4$ и $r = \alpha_5$. Если $v > \sqrt{gH}$, то $r_1 = 0$, а уравнение $\tau'_2(r) = 0$ имеет только один действительный корень α_5 . Уравнение (2.6) при этом не имеет действительных корней, если $0 < \gamma < \gamma_2$. При $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ имеется два корня α_2, α_3 , а при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ только один α_3 .

Здесь

$$v_1 = \tau_3(r_3), \tau_3 = ((\tau/r)^2 - (\tau'(r\tau' - \tau)^2/r^3\tau'')^{1/2}, \quad (2.8)$$

r_3 — действительный корень уравнения $\tau'_3(r_3) = 0$, $r_3 < r_0$,

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \arctg((v^2/gH) - 1)^{-1/2}, \quad (2.9)$$

$\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$, при $\gamma = \gamma_1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$, при $\gamma = \gamma_2$. Корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уравнения (2.6) удовлетворяют и уравнению (2.7) в соответствующих диапазонах изменения v и угловых зонах в нижней полуплоскости ($-\pi \leq \gamma \leq 0$).

3. Анализ полученного решения

На основании анализа стационарных точек фазовых функций интегралов $\eta_1, \eta_3, \eta_6, \eta_8$ получим из (2.5)

если $0 < v < v_0$, то

$$\zeta = O(R^{-1}); \quad (3.1)$$

если $v_0 < v < v_1$, то

$$\zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}), \quad 0 \leq |\gamma| \leq \pi; \quad (3.2)$$

если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2; \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1; \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_1 \leq |\gamma| \leq \pi, \end{cases} \quad (3.3)$$

если $v > \sqrt{gH}$, то

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2; \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3; \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi, \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$\zeta_k = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4), \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

$$\psi_j = -f_1(r)M(r)(v\tau\sqrt{1 - \tau_0^2})^{-1}(2\pi|\Phi_j''|)^{-1/2}, \quad f_1(r) = f^*(r)p_1,$$

$$f^*(r) = (b/r)J_1(rb),$$

J_1 — функция Бесселя, b — радиус области давлений.

При $0 < v < v_0$ (3.1) волн с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$ не образуется.

При движении нагрузки со скоростью $v_0 < v < v_1$ (2.8) образуется одна система волн ζ_3 , затухающих с расстоянием как $R^{-1/2}$ (3.2). На рис. 1–2 представлены амплитуды этих волн при отсутствии сжимающих усилий $Q = 0$ (рис. 1) и для сжимающих усилий $Q = 0,5\sqrt{Drg}$ ($Q_1 = 0,5\sqrt{D_1}$) (рис. 2) для скорости перемещения возмущения равной 10 м/с. Эти волны распространяются как впереди источника возмущений, так и за ним. Волны, бегущие впереди источника, обусловлены упругими силами пластинки и при отсутствии пластинки не образуются. Волны, бегущие за источником, носят характер гравитационных волн, деформированных за счет упругих и массовых сил пластинки.

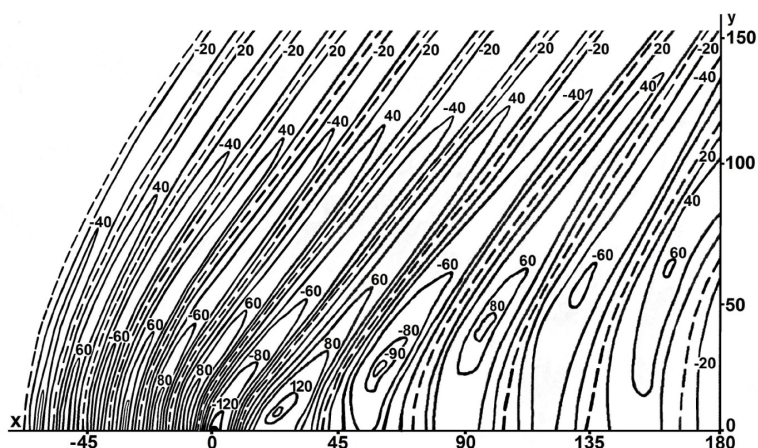


Рис. 1. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $Q = 0$, $v = 10\text{ м/с}$, ($v_0 < v < v_1$), $h = 0,2\text{ м}$

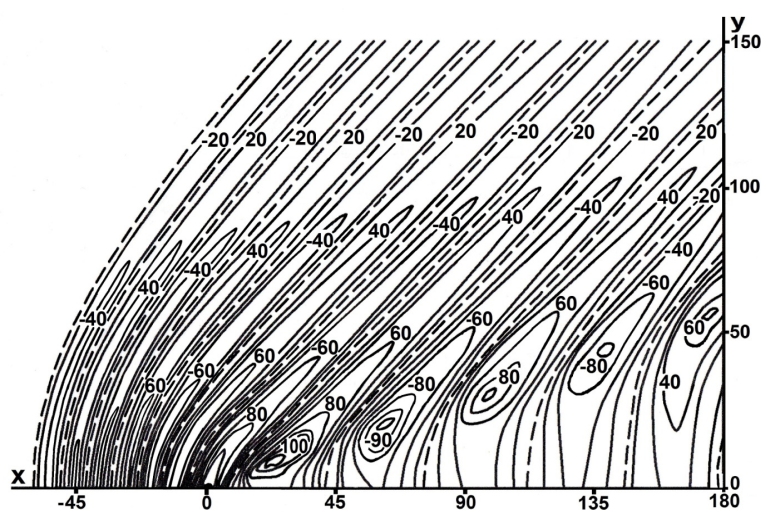


Рис. 2. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$, $v = 10\text{ м/с}$, ($v_0 < v < v_1$), $h = 0,2\text{ м}$

Волны ζ_3 распространяются под углом γ_0 , который находится по формуле

$$\gamma_0 = \text{arctg}((v/v_0)^2 - 1)^{-1/2}.$$

При увеличении скорости перемещения нагрузки и сжимающих усилий значение угла γ_0 уменьшается.

Амплитуда волн, бегущих впереди источника, меньше амплитуды волн, бегущих за источником. При скоростях движения источника, близких к v_0 , максимум амплитуды находится по трассе движения источника как впереди источника, так и за ним [14]. При увеличении скорости движения источника максимум амплитуды волны ζ_3 , бегущей впереди, находится по трассе движения. Максимум амплитуды волны ζ_3 , бегущей за источником, смещается от трассы движения источника (рис. 1–2). Это смещение при $v = v_0$ достигает своего максимума на луче $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ (2.9).

При дальнейшем увеличении скорости перемещения нагрузки $v_1 < v < \sqrt{gH}$ образуется три системы волн: ζ_1 , ζ_2 и ζ_3 (3.3). На рис. 3–5 представлены амплитуды этих волн: ζ_3 — рис. 3; ζ_2 — 4; ζ_1 — рис. 5.

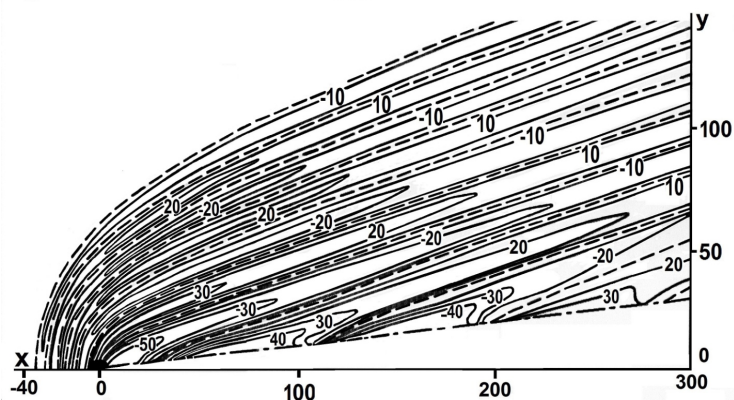


Рис. 3. Амплитуда упругой волны ζ_3 для $Q = \sqrt{D\rho g}$, $v = 20\text{м/с}$, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $h = 0,2\text{ м}$

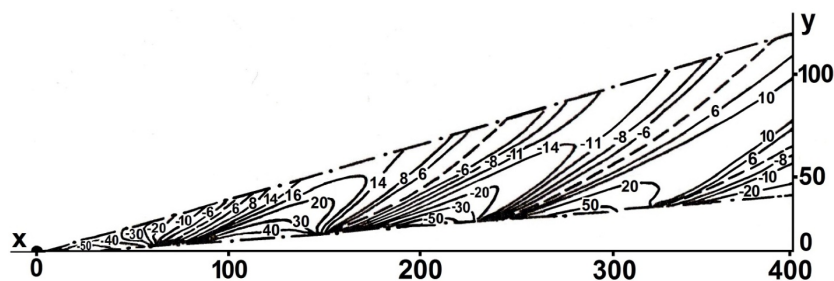


Рис. 4. Амплитуда продольной волны ζ_2 для $Q = \sqrt{D\rho g}$, $v = 20\text{м/с}$, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $h = 0,2\text{ м}$

Упругая волна ζ_3 распространяется впереди источника, а волны ζ_2 и ζ_1 — за источником возмущений. Упругая волна ζ_3 распространяется в угловой зоне $\gamma_2 < \gamma < 2\pi - \gamma_2$. В угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ упругие волны ζ_3 не распространяются. Волны ζ_2 носят характер продольных, а ζ_1 — поперечных корабельных волн, деформированных за счет упругих сил пластинки. При отсутствии пластинки распространяются только продольные и поперечные корабельные волны. Продольные волны ζ_2 распространяются в угловых зонах $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$ и $-\gamma_1 < \gamma < -\gamma_2$. Поперечные волны ζ_1 распространяются за источником в угловой зоне $-\gamma_1 < \gamma < \gamma_1$. Эта зона увеличивается при увеличении скорости перемещения нагрузки и при $v = \sqrt{gH}$, $\gamma_1 = \pi/2$. При увеличении сжимающего усилия значение угла γ_1 уменьшается незначительно.

Поперечные волны ζ_1 имеют наименьшую амплитуду (рис. 5). Наибольшая амплитуда у упругой ζ_3 (рис. 3) и продольной ζ_2 (рис. 4) волн. Сжимающие усилия на амплитуды образующихся волн не оказывают существенного влияния. Больше влияние оказывает скорость

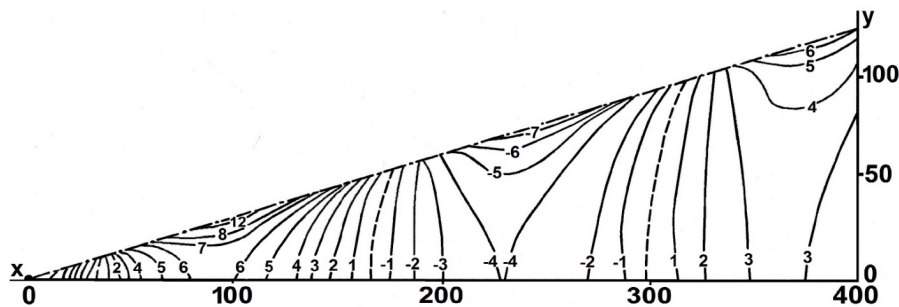


Рис. 5. Амплитуда поперечной волны ζ_1 для $Q = \sqrt{D\rho g}$, $v = 20\text{м/с}$, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $h = 0,2\text{ м}$

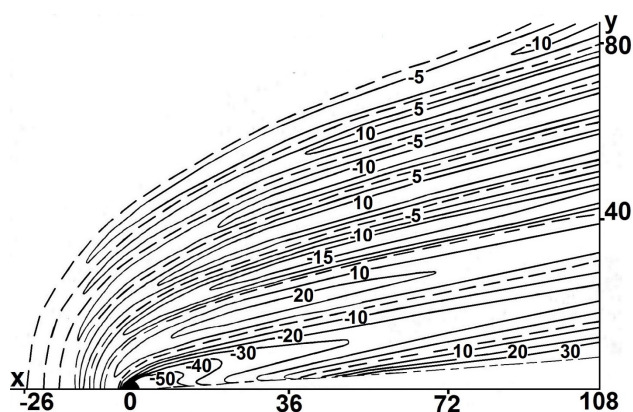


Рис. 6. Амплитуда упругой волны ζ_3 для $Q = \sqrt{D\rho g}$, $v = 35\text{ м/с}$, ($v > \sqrt{gH}$), $h = 0,2\text{ м}$

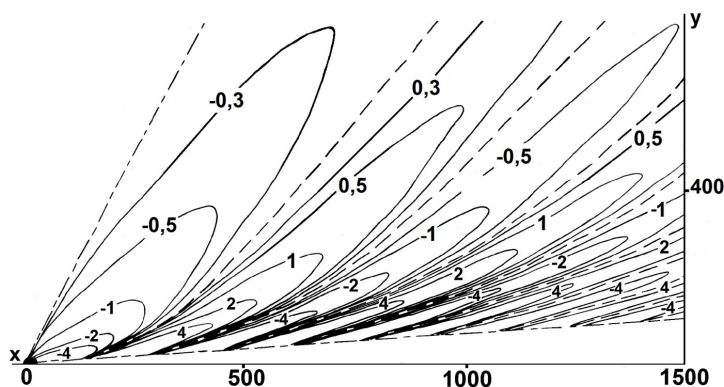


Рис. 7. Амплитуда продольной волны ζ_2 для $Q = \sqrt{D\rho g}$, $v = 35\text{ м/с}$, ($v > \sqrt{gH}$), $h = 0,2\text{ м}$

перемещения нагрузки. При увеличении скорости движения источника возмущений амплитуды волн продолжают уменьшаться. Наибольшее влияние скорость нагрузки оказывает на амплитуду поперечной волны ζ_1 (она уменьшается).

При движения нагрузки со скоростью $v > \sqrt{gH}$ (3.4) поперечные волны ζ_1 не образуются, а распространяются только упругие ζ_3 (рис. 6) и продольные ζ_2 (рис. 7) волны.

Упругие волны ζ_3 образуются впереди источника и распространяются в угловой зоне $\gamma_2 < \gamma < 2\pi - \gamma_2$. Продольные волны ζ_2 распространяются в угловых зонах $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ и $-\gamma_3 < \gamma < -\gamma_2$. В угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ волн с амплитудой затухания $R^{-1/2}$ не образуется. Эта зона уменьшается при увеличении скорости движения нагрузки. Амплитуда упругой волны ζ_3 больше амплитуды продольной волны ζ_2 . При увеличении скорости v амплитуды этих волн уменьшаются.

Для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2$, $\rho = 870\text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 10^3\text{ кг/м}^3$, $\mu = 0,34$, $H = 10^2\text{ м}$, $h = 0,2\text{ м}$.

Выводы

Критические скорости v_0 и v_1 могут быть рекомендованы для разрушения ледяного покрова. При движении с этими скоростями амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 максимальна. При $v = v_0$ амплитуда максимальна по трассе движения источника, а при $v = v_1$ — вдоль лучей $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma = -\gamma_1 = -\gamma_2$. Если разрушение ледяного покрова нежелательно, то следует избегать движений с этими критическими скоростями. Критическая скорость $v =$

$= \sqrt{gH}$ не оказывает существенного влияния на амплитуды изгибно-гравитационных волн. При значениях скоростей, близких к \sqrt{gH} , меняется структура волнового следа. При $v_1 < v < \sqrt{gH}$ образуется три волны, а при $v > \sqrt{gH}$ две.

Увеличение сжимающего усилия приводит к увеличению амплитуды упругой волны ζ_3 . При увеличении толщины ледяного покрова амплитуда упругой волны уменьшается. На амплитуды продольной ζ_2 и поперечной ζ_1 волн увеличение толщины ледяного покрова и сжимающего усилия существенного влияния не оказывает.

Литература [References]

1. Седов Г.Я. *Перевозки по льду предметов большого веса*. Москва, Водный транспорт, 1926. [Sedov G.Ya. *Perevozki po l'du predmetov bol'shogo vesa = Transportation of objects of great weight on ice*. Moscow, Vodnyj transport, 1926. (in Russian)]
2. Иванов И.К., Кобеко П.П., Шульман А.Р. Деформация ледяного покрова при движении грузов. *Журнал технической физики*, 1946, т. 16, вып. 3, с. 257–262. [Ivanov I.K., Kobeko P.P., Shulman A.R. Deformation of the ice cover during the movement of goods. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki = Journal of Technology physics*, 1946, vol. 16, no. 3, pp. 257–262. (in Russian)]
3. Зуев В.А. *Средства продления навигации на внутренних водных путях*. Ленинград, Судостроение, 1986. [Zuev V.A. *Sredstva prodleniya navigacii na vnutrennih vodnyh putyah = Means of prolongation navigation on inland waterways*. Leningrad, Sudostroenie, 1986. (in Russian)]
4. Зуев В.А. Новые технологии разрушения ледяного покрова и продления навигации судами на воздушной подушке. *Труды Центрального научно-исследовательского института им. академика А.Н. Крылова*, 2007, № 34(318), с. 78–96. [Zuev V.A. New technologies for breaking the ice cover and prolonging navigation by hovercraft. *Trudy Central'nogo nauchno-issledovatel'skogo instituta im. akademika A.N. Krylova = Proc. of the Central Research Institute named after academician A.N. Krylov*, 2007, no. 34(318), pp. 78–96. (in Russian)]
5. Козин В.М., Погорелова А.В., Земляк В.Л., Верещагин В.Ю., Рогожникова Е.Г., Кипин Д.Ю., Матюшина А.А. *Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения*. Новосибирск, Сибирское отделение РАН, 2016. [Kozin V.M., Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Vereshchagin V.Yu., Rogozhnikova E.G., Kipin D.Yu., Matyushina A.A. *Eksperimental'no-teoreticheskie issledovaniya zavisimosti parametrov rasprostranyayushchihsvya v plavayushchej plastine izgibno-gravitacionnyh voln ot uslovij ih vozbuzhdeniya = Experimental and theoretical studies of the dependence of the parameters of bending-gravitational waves propagating in a floating plate on the conditions of their excitation*. Novosibirsk, Sibirskoe otdelenie RAN, 2016. (in Russian)]
6. Козин В.М., Земляк В.Л., Баурин Н.О., Ипатов К.И. Способ разрушения ледяного покрова судном на воздушной подушке. *Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема*, 2018, №4(33), с. 85–91. [Kozin V.M., Zemlyak V.L., Baburin N.O., Ipatov K.I. Method of destruction of the ice cover by a hovercraft. *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Alejhema = Bulletin of the Amur State University named after Sholom-Alejhema*, 2018, no. 4(33), pp. 85–91. (in Russian)]
7. Хейсин Д.Е. *Динамика ледяного покрова*. Ленинград, Гидрометеиздат, 1967. [Heisin D.E. *Dinamika ledyanogo pokrova = Dynamics of the ice cover*. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1967. (in Russian)]
8. Доценко С.Ф. Установившиеся гравитационно-упругие трехмерные волны от движущихся возмущений. В кн.: *Цунами и внутренние волны. Севастополь, МГИ АН УССР*, 1976, с. 144–155. [Dotsenko S.F. Steady-state gravitationally elastic three-dimensional waves from moving perturbations. In: *Cunami i vnutrennie volny. Sevastopol', MGI AN USSR = Tsunami and internal waves. Sevastopol, Marine Hydrophysical Institute of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 1976, pp. 144–155. (in Russian)]
9. Козин В.М. *Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты*. Москва, Академия Естествознания, 2007. [Kozin V.M. *Rezonansnyj metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i eksperimenty = Resonant method of ice cover destruction. Inventions and experiments*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2007. (in Russian)]
10. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижимов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. *Прикладные задачи динамики ледяного покрова*. Москва, Академия Естествознания, 2008. [Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V., Chizhiumov S.D., Dzhabrailov M.R., Morozov V.S., Kustov A.N. *Prilozhnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2008. (in Russian)]

- V.S., Kustov A.N. *Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova = Applied problems of ice cover dynamics*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2008. (in Russian)]
11. Козин В.М. Способы определения критических скоростей нагрузок, движущихся в условиях сплошного ледяного покрова (обзор). *Вестник инженерной школы ДВФУ*, 2019, № 2(39), с. 30–38. [Kozin V.M. Methods for determining the critical speeds of loads moving in conditions of continuous ice cover (review). *Vestnik inzhenernoj shkoly DVFU = Bulletin of the FEFU Engineering School*, 2019, no. 2(39), pp. 30–38. (in Russian)] DOI [10.24866/2227-6858/2019-2-4](https://doi.org/10.24866/2227-6858/2019-2-4)
 12. Букатов А.Е. *Волны в море с плавающим ледяным покровом*. Севастополь, ФГБУН МГИ, 2017. [Bukatov A.E. *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom = Waves in the sea with a floating ice cover*. Sevastopol, FGBUN MGI, 2017. (In Russian)]
 13. Букатов А.Е., Черкесов Л.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений. *Прикладная механика и техническая физика*, 1984, № 2, с. 151–157. [Bukatov A.E., Cherkesov L.V., Yaroshenko A.A. Bending-gravitational waves from moving perturbations. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied Mechanics and technical physics*, 1984, no. 2, pp. 151–157. (In Russian)]
 14. Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений. *Морские интеллектуальные технологии*, 2021, т. 4, № 2, с. 157–161. [Malenko Zh.V., Yaroshenko A.A. Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances. *Morskie intellektual'nye tekhnologii = Marine intellectual technologies*, 2021, vol. 4, no. 2, pp. 157–161. (In Russian)] DOI [10.37220/MIT.2021.52.2.086](https://doi.org/10.37220/MIT.2021.52.2.086)
 15. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. *Moving Loads on Ice Plates*. Springer Science & Business Media, 2012.