

УДК 539.422.3

DOI 10.31429/vestnik-19-2-39-46

К исследованию вибраций протяженного основания при наличии заглубленного жидкого слоя

С. Е. Рубцов¹, А. В. Павлова¹✉, И. С. Телятников²¹ Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия² Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия✉ Павлова Алла Владимировна; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

В работе рассматривается плоская задача о вибрации полупространства с покрытием, моделируемым упругим слоем, при наличии между ними жидкой прослойки. Решения краевых задач, описывающих поведение гидроупругой слоистой среды, строятся на основе интегрального подхода. Неоднородность строения основания обуславливает необходимость декомпозиции модели. После решения задач для трех сред с учетом условий сопряжения слоев получены интегральные характеристики нормальных давлений на границах жидкой прослойки. Приведены результаты модельных расчетов для нормальных давлений в области раздела сред. Рассмотренная модель может быть использована при исследовании особенностей взаимодействия вибрационных источников с геофизической средой, моделируемой многослойным основанием, содержащем заглубленные жидкие слои.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА вибрационное воздействие, модели геоматериалов, протяженное основание, покрытие, жидкая прослойка, установившиеся колебания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ Фрагменты работы выполнены при поддержке ГЗ ЮНЦ РАН № 122020100341-0 (проект 00-20-13).

ПОСТУПИЛА 6 июня 2022 г. **ПОСЛЕ ДОРАБОТКИ** 7 июня 2022 г. **ПРИНЯТО** 17 июня 2022 г. **ПУБЛИКАЦИЯ** 30 июня 2022 г.

ЦИТИРОВАНИЕ Рубцов С. Е., Павлова А. В., Телятников И. С. К исследованию вибраций протяженного основания при наличии заглубленного жидкого слоя // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 2. С. 39–46. DOI 10.31429/vestnik-19-2-39-46

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. © Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

On the Study of Vibrations of an Extended Base in the Presence of a Depth Liquid Layer

Sergeiy E. Rubtsov¹, Alla V. Pavlova¹✉, Ilya S. Telyatnikov²¹ Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia² Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia✉ Alla V. Pavlova; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

In mathematical modeling of geophysical fields in a real environment, a package of layers is often used as a model of the latter, since the primary occurrence of layers and formations is usually horizontal. In order to predict and prevent geophysical, as well as related technical disasters in the face of increasing technogenic environmental loads, there is an acute issue of developing models of physical and mechanical processes in geomaterials. The need to increase the probability of prognostic estimates for the occurrence of catastrophic situations requires more precise calculations concerning the dynamic behavior of extended objects with complex structure and physical and mechanical properties. In the paper we consider the plane problem of vibration for a half-space with coating, modeled by an elastic layer, in the presence of a liquid layer between them. The amplitude values of the displacements for elastic media are described by the steady-state Lamé equations, the liquid velocity potential satisfies the Helmholtz equation. Solutions of boundary value problems describing the behavior of a hydroelastic layered medium are built on the basis of an integral approach. The heterogeneity of the foundation structure necessitates the decomposition of the model. We obtain the integral characteristics of normal pressures at the boundaries of the liquid layer by solving the problems for each of the three media, taking into account the layer conjugation conditions. The results of model calculations for normal pressures in the media interface are presented. The considered model can be used in studying the features of the interaction between vibration sources and the geophysical environment, modeled by a multilayer foundation containing liquid interlayers.

KEYWORDS vibration effect, geomaterial models, extended foundation, coating, liquid layer, steady-state oscillations.

FUNDING Some fragments of the work were carried out with the support of the SSC RAS No. 122020100341-0 (project 00-20-13).

RECEIVED 6 June 2022. **REVISED** 7 June 2022. **ACCEPTED** 17 June 2022. **PUBLISHED** 30 June 2022.

CITE AS Rubtsov S. E., Pavlova A. V., Telyatnikov I. S. On the study of vibrations of an extended base in the presence of a depth liquid layer // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 39–46. DOI 10.31429/vestnik-19-2-39-46

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

В целях прогноза и предотвращения геофизических, а также сопутствующих им технических катастроф в условиях увеличения техногенных нагрузок на окружающую среду остро стоит вопрос развития моделей физических и механических процессов в геоматериалах. Необходимость повышения вероятности прогностических оценок возникновения катастрофических ситуаций требует уточнения расчетов динамического поведения протяженных объектов сложного строения и физико-механических свойств. Проведение районирования участков для строительства экологически опасных сооружений, таких как плотины, трубопроводы и т.д., нуждается в исследовании структуры геологической среды.

Начиная со второй половины прошлого столетия, успешно развиваются методы виброакустического мониторинга, получившие в работах [1–4] название методов активной сейсмологии, использующие вибраторы как средства изучения тонкой структуры коры Земли. Управляемые вибрационные воздействия используются также для стимуляции нефтяных и растворенных рудных месторождений. Направленные сотрясения могут изменить фильтрационные потоки в пористых средах, вызвать гидрогеологические эффекты в неглубоко залегающих водоносных горизонтах [3 и др.].

Основания нередко моделируются как кусочно-однородными упругими материалами (пакет слоев или слоистое полупространство), в том числе содержащими дефекты, так и гетерогенными средами, что позволяет учитывать не только их упругие и волноводные свойства, но и неоднородность по глубине, наличие заглубленных жидких слоев и т.д. Методы решения задач для слоистых оснований хорошо развиты, в том числе в работах [5–9].

В решении прикладных задач вибрационной геофизики и сейсмологии, при изучении взаимодействия генератора колебаний и протяженного основания необходимо учитывать виброчувствительность геофизических сред, в том числе самой верхней части земной коры — осадочной толщи [1]. В работе рассмотрена задача, моделирующая воздействие виброисточника на грунтовый массив, содержащий водоносный слой.

1. Постановка задачи для слоистого основания при наличии жидкой прослойки

В плоской постановке рассматривается задача о вибрации упругого полупространства с покрытием, моделируемым упругим слоем, при наличии между ними жидкой прослойки (рис. 1).

Такая комбинация сред для гидроупругой структуры ранее рассматривалась в работе [10]. Математическая модель системы, описывающей взаимодействие протяженного неоднородного основания и поверхностного генератора колебаний, описывается следующим образом.

Для рассматриваемого установившегося характера колебаний множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен, во всех соотношениях использованы амплитудные значения соответствующих функций. Определяющие уравнения для амплитудных значений смещений $\mathbf{u}_j = \{u_j, w_j\}$ упругих сред — уравнения Ляме [11] в случае установившегося процесса примут вид

$$(\lambda_j + \mu_j) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}_j) + \mu_j \Delta \mathbf{u}_j = -\omega^2 \rho_j \mathbf{u}_j, \quad j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Индекс 1 соответствует покрытию, 2 — полуплоскости, λ_j, μ_j — упругие постоянные, ρ_j — плотности упругих сред.

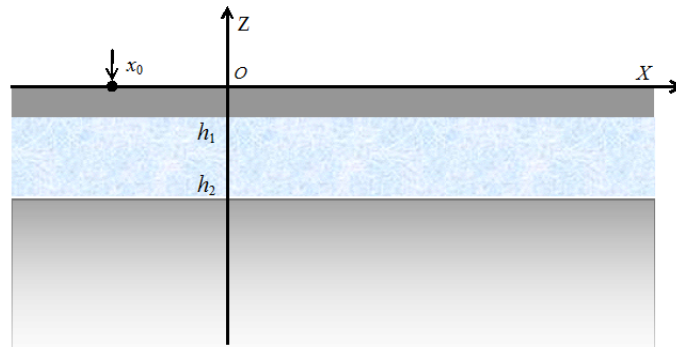


Рис. 1. Схема задачи

На поверхности задана локализованная нагрузка

$$\tau_{xz}^{(1)} \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_z^{(1)} \Big|_{z=0} = A\delta(x - x_0), \quad A = \text{const.} \quad (1.2)$$

На нижней границе слоя и верхней границе полуплоскости касательные напряжения отсутствуют, для амплитуд нормальных давлений, подлежащих определению, приняты обозначения

$$\sigma_z^{(j)} \Big|_{z=h_j} = q_j(x), \quad j = 1, 2. \quad (1.3)$$

Выполняется условие убывания смещений на бесконечности $R = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$, $\mathbf{u}_j \rightarrow 0$ и принцип предельного поглощения [5].

Колебания точек жидкости описываются потенциалом скоростей $\phi(x, z)$, удовлетворяющим волновому уравнению. При установившемся движении жидкости для $\phi(x, z)$ справедливо уравнение Гельмгольца

$$c_0^2 \Delta \phi(x, z) = -\omega^2 \phi(x, z), \quad (1.4)$$

где c_0 — скорость звука в жидкости, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$. На границы жидкой прослойки воздействуют упругие среды

$$-i\omega\rho_0\phi(x, h_j) = q_j(x), \quad (1.5)$$

где ρ_0 — плотность жидкости, $q_j(x)$ — давления на верхней (индекс 1) и нижней (индекс 2) границе жидкости.

Идеальный межслойный контакт предполагает выполнение условия равенства вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругой среды в зоне контакта, т.е.

$$\left(-i\omega w_j - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \Big|_{z=h_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.6)$$

Далее с использованием интегрального преобразования Фурье строятся решения трех независимых подзадач: для упругого слоя-покрытия, слоя жидкости и упругой полуплоскости.

2. Решение краевой задачи

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к (1.4), (1.5), приходим к следующей краевой задаче для потенциала скоростей в слое жидкости:

$$\Phi''(\alpha, z) + (\omega^2 c^{-2} - \alpha^2) \Phi(\alpha, z) = 0, \quad (2.1)$$

$$\Phi(\alpha, h_j) = \frac{iQ_j(\alpha)}{\omega\rho_0}, \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\Phi(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, z) \exp(i\alpha x) dx, \quad Q_j(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_j(x) \exp(i\alpha x) dx.$$

Уравнения для упругого слоя ($j = 1$) и полуплоскости ($j = 2$) в трансформантах Фурье принимают вид

$$\begin{aligned} \mu_j U_j'' - (\alpha^2(\lambda_j + 2\mu_j) - \rho_j \omega^2) U_j - i\alpha(\lambda_j + \mu_j) W_j' &= 0, \\ (\lambda_j + 2\mu_j) W_j'' - (\alpha^2 \mu_j - \rho_j \omega^2) W_j - i\alpha(\lambda_j + \mu_j) U_j' &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничные условия для слоя и полуплоскости запишутся

$$(U_1' - i\alpha W_1)|_{z=0} = 0, \quad ((\lambda_1 + 2\mu_1) W_1' - i\alpha \lambda_1 U_1)|_{z=0} = A \exp(i\alpha x_0); \quad (2.4)$$

$$(U_j' - i\alpha W_j)|_{z=h_j} = 0, \quad ((\lambda_j + 2\mu_j) W_j' - i\alpha \lambda_j U_j)|_{z=h_j} = Q_j(\alpha), \quad j = 1, 2; \quad (2.5)$$

$$U_2, W_2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Здесь

$$U_j(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x, z) \exp(i\alpha x) dx, \quad W_j(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_j(x) \exp(i\alpha x) dx.$$

Решение задачи (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, z) &= \frac{i [Q_1(\alpha) \operatorname{sh}(\sigma_0(z - h_2)) - Q_2(\alpha) \operatorname{sh}(\sigma_0(z - h_1))]}{\omega \rho_0 \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1))}, \\ \sigma_0 &= \sqrt{\alpha^2 - \omega^2 c^{-2}}. \end{aligned}$$

содержит образы Фурье контактных давлений на границах жидкого слоя.

Используя известную технику построения решения задач (2.3)–(2.5) и (2.3), (2.5), (2.6) [5], получим для слоя

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A \exp(i\alpha x_0) \\ Q_1 \end{Bmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= 2i\alpha \left[\eta_1 (\operatorname{ch}(\sigma_{11}(z - h_1)) \operatorname{ch}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) + \right. \\ &\quad + \operatorname{sh}(\sigma_{11}(z - h_1)) \operatorname{sh}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) - 2 \operatorname{ch}(\sigma_{11}z) \alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12}) + \\ &\quad + \sigma_{11} \sigma_{12} (\operatorname{sh}(\sigma_{12}(z - h_1)) \operatorname{sh}(\sigma_{11}h_1) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) + \\ &\quad \left. + \operatorname{ch}(\sigma_{12}(z - h_1)) \operatorname{ch}(\sigma_{11}h_1) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) - 2\eta_1^2 \operatorname{ch}(\sigma_{12}z)) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12} &= 2i\alpha \left[\eta_1 (\operatorname{ch}(\sigma_{11}z) \operatorname{ch}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) - \right. \\ &\quad - \operatorname{sh}(\sigma_{11}z) \operatorname{ch}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) - 2 \operatorname{ch}(\sigma_{11}(z - h_1)) \alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} + \\ &\quad + \sigma_{11} \sigma_{12} (\operatorname{ch}(\sigma_{12}z) \operatorname{ch}(\sigma_{11}h_1) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) - \\ &\quad \left. - \operatorname{sh}(\sigma_{12}z) \operatorname{sh}(\sigma_{11}h_1) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) - 2 \operatorname{ch}(\sigma_{12}(z - h_1)) \eta_1^2) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{21} &= 2\sigma_{11} \left[-\eta_1 (\operatorname{sh}(\sigma_{11}(z - h_1)) \operatorname{ch}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) + \right. \\ &\quad + \operatorname{ch}(\sigma_{11}(z - h_1)) \operatorname{sh}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) - 2\alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \operatorname{sh}(\sigma_{11}z) + \\ &\quad + \alpha^2 (\operatorname{sh}(\sigma_{12}(z - h_1)) \operatorname{ch}(\sigma_{11}h_1) (\Omega_{1,-} - \Omega_{1,+}) - \\ &\quad \left. - \operatorname{ch}(\sigma_{12}(z - h_1)) \operatorname{sh}(\sigma_{11}h) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) + 2\eta_1^2 \operatorname{sh}(\sigma_{12}z)) \right]; \end{aligned}$$

$$K_{22} = 2\sigma_{11} \left[-\eta_1 (\text{sh}(\sigma_{11}z) \text{ch}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) - \text{ch}(\sigma_{11}z) \text{sh}(\sigma_{12}h_1) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) - 2\alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \text{sh}(\sigma_{11}(z - h_1))) + \alpha^2 (\text{sh}(\sigma_{11}h_1) \text{ch}(\sigma_{12}z) (\Omega_{1,+} + \Omega_{1,-}) - \text{ch}(\sigma_{11}h_1) \text{sh}(\sigma_{12}z) (\Omega_{1,+} - \Omega_{1,-}) + 2\eta_1^2 \text{sh}(\sigma_{12}(z - h_1))) \right].$$

Здесь

$$\Omega_{j,\pm} = \alpha^2 \sigma_{j1} \sigma_{j2} \pm \eta_j^2, \quad \sigma_{jk} = \sqrt{\alpha^2 - k_{jk}^2}, \quad j, k = 1, 2,$$

$$k_{j1}^2 = \frac{\rho_j \omega^2}{\lambda_j + 2\mu_j}, \quad k_{j2}^2 = \frac{\rho_j \omega^2}{\mu_j}, \quad \eta_j = \alpha^2 - 0,5k_{j2}^2,$$

$$\Delta_1 = 4\mu_1 \left[(\Omega_{1,+}^2 - \Omega_{1,-}^2) \text{ch}(\sigma_{12}h_1) \text{ch}(\sigma_{11}h_1) - (\Omega_{1,+}^2 + \Omega_{1,-}^2) \text{sh}(\sigma_{12}h_1) \text{sh}(\sigma_{11}h_1) - 4\alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \eta_1^2 \right].$$

Для полуплоскости будем иметь

$$U_2 = \frac{i\alpha Q_2}{2\mu_2 \Omega_{2,-}} (\eta_2 \exp(\sigma_{21}(h_2 - z)) - \sigma_{21} \sigma_{22} \exp(\sigma_{22}(h_2 - z))); \quad (2.8)$$

$$W_2 = \frac{\sigma_{21} Q_2}{2\mu_2 \Omega_{2,-}} (\eta_2 - \alpha^2). \quad (2.9)$$

3. Определение контактных напряжений на границах жидкого слоя

Для определения амплитудных значений нормального давления на границах жидкого слоя вернемся к условиям (1.6), которые после применения интегрального преобразования Фурье примут вид

$$-i\omega W_j(\alpha, h_j) - \Phi'(\alpha, h_j) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Тогда на границе покрытия и жидкой прослойки ($z = h_1$) получим уравнение

$$\frac{2\sigma_{11}(\eta_1 - \alpha^2)}{\Delta_1} \left[Q_1 (\eta_1^2 \text{sh}(\sigma_{12}h_1) \text{ch}(\sigma_{11}h_1) - \alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \text{ch}(\sigma_{12}h_1) \text{sh}(\sigma_{11}h_1)) + A \exp(i\alpha x_0) (\alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \text{sh}(\sigma_{11}h_1) - \eta_1^2 \text{sh}(\sigma_{12}h_1)) \right] = \frac{i(Q_1 \sigma_0 \text{ch}(\sigma_0(h_2 - h_1)) - Q_2 \sigma_0)}{\omega \rho_0 \text{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1))}. \quad (3.1)$$

А в области контакта жидкости с упругой полуплоскостью

$$\frac{Q_2}{2\mu_2 \Omega_{2,-}} (\eta_2 \sigma_{21} - \alpha^2 \sigma_{21}) = \frac{i(Q_1 \sigma_0 - Q_2 \sigma_0 \text{ch}(\sigma_0(h_2 - h_1)))}{\omega \rho_0 \text{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1))} \quad (3.2)$$

Из системы уравнений (3.1), (3.2) определяются трансформанты Фурье нормального давления в плоскостях раздела жидкой и упругих сред. Подстановка последних в (2.7)–(2.9) позволит получить выражения для Фурье-образов смещений в верхнем слое-покрытии и нижней полуплоскости.

Получение оригиналов контактных давлений $q_1(x)$ и $q_2(x)$ связано с необходимостью применения обратного преобразования Фурье

$$q_j(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} Q_j(\alpha, z) \exp(-i\alpha x) d\alpha.$$

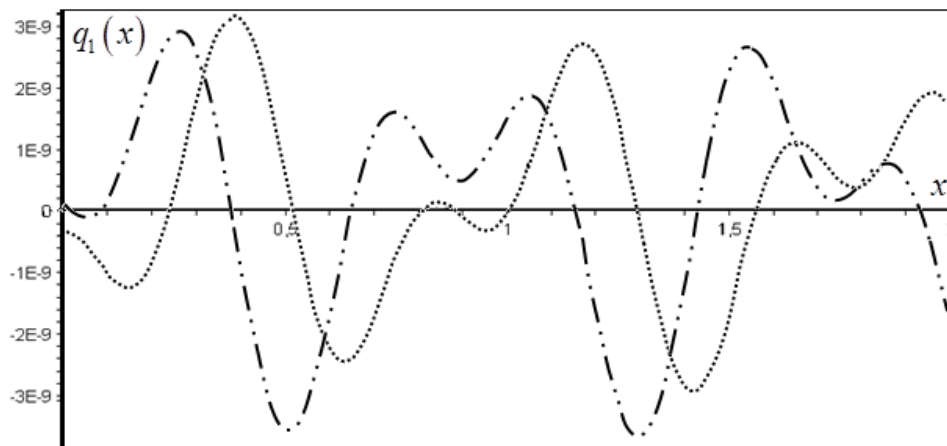


Рис. 2. Вещественная (пунктирная линия) и мнимая (штрихпунктирная линия) части нормальных давлений на границе раздела покрытия и жидкой прослойки

Расположение контура в комплексной плоскости определяется принципом предельного поглощения [5]. После перехода к полярной системе координат интегралы обратных преобразований Фурье вычисляются с использованием теории вычетов [12]

$$q_j(x) = i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{\alpha=\zeta_k} Q_j(\alpha, h_j) \exp(-i\alpha x) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^2 \int_{\Sigma_m^\pm} Q_j(\alpha, h_j) \exp(-i\alpha x) d\alpha,$$

где второе слагаемое соответствует интегралам по берегам разрезов в точках ветвления, значения которых находятся численно.

При этом для вычисления вычета функции в точке $\alpha = \zeta$ использовалась приближенная формула

$$\operatorname{Res}_{\alpha=\zeta} Q(\alpha, z) = c_{-1} \approx \frac{1}{2} [Q(\zeta + \varepsilon, z) - Q(\zeta - \varepsilon, z)] \varepsilon,$$

где ε — величина отступа от полюса превышает заданную погрешность вычислений. Эта формула может быть получена путем разложения функции $Q(\alpha, z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\alpha = \zeta$ [12].

4. Пример модельных расчетов

Характер распределения амплитуды контактных напряжений по границе раздела сред $z = h_1$ представлен на рис. 2. Рисунок иллюстрирует результаты расчетов для следующих модельных безразмерных параметров: $\omega = 30$, $c_0 = 1,5$; $\rho_0 = 1$; $h_1 = -0,1$, $h_2 = -0,11$; $\rho_1 = \rho_2 = 2,84$; $V_p^{(1)} = V_p^{(2)} = 6,3$; $V_s^{(1)} = V_s^{(2)} = 3,5$ ($V_p^{(j)} = ((\lambda_j + 2\mu_j) / \rho_j)^{1/2}$, $V_s^{(j)} = (\mu_j / \rho_j)^{1/2}$), $A = 1$. Расчетные параметры отнесены к характерным величинам, для $\rho^* = 1000 \text{ кг/м}^3$, $h^* = 1000 \text{ м}$, $v^* = 1000 \text{ м/с}$, $\omega = 2\pi v^* \nu (h^*)^{-1}$.

При малых значениях возбуждающей частоты модуль амплитуды контактных напряжений равномерно распределен по границе раздела упругого слоя и жидкости, с увеличением частоты равномерное распределение нарушается.

Максимум амплитуды контактных напряжений на границе жидкого слоя и полуплоскости для жестких оснований меньше чем для мягких при тех же значениях геометрических и частотных параметров.

Заключение

Задачи различных областей науки и технологий могут быть формализованы в виде моделей, включающих гармонический источник колебаний и полугораниченное основание, имеющее сложное неоднородное строение. В вопросах сейсмологии изучение напряженно-деформированного состояния геологической среды позволяет оценить возможные последствия вибрационных воздействий.

В работе рассмотрена математическая модель геологической структуры, подверженной вибрационному нагружению, позволяющая рассчитать характеристики напряженно-деформированного состояния породных массивов, содержащих заглубленные жидкие слои. Алгоритм построения модели применим при усложнении свойств поверхностного осциллятора.

Рассмотренная модель может найти применение при исследовании особенностей взаимодействия вибрационных источников с геофизической средой, моделируемой многослойным основанием и жидкими прослойками.

Литература [References]

1. Николаев, А.В. *Вибрационное просвечивание – метод исследования Земли. Проблемы вибрационного просвечивания*. Наука, Москва, 1977. [Nikolaev, A.V. *Vibratsionnoe prosvechivanie – metod issledovaniya Zemli. Problemy vibratsionnogo prosvechivaniya = Vibrational transillumination is a method of studying the Earth. Problems of vibration transillumination*. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)]
2. Алексеев, А.С. Современные обратные задачи геофизики в проблеме многодисциплинарного прогноза землетрясений. В: *Развитие методов и средств экспериментальной геофизики: сборник научных трудов*. Вып. 1. ИФЗ РАН, Москва, 1993. С. 9–24. [Aleksseev, A.S. Modern inverse problems of geophysics in the problem of multidisciplinary earthquake prediction. In: *Razvitie metodov i sredstv eksperimental'noy geofiziki = Development of methods and means of experimental geophysics: collection of scientific papers*. Iss. 1. IPE RAS, Moscow, 1993, pp. 9–24. (In Russian)]
3. Barabanov, V.L., Nikolaev, A.V., Sobisevich, A.L. et. al. On effects of vibrations on water-saturated media. In: *Seismicity and related processes in the environment*, vol. 1, Research and Coordinating Centre for Seismology and Engineering, Russ. Acad. Sci., Moscow, 1994, pp. 75–77.
4. Ляпин, А.А., Селезнев, М.Г., Собисевич, Л.Е., Собисевич, А.Л. *Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии*. ГНТП “Глобальные изменения природной среды и климата”. М.: ГНИЦ 111 К (МФ) Минобразования России, 1999. [Lyapin, A.A., Seleznev, M.G., Sobisevich, L.E., Sobisevich, A.L. *Mekhaniko-matematicheskie modeli v zadachakh aktivnoy seysmologii = Mechanical and mathematical models in problems of active seismology*. SSTRP “Global environmental and climate change”. GNITs 111 K (MF) of the Ministry of Education of Russia, Moscow, 1999. (In Russian)]
5. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М.: Наука, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineynouprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear elastic media*. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)]
6. Alterman, Z., Karal, F. Propagation of elastic waves in layered media by finite differences methods. *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 1958, vol. 58, iss. 1, pp. 367–398.
7. Dunkin, J.W. Computations of modal solutions in layered elastic media at high frequencies. *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 1965, vol. 55, iss. 2, pp. 335–358.
8. Сеймов, В.М., Трофимчук, А.Н., Савицкий, О.А. *Колебания и волны в слоистых средах*. Наукова думка, Киев, 1990. [Seimov, V.M., Trofimchuk, A.N., Savitsky, O.A. *Kolebaniya i volny v sloistyykh sredakh = Oscillations and waves in layered media*. Naukova Dumka, Kyiv, 1990. (In Russian)]
9. Усошина, Е.А., Суворова, Т.В., Соловьев, А.Н. Математические модели динамических систем, включающих слоистые обводненные пористоупругие основания. *Вестник Донского государственного технического университета*, 2016, № 3, с. 10–16. [Usoshina, E.A., Suvorova, T.V., Soloviev, A.N. Mathematical models of dynamic systems, including layered watered porous elastic foundations. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of the Don State Technical University*, 2016, no. 3, pp. 10–16. (In Russian)]
10. Нижник, М.П., Павлова, А.В., Рубцов, С.Е. К решению одной задачи для упругого полупространства с жидким включением. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2006, № 2, с. 40–43. [Nizhnik, M.P., Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E. On the

solution of a problem for an elastic half-space with a liquid inclusion. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2006, No. 2, pp. 40–43. (In Russian)]

11. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. Наука, Москва, 1979. [Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela = Mechanics of a Deformable Solid Body*. Nauka, Moscow, 1979. (In Russian)]
12. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва, 1973. [Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo = Methods of the theory of functions of a complex variable*. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)]