

УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-2-6-16

Градиентная модель изгиба составной балки

А. О. Ватульян ¹, С. А. Нестеров ²✉

¹ Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону, 344090, Россия

² Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Ватутина, 53, Владикавказ, 362025, Россия

✉ Нестеров Сергей Анатольевич; e-mail: 1079@list.ru

Проведено исследование задачи изгиба составной балки Эйлера–Бернулли с учетом масштабных эффектов. Для учета масштабных эффектов применяется однопараметрическая градиентная модель Аифантиса. Рассмотрены три вида нагружения: 1) равномерно распределенной по длине балки поперечной силой; 2) изгибающим моментом; 3) поперечной силой, действующими на торце балки. Изгибающие моменты представлены в виде суммы решений задачи в классической постановке и дополнительных градиентных слагаемых. Для каждого вида нагрузки получены упрощенные асимптотические выражения для нахождения градиентных слагаемых при малых значениях масштабного параметра. Исследована зависимость скачка моментов на поверхности сопряжения от модулей изгибной жесткости и масштабного параметра.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА градиентная теория упругости, изгибающий момент, составная балка, модель Эйлера–Бернулли, асимптотическое решение, неоднородные материалы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265).

ПОСТУПИЛА 10 июня 2022 г. **ПОСЛЕ ДОРАБОТКИ** 15 июня 2022 г. **ПРИНЯТО** 17 июня 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 июня 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Ватульян А. О., Нестеров С. А. Градиентная модель изгиба составной балки // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 2. С. 6–16. DOI 10.31429/vestnik-19-2-6-16

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач, выбор метода исследования, обсуждение результатов, Нестерову С.А. принадлежит численная реализация решения и анализ результатов.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Gradient Model of Bending of a Composite Beam

Alexander O. Vatulyan¹, Sergey A. Nesterov²✉

¹ Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I.I. Vorovich, 8-A Milchakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia

² Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutin St., Vladikavkaz, 362025, Russia

✉ Sergey A. Nesterov; e-mail: 1079@list.ru

Size-dependent models of beam bending have attracted increased attention of scientists in recent years. The gradient theory of elasticity is used for the correct description of experimental data for micro-dimensional beams. However, the problem of obtaining simplified analytical expressions for moments and deflections of a composite beam remains unexplored. A study of the problem of bending a composite Euler-Bernoulli beam taking into account large-scale effects is carried out. To account for the size effects, the one-parameter gradient model of Aifantis is used. One end of the beam is rigidly fixed. Three types of beam loading are considered: 1) evenly distributed transverse force; 2) bending moment; 3) transverse force at the other end of the beam. Within the framework of the gradient theory of elasticity, the problem is formulated in terms of the bending moment, while additional boundary conditions and conjugation conditions are set. Bending moments are represented as the sum of solutions of the problem in the classical formulation and additional gradient terms. Simplified asymptotic expressions for gradient terms for small values of the scale parameter are obtained for each type of load. The limits of applicability of the asymptotic approach are investigated. Analytical formulas for finding the deflection of the middle line of the beam under arbitrary laws of inhomogeneity of bending stiffness are obtained. Calculations of moments and deflection, both in the case of homogeneous and inhomogeneous parts of the beam, are carried out on specific examples. The following was found out: bending moments experience a jump on the interface surface; deflections are continuous; an increase in the scale parameter leads to a decrease in the deflection value. The dependence of the moment jump on the flexural stiffness modules and the scale parameter is investigated. A comparative study of the influence of the value of the inhomogeneity parameter on the deflection distribution was carried out.

KEYWORDS gradient theory of elasticity, bending moment, composite beam, Euler-Bernoulli model, asymptotic solution, inhomogeneous materials.

FUNDING This work was supported by the grant from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00265).
RECEIVED 10 June 2022. **REVISED** 15 June 2022. **ACCEPTED** 17 June 2022. **PUBLISHED** 30 June 2022.

CITE AS Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Gradient model of bending of a composite beam // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 6–16. DOI 10.31429/vestnik-19-2-6-16

The authors declare no conflict of interest. A.O. Vatulyan belongs to the formulation of problems, the choice of research method, the discussion of the results. S.A. Nesterov belongs to the numerical implementation of the solution and analysis of the results.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

В последние годы большое внимание ученых привлекают масштабно-зависимые модели изгиба балок [1–5]. Для корректного описания экспериментальных результатов для микроразмерных балок [6] обычно применяется градиентная теория упругости, учитывающая зависимость напряженно-деформированного состояния от характерных размерных параметров.

Градиентная теория упругости сформулирована в середине прошлого века в работах Тупина [7] и Миндлина [8]. Однако практическое использование модели Тупина–Миндлина натолкнулось на вопрос об идентификации 5 дополнительных градиентных модулей. В целях упрощения определяющих уравнений были предложены прикладные однопараметрические градиентные модели Айфантиса [9, 10] и Лурье [11, 12].

Первая масштабно-зависимая модель изгиба балки Эйлера–Бернулли была представлена в работе [1] в предположении одноосного напряженного состояния. В отличие от классической теории в градиентной теории уравнение изгиба балки является дифференциальным уравнением 6-го порядка для прогиба.

В работах [3–5] предложены и исследованы более уточненные и корректные модели изгиба балки Эйлера–Бернулли

В связи с широким внедрением неоднородных материалов, механические свойства которых зависят от координат, были исследованы градиентные модели изгиба неоднородной балки при степенных законах неоднородности [15–20], а также слоистых микробалок [13, 14].

В [12, 21] исследованы градиентные модели деформирования полосы с покрытием при ее механическом [12] и тепловом [21] нагружении. Решение проводилось с использованием преобразования Фурье и его численного обращения.

Авторами в [22] решена задача градиентной термоупругости для составного стержня, при этом для нахождения напряжений Коши применен асимптотический подход Вишика–Люстерника, учитывающий наличие погранслойных решений в окрестности границ и точки сопряжения стержней. В [23, 24] проведено исследование НДС бесконечно длинного термоупругого цилиндра с покрытием с учетом масштабных эффектов. Погранслойные слагаемые для радиальных перемещений находятся с помощью асимптотического метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ).

Целями данной работы являются: постановка задачи градиентной теории упругости для составной балки при трех видах нагружения; получение аналитических выражений для нахождения изгибающих моментов и прогибов составных частей балки; тестировании полученных выражений; вычисление моментов и прогибов, как для балки, состоящей из однородных частей, так и неоднородных; анализ полученных результатов.

1. Постановка задачи

В градиентной теории упругости в отличие от классической теории плотность энергии деформации зависит не только от деформации, но и от ее первого градиента и в случае

линейного изотропного материала имеет вид [9]

$$w = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + l^2 \left(\frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii,k}\varepsilon_{jj,k} + \mu\varepsilon_{ij,k}\varepsilon_{ij,k} \right). \quad (1.1)$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе, l — градиентный параметр, имеющий размерность длины и связанный с размерами микроструктурных неоднородностей.

В градиентной теории упругости вводятся определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Коши τ_{ij} , тензора моментных напряжений m_{ijk} , тензора полных напряжений σ_{ij} , которые имеют вид

$$\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad m_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}}, \quad \sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}.$$

Математическая постановка задачи градиентной теории упругости состоит из уравнений равновесия, записанных в полных напряжениях

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.2)$$

статических граничных условий

$$m_{ijk,k}n_jn_k = r_i, \quad \tau_{ij}n_j - m_{ijk,k}n_j - (m_{ijk,k}n_k)_{,j} + (m_{ijk,k}n_jn_k)_{,s}n_s = t_i, \quad (1.3)$$

и кинематических граничных условий

$$u_i = v_i, \quad u_{i,l}n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n}, \quad (1.4)$$

Здесь $S = S_u \cup S_t$ — поверхность тела, t_i , r_i — векторы заданных сил на поверхности тела, n_i — компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Рассмотрим применение градиентной теории упругости к изгибу составной балки.

Рассмотрим изгиб составной балки длиной L и объемом $V = [0, L] \times S$, где $S = bh$ — площадь постоянного по длине поперечного сечения балки толщиной h и шириной b . Ось x_1 направим по нейтральной линии балки, оси x_2 и x_3 совпадают с главными осями инерции балки. Пусть место соединения балок находится на поверхности $x_1 = L_0$. На балку действует равномерно распределенная нагрузка p . Один торец составной балки $x_1 = 0$ жестко защемлен, на другом торце $x = L$ действует момент M_0 и поперечная сила Q_0 . Модуль Юнга является кусочно-непрерывной функцией от координаты x_1 , т.е. $E = E(x_1)$.

Для построения градиентной модели изгиба используем кинематические гипотезы Эйлера–Бернулли [3]

$$u_1 = -x_3w'(x_1), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x_1). \quad (1.5)$$

Здесь $w(x_1)$ — прогиб срединной линии балки. Ненулевые компоненты тензора деформации, напряжений Коши и моментных напряжений имеют вид: $\varepsilon_{11} = -x_3w''$, $\tau_{11} = -E(x_1)x_3w''$, $m_{111} = l^2\tau'_{11}$. Здесь знак «штрих» обозначает производную по координате x_1 .

Обозначим через $I_0 = \int_S x_3^2 dS$ — момент инерции поперечного сечения стержня, $D(x_1) = I_0E(x_1)$ — изгибную жесткость, $M(x_1) = -D(x_1)w''$ — изгибающий момент, $M_h(x_1) = -l^2(D(x_1)w'')'$ — градиентный момент.

В формулах ниже обозначим индексами «1» и «2» функции и параметры, соответствующие первой и второй балке соответственно. Для упрощения расчетов примем градиентный параметр одинаковым для каждой балки. Уравнения равновесия, граничные условия и условия сопряжения, полученные путем применения вариационного принципа Лагранжа, как это было сделано в [4], имеют вид

$$M^{(1)''} - M_h^{(1)'''} + p = 0, \quad M^{(2)''} - M_h^{(2)'''} + p = 0, \quad (1.6)$$

$$w^{(1)}(0) = 0, \quad w'^{(1)}(0) = 0, \quad M_h^{(1)}(0) = 0, \quad (1.7)$$

$$M_h^{(2)}(L) = 0, \quad M^{(2)}(L) - M_h^{(2)}(L) = M_0, \quad M'^{(2)}(L) - M_h''^{(2)}(L) = Q_0, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} w^{(1)}(L_0) &= w^{(2)}(L_0), \quad w'^{(1)}(L_0) = w'^{(2)}(L_0), \quad w''^{(1)}(L_0) = w''^{(2)}(L_0), \\ M_h^{(1)}(L_0) &= M_h^{(2)}(L_0) = 0, \quad M^{(1)}(L_0) - M_h^{(1)}(L_0) = M^{(2)}(L_0) - M_h^{(2)}(L_0), \\ M'^{(1)}(L_0) &- M_h''^{(1)}(L_0) = M'^{(2)}(L_0) - M_h''^{(2)}(L_0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Первоначальная цель исследования — найти распределение изгибающего момента $M(x_1)$ по длине составной балки. Для этого выразим градиентный момент и вторую производную от прогиба через изгибающий момент по формулам

$$M_h(x_1) = l^2 M'(x_1), \quad w'' = -\frac{M(x_1)}{D(x_1)}.$$

Тогда постановка задачи в терминах изгибающего момента примет вид

$$M_1'' - l^2 M_1^{IV} + p = 0, \quad M_2'' - l^2 M_2^{IV} + p = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} l^2 M_1'(0) = l^2 M_2'(L) = 0, \quad M_2(L) - l^2 M_2''(L) &= M_0, \\ M_2'(L) - l^2 M_2'''(L) &= Q_0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{M_1(L_0)}{D_1(L_0)} = \frac{M_2(L_0)}{D_2(L_0)}, \quad l^2 M_1'(L_0) = l^2 M_2'(L_0),$$

$$M_1(L_0) - l^2 M_1''(L_0) = M_2(L_0) - l^2 M_2''(L_0), \quad M_1'(L_0) - l^2 M_1'''(L_0) = M_2'(L_0) - l^2 M_2'''(L_0). \quad (1.12)$$

Обезразмерим задачу (1.10)–(1.12), введя следующие безразмерные параметры и функции

$$\xi = \frac{x_1}{L}, \quad \xi_0 = \frac{L_0}{L}, \quad \alpha = \frac{l}{L}, \quad W_i = \frac{w_i}{L}, \quad g_i = \frac{D_i}{E_0 I_0}, \quad m_i = \frac{M_i L}{E_0 I_0},$$

$$P = \frac{pL^3}{E_0 I_0}, \quad m_0 = \frac{M_0 L}{E_0 I_0}, \quad q_0 = \frac{M_0 L^2}{E_0 I_0}, \quad i = 1, 2,$$

$$E_0 = \max_{x_1 \in [0, L]} E(x_1).$$

Обезразмеренная краевая задача (1.10)–(1.12) примет вид

$$m_1'' - \alpha^2 m_1^{IV} + P = 0, \quad m_2'' - \alpha^2 m_2^{IV} + P = 0, \quad (1.13)$$

$$\alpha^2 m_1'(0) = \alpha^2 m_2'(1) = 0, \quad m_2(1) - \alpha^2 m_2''(1) = m_0, \quad m_2'(1) - \alpha^2 m_2'''(1) = q_0, \quad (1.14)$$

$$\frac{m_1(\xi_0)}{g_1(\xi_0)} = \frac{m_2(\xi_0)}{g_2(\xi_0)}, \quad \alpha^2 m_1'(\xi_0) = \alpha^2 m_2'(\xi_0),$$

$$m_1(\xi_0) - \alpha^2 m_1''(\xi_0) = m_2(\xi_0) - \alpha^2 m_2''(\xi_0), \quad m_1'(\xi_0) - \alpha^2 m_1'''(\xi_0) = m_2'(\xi_0) - \alpha^2 m_2'''(\xi_0). \quad (1.15)$$

2. Решение задачи

В работе получены точное аналитическое решение задачи (1.13)–(1.15) и приближенное аналитическое решение при малых значениях масштабного параметра. После нахождения моментов $m_1(\xi)$, $m_2(\xi)$ далее определяются прогибы срединной линии балки по формуле

$$W(\xi) = -\int_0^\xi (\xi - \eta) \frac{m(\eta)}{g(\eta)} d\eta, \quad (2.1)$$

где

$$\frac{m(\xi)}{g(\xi)} = \begin{cases} \frac{m_1(\xi)}{g_1(\xi)}, \xi \in [0, \xi_0]; \\ \frac{m_2(\xi)}{g_2(\xi)}, \xi \in (\xi_0, 1]. \end{cases}$$

Точные аналитические решения, полученные в системе Maple, имеют громоздкий вид, здесь не приводятся, а далее используются для оценки точности решения приближенного решения. Точные аналитические решения задачи (1.13)–(1.15) показали, что для ненулевых значений масштабного параметра α вблизи торцов составной балки и поверхности сопряжения возникают экспоненциально затухающие составляющие решения.

Представим приближенное решение задачи в моментах (1.13)–(1.15), согласно [10], в виде суммы решения задачи в классической постановке $m_{\text{clas}}^{(i)}$ и дополнительных градиентных слагаемых $m_{\text{grad}}^{(i)}$, т.е. $m^{(i)} = m_{\text{clas}}^{(i)} + m_{\text{grad}}^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим получение приближенного решения для трех наиболее распространенных на практике видов нагружения балки.

Пример 1. На балку действует равномерно распределенная нагрузка. В этом случае положим в (1.13)–(1.15) $P = 1$, $m_0 = q_0 = 0$.

Решение задачи (1.13)–(1.15) в классической постановке при $\alpha = 0$ имеет вид

$$m_{\text{clas}}^{(1)} = m_{\text{clas}}^{(2)} = m_{\text{clas}} = -\frac{P}{2} (\xi - 1)^2.$$

Получим приближенные асимптотические выражения для $m_{\text{grad}}^{(i)}$, $i = 1, 2$ при малом значении α , которые имеют быстро убывающий погранслоинный характер. Для первой балки пограничные слои локализованы в окрестностях поверхности закрепления $\xi = 0$ и поверхности сопряжения со второй балкой $\xi = \xi_0$. Для второй балки пограничные слои находятся в окрестностях $\xi = \xi_0$ и $\xi = 1$. Тогда приближенные градиентные решения можно представить в виде

$$m_{\text{grad}}^{(1)} = z_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) + z_2 \left(\frac{\xi - \xi_0}{\alpha} \right), \quad m_{\text{grad}}^{(2)} = z_3 \left(\frac{\xi_0 - \xi}{\alpha} \right) + z_4 \left(\frac{\xi - 1}{\alpha} \right). \quad (2.2)$$

Так как первое погранслоинное решение $z_1 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)$ должно асимптотически стремиться к нулю при $\frac{\xi}{\alpha} \rightarrow \infty$, то полагаем $z_1 = C_{11} e^{-\frac{\xi}{\alpha}}$. Константа C_{11} находится путем удовлетворения неклассическому граничному условию $m^{(1)}(0) = m_{\text{clas}}^{(1)}(0) + m_{\text{grad}}^{(1)}(0) = 0$. Следовательно $C_{11} = \alpha P$.

Остальные погранслоинные решения представим в виде: $z_2 = C_{12} e^{-\frac{\xi - \xi_0}{\alpha}}$, $z_3 = C_{13} e^{-\frac{\xi_0 - \xi}{\alpha}}$, $z_4 = C_{14} e^{-\frac{\xi - 1}{\alpha}}$. Константы C_{12} , C_{13} , C_{14} находятся путем удовлетворения неклассическому граничному условию

$$m^{(2)}(1) = m_{\text{clas}}^{(2)}(1) + m_{\text{grad}}^{(2)}(1) = 0$$

и двум неклассическим условиям сопряжения

$$m_{\text{clas}}^{(1)}(\xi_0) + m_{\text{grad}}^{(1)}(\xi_0) = m_{\text{clas}}^{(2)}(\xi_0) + m_{\text{grad}}^{(2)}(\xi_0),$$

$$\frac{m_{\text{clas}}^{(1)}(\xi_0) + m_{\text{grad}}^{(1)}(\xi_0)}{g_1(\xi_0)} = \frac{m_{\text{clas}}^{(2)}(\xi_0) + m_{\text{grad}}^{(2)}(\xi_0)}{g_2(\xi_0)}.$$

Имеем,

$$C_{12} = K_1 \left(e^{-\frac{2(\xi_0 - 1)}{\alpha}} - 1 \right), \quad C_{13} = K_1, \quad C_{14} = K_1 e^{-\frac{\xi_0 - 1}{\alpha}},$$

где

$$K_1 = -\frac{P}{2} (\xi_0 - 1)^2 K_0, \quad K_0 = \frac{g_2(\xi_0) - g_1(\xi_0)}{g_1(\xi_0) + g_2(\xi_0) + (g_1(\xi_0) - g_2(\xi_0)) e^{-\frac{2(\xi_0 - 1)}{\alpha}}}.$$

Тогда выражения для моментов каждой балки можно представить в виде

$$m_1(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + P\alpha e^{-\frac{\xi}{\alpha}} + K_1 \left(e^{2\frac{(\xi_0-1)}{\alpha}} - 1 \right) e^{\frac{\xi-\xi_0}{\alpha}}, \quad (2.3)$$

$$m_2(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_1 e^{\frac{\xi_0-\xi}{\alpha}} + K_1 e^{\frac{\xi_0-1}{\alpha}} e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}. \quad (2.4)$$

Пример 2. На торец балки $\xi = 1$ действует изгибающий момент. В этом случае положим в (1.13)–(1.15) $P = 0$, $m_0 = 1$, $q_0 = 0$.

Решение задачи в классической постановке имеет вид

$$m_{\text{clas}}^{(1)} = m_{\text{clas}}^{(2)} = m_{\text{clas}} = 1.$$

Выполняя действия, как в примере 1, были получены выражения для моментов

$$m_1(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_0 \left(e^{2\frac{(\xi_0-1)}{\alpha}} - 1 \right) e^{\frac{\xi-\xi_0}{\alpha}}, \quad (2.5)$$

$$m_2(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_0 e^{\frac{\xi_0-\xi}{\alpha}} + K_0 e^{\frac{\xi_0-1}{\alpha}} e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}. \quad (2.6)$$

Пример 3. На торец балки $\xi = 1$ действует поперечная сила. В этом случае положим в (1.13)–(1.15) $P = 0$, $m_0 = 0$, $q_0 = 1$.

Решение задачи (1.13)–(1.15) в классической постановке имеет вид

$$m_{\text{clas}}^{(1)} = m_{\text{clas}}^{(2)} = m_{\text{clas}} = \xi - 1.$$

Выражения для изгибающих моментов запишутся

$$m_1(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + \alpha e^{-\frac{\xi}{\alpha}} + \left(K_2 \left(e^{2\frac{(\xi_0-1)}{\alpha}} - 1 \right) - \alpha e^{\frac{\xi_0-1}{\alpha}} \right) e^{\frac{\xi-\xi_0}{\alpha}}, \quad (2.7)$$

$$m_2(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_2 e^{\frac{\xi_0-\xi}{\alpha}} + \left(K_2 e^{\frac{\xi_0-1}{\alpha}} - \alpha \right) e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}, \quad (2.8)$$

где

$$K_2 = \left(\xi_0 - 1 - \alpha e^{\frac{\xi_0-1}{\alpha}} \right) K_0.$$

Из формул (2.5), (2.6) следует, что в случае, если изгибающие жесткости g_1 и g_2 не равны на поверхности $\xi = \xi_0$, возникает скачок моментов, равный по модулю $2K_0$. Скачок моментов объясняется непрерывностью вторых производных от прогиба балки, выражение для которых имеет вид

$$\frac{m_1(\xi_0)}{g_1(\xi_0)} = \frac{m_2(\xi_0)}{g_2(\xi_0)}.$$

В случае решения задачи в классической постановке скачка изгибающих моментов не возникает.

Введем новый параметр $\delta = \frac{1-\xi_0}{\alpha}$ — отношение длины второй балки и масштабного параметра α . Тогда формулы (2.3)–(2.8) преобразуются с учетом введенного обозначения. Так, формулы (2.7), (2.8) примут вид

$$m_1(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + \alpha e^{-\frac{\xi}{\alpha}} + \left(K_2 (e^{-\delta} - e^{\delta}) - \alpha \right) e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}, \quad (2.9)$$

$$m_2(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_2 e^{-\delta} e^{\frac{1-\xi}{\alpha}} + \left(K_2 e^{-\delta} - \alpha \right) e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}, \quad (2.10)$$

$$K_0 = \frac{g_2(\xi_0) - g_1(\xi_0)}{g_1(\xi_0) + g_2(\xi_0) + (g_1(\xi_0) - g_2(\xi_0)) e^{-2\delta}}, \quad K_2 = -\alpha (\delta + e^{-\delta}) K_0. \quad (2.11)$$

В случае когда $\delta \gg 1$, получим

$$K_0 = \frac{g_2(\xi_0) - g_1(\xi_0)}{g_1(\xi_0) + g_2(\xi_0)}, \quad K_2 = -\alpha \delta K_0,$$

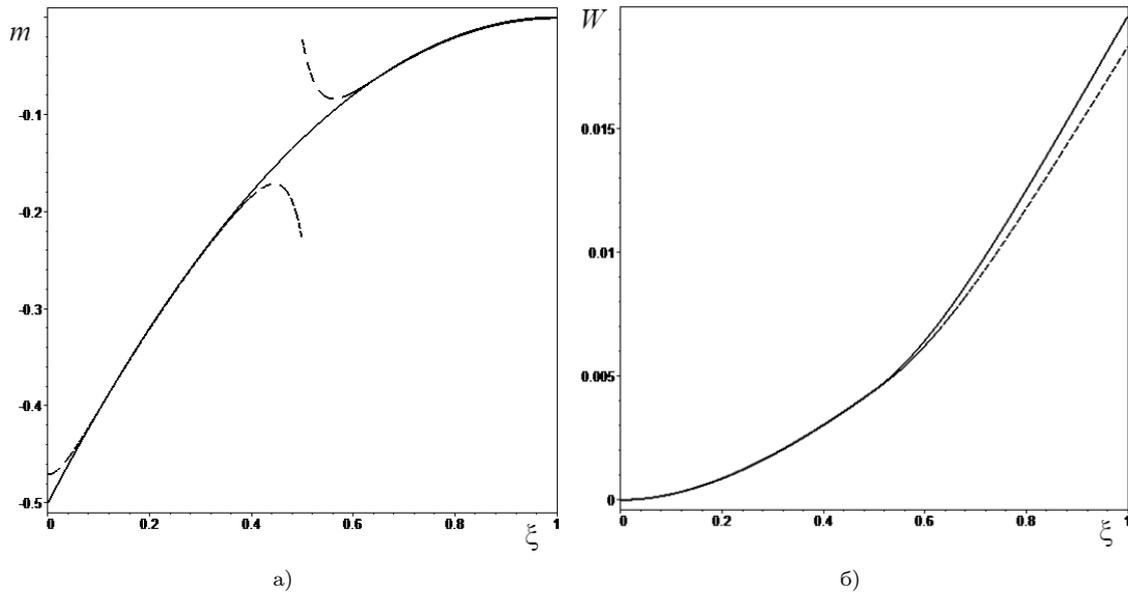


Рис. 1. Графики распределения по координате ξ : а) моментов; б) прогибов в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки по длине балки

$$m_1(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + \alpha e^{-\frac{\xi}{\alpha}} - (K_2 e^\delta + \alpha) e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}, \quad m_2(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_2 e^{-\delta} e^{\frac{1-\xi}{\alpha}} - \alpha e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}.$$

В случае когда $\delta \ll 1$, выполним разложения экспонент в ряд Тейлора по малому параметру δ , ограничившись только линейными слагаемыми, т.е. $e^{-\delta} \cong 1 - \delta$, $e^{-2\delta} \cong 1 - 2\delta$, получим

$$m_1(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + \alpha e^{-\frac{\xi}{\alpha}} - 2\delta (K_2 + \alpha) e^{\frac{\xi-1}{\alpha}},$$

$$m_2(\xi) = m_{\text{clas}}(\xi) + K_2(1 - \delta) \left(e^{\frac{1-\xi}{\alpha}} + e^{\frac{\xi-1}{\alpha}} \right) - \alpha e^{\frac{\xi-1}{\alpha}}.$$

3. Результаты вычислений

На примере балки, состоящей из двух однородных частей с модулями $g_1 = 10$, $g_2 = 1$ проведена численная верификация приближенного аналитического решения для трех видов нагружения. Выяснено, что асимптотическое решение задачи дает погрешность вычисления прогиба на торце $\xi = 1$, не превосходящую 1 %, при $\alpha \leq 0,03$.

Рассмотрим результаты расчетов по нахождению распределения моментов и прогибов для трех видов нагружения балки: при $g_1 = 10$, $g_2 = 1$, $\xi_0 = 0,5$. На рис. 1–3 сплошной линией показаны решения в классической постановке, штрихами — в градиентной постановке.

На рис. 1 представлены распределения безразмерных изгибающих моментов (рис. 1а) и прогибов (рис. 1б) в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки по длине балки при $\alpha = 0,03$. Для нахождения распределения моментов применяются формулы (2.3), (2.4), а для нахождения распределения прогибов — формула (2.1).

На рис. 2 приведено распределение безразмерных изгибающих моментов (рис. 2а) и прогибов (рис. 2б) в случае действия на торец балки $\xi = 1$ изгибающего момента при $\alpha = 0,03$. Для нахождения распределения моментов применяются формулы (2.5), (2.6).

Рис. 3 содержит распределение безразмерных изгибающих моментов (рис. 3а) и прогибов (рис. 3б) в случае действия на торец балки $\xi = 1$ поперечной силы при $\alpha = 0,03$. Для нахождения распределения моментов используем формулы (2.7), (2.8).

Из рис. 1–3 следует, что изгибающие моменты испытывают скачок на поверхности $\xi = \xi_0$, величина которого согласно (2.11) определяется соотношением изгибных жесткостей балок, а также параметром δ .

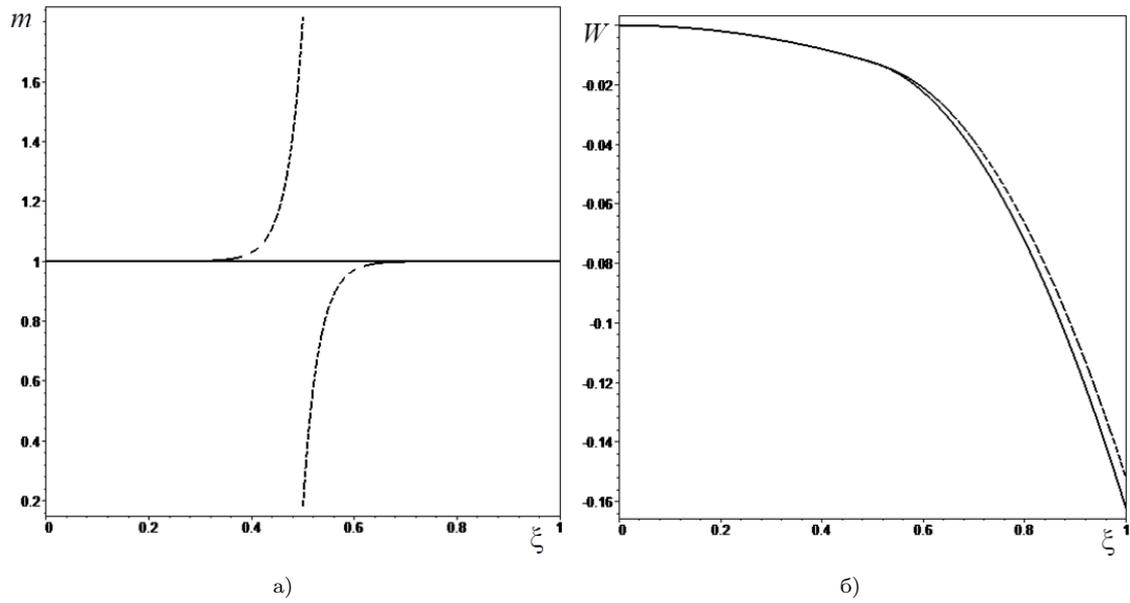


Рис. 2. Графики распределения по координате ξ : а) моментов; б) прогибов в случае действия на торец балки $\xi = 1$ изгибающего момента

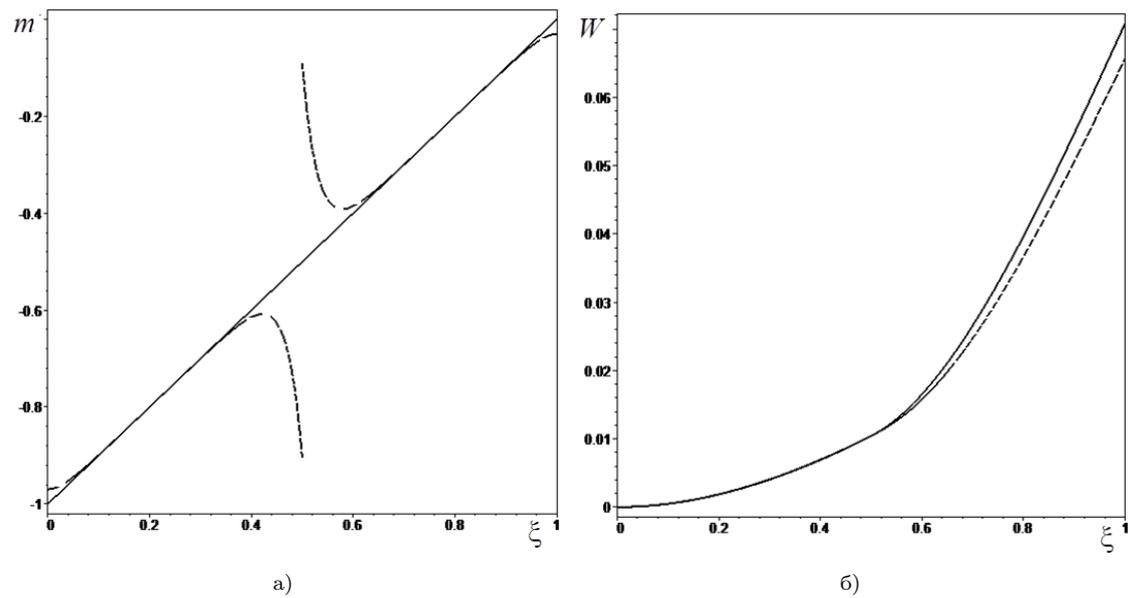


Рис. 3. Графики распределения по координате ξ : а) моментов; б) прогибов в случае действия на торец балки $\xi = 1$ поперечной силы

Исследуем зависимость скачка изгибающих моментов $\Delta m = m_2 - m_1$ на поверхности $\xi = \xi_0$, вычисляемого по формуле (2.11), от значения параметра δ в случае действия на торец балки $\xi = 1$ изгибающего момента.

На рис. 4 представлены результаты вычислений зависимости скачка моментов от параметра δ при $\alpha = 0,03$, $g_1 = 1$, $g_2 = 10$.

Из рис. 4 следует, что наиболее быстро скачок моментов Δm изменяется при $\delta < 1$, т.е. когда длина второй балки меньше параметра α .

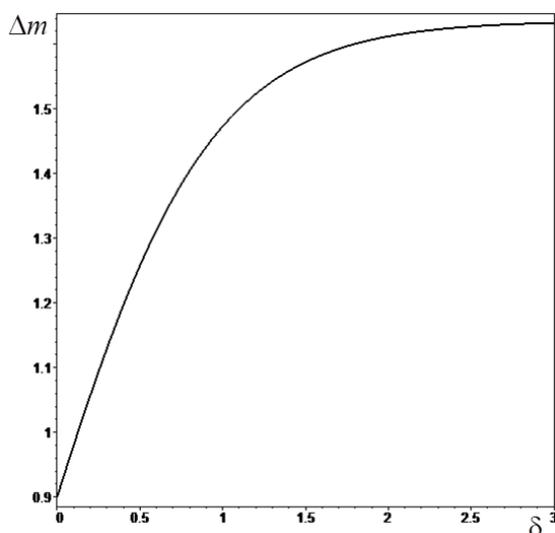


Рис. 4. График зависимости скачка безразмерных моментов от параметра δ

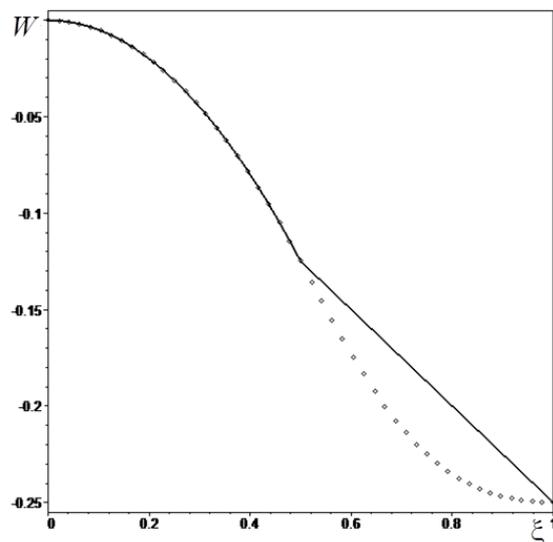


Рис. 5. Распределение по координате ξ прогибов при разных значениях параметра неоднородности N

Рассмотрим влияние законов неоднородности на распределение прогибов. Полагаем, что первая балка однородная, а вторая — с законом неоднородности $g_2(\xi) = 1 + (2\xi - 1)^N$, $N = 1, 2, \dots$, обеспечивающим непрерывное изменение изгибной жесткости через место соединения балок.

На рис. 5 сплошной линией показан график распределения прогиба при $N = 1$, точками — при $N = 2$.

Заключение

Исследована задача градиентной теории упругости об изгибе составной балки в рамках модели Эйлера–Бернулли. Изгибающие моменты представлены в виде суммы решений классической задачи и градиентных слагаемых при малых значениях масштабного параметра. Показано отличие распределений моментов и прогибов по горизонтальной координате, рассчитанных по классической теории и найденных с использованием градиентной теории упругости. Выяснено, что увеличение значения масштабного параметра снижает значения прогибов. Скачок моментов в окрестности поверхности сопряжения разнородных материалов объясняется непрерывностью прогибов и их первых и вторых производных. Исследовано влияние параметра неоднородности в степенном законе, моделирующем механические характеристики балки, на распределение прогибов по горизонтальной координате.

Литература [References]

1. Papargyri-Beskou S., Tsepoura K., Polyzos D., Beskos D. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, iss. 2, pp. 385–400. DOI [10.1016/S0020-7683\(02\)00522-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00522-X)
2. Niiranen J., Balabanov V., Kiendl J., Hosseini S. Variational formulations, model comparisons and numerical methods for Euler–Bernoulli micro-and nano-beam models. *Math. Mech. Solids*, 2017, vol. 24, iss. 1, pp. 312–335. DOI [10.1177/1081286517739669](https://doi.org/10.1177/1081286517739669)
3. Lurie S., Solyaev Y. Revisiting bending theories of elastic gradient beams. *Int. J. Eng. Sci.*, 2018, vol. 126, pp. 1–21. DOI [10.1016/j.ijengsci.2018.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.01.002)
4. Lurie S., Solyaev Y. On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2019, pp. 1–13. DOI [10.1007/s00161-019-00781-3](https://doi.org/10.1007/s00161-019-00781-3)

5. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах теории упругости за счет градиентных эффектов. *Доклады Академии наук*, 2019, т. 489, № 6, с. 585–591 [Lomakin E.V., Lurie S.A., Rabinskiy L.N., Solyaev Y.O. Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects. *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 12, pp. 482–486] DOI [10.31857/S0869-56524896585-591](https://doi.org/10.31857/S0869-56524896585-591)
6. Lam D.C., Yang F., Chong A., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2003, vol. 51, iss. 8, pp. 1477–1508. DOI [10.1016/S0022-5096\(03\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00053-X)
7. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, pp. 385–414. DOI [10.1007/BF00253945](https://doi.org/10.1007/BF00253945)
8. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, pp. 51–78. DOI [10.1007/BF00248490](https://doi.org/10.1007/BF00248490)
9. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. *JMBM*, 1994, vol. 5, pp. 335–353. DOI [10.1515/JMBM.1994.5.3.355](https://doi.org/10.1515/JMBM.1994.5.3.355)
10. Altan B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *JMBM*, 1997, vol. 8, pp. 231–282. DOI [10.1515/JMBM.1997.8.3.231](https://doi.org/10.1515/JMBM.1997.8.3.231)
11. Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. *Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктурой*. Москва, Издательство МАИ, 2011 [Lurie S.A., Belov P.A., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Scale effects in continuum mechanics. Materials from micro- and nanostructures*. Moscow, Izdatelstvo MAI, 2011. (in Russian)]
12. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н., Кондратова Ю.Н., Волов М.И. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2013, № 1, с. 161–181 [Lurie S.A., Solyaev Yu.O., Rabinsky L.N., Kondratova Yu.N., Volov M.I. Simulation of the stress-strain state of thin composite coating based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for layer. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 1, pp. 161–181. (in Russian)]
13. Li A., Zhou S., Zhou S., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory. *Compos. Struct.*, 2014, vol. 108, pp. 259–266. DOI [10.1016/j.compstruct.2013.09.020](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.020)
14. Fu G., Zhou S., Qi L. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, vol. 152, pp. 411–419. DOI [10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037)
15. Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M. On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Mater Des.*, 2010, vol. 31, pp. 2324–2333. DOI [10.1016/J.MATDES.2009.12.006](https://doi.org/10.1016/J.MATDES.2009.12.006)
16. Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M., Tajalli S.A., Ahmadian M.T. A strain gradient functionally graded Euler–Bernoulli beam formulation. *Int J Eng Sci.*, 2012, vol. 52, pp. 65–76. DOI [10.1016/J.IJENGSCI.2011.11.010](https://doi.org/10.1016/J.IJENGSCI.2011.11.010)
17. Salamat-talab M., Shahabi F., Assadi A. Size dependent analysis of functionally graded microbeams using strain gradient elasticity incorporated with surface energy. *Appl Math Modell.*, 2012. DOI [10.1016/j.apm.2012.02.053](https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.053)
18. Eltaher M.A., Khairy A., Sadoun A.M., Omar F.A. Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams. *Appl Math Comput.*, 2014, vol. 229, pp. 283–295. DOI [10.1016/j.amc.2013.12.072](https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.072)
19. Li L., Hu Y. Post-buckling analysis of functionally graded nanobeams incorporating nonlocal stress and microstructure-dependent strain gradient effects. *Int J Mech Sci.*, 2017, vol. 120, pp. 159–170. DOI [10.1016/j.ijmecsci.2016.11.025](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.025)
20. Momeni S.A., Asghari M. The second strain gradient functionally graded beam formulation. *Composite Structures*, 2018, pp. 1–37. DOI [10.1016/j.compstruct.2017.12.046](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.046)
21. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2021, т. 163, кн. 2, с. 181–196 [Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Solution of the problem of gradient thermoelasticity for a coated strip. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 181–196. (In Russian)] DOI [10.26907/2541-7746.2021.2.181-196](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2021.2.181-196)
22. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity. *Materials Physics Mechanics*, 2020, vol. 46, pp. 27–41. DOI [10.18149/MPM.4612020_3](https://doi.org/10.18149/MPM.4612020_3)
23. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Решение задачи градиентной термоупругости для

- цилиндра с термозащитным покрытием. Вычислительная механика сплошных сред, 2021, т. 14, № 3, с. 253–263 [Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O. Solution of the gradient thermoelasticity problem for a cylinder with a heat-protected coating. *Computational continuum mechanics*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 253–264 (in Russian)] DOI [10.7242/1999-6691/2021.14.3.21](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.21)
24. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2021, № 4, с. 60–70 [Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O. Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder with a coating based on the gradient model of thermoelasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 4, pp. 60–70. (In Russian)] DOI [10.15593/perm.mech/2021.4.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.07)