

УДК 531.39

DOI 10.31429/vestnik-19-3-47-54

Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек

П.Г. Великанов^{1,2}✉, Ю.П. Артюхин¹¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия² Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия✉ Великанов Петр Геннадьевич; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Современное машиностроение очень часто ставит задачи по расчету тонкостенных конструкций со взаимоисключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую прочность и надежность, а с другой, — экономичность и легкость. Для успешного сочетания вышеперечисленных свойств вполне оправданным представляется использование в конструкциях ортотропных материалов и пластиков. В статье продемонстрирована возможность с помощью математических аналогий для решения задач прочности, устойчивости и колебаний эффективно использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала. В качестве примеров, где были использованы математические аналогии, рассмотрены: задача изгиба ортотропной цилиндрической оболочки; задача слабого изгиба ортотропной пластины; методика решения уравнения динамики ортотропной пластины; устойчивость ортотропных оболочек и др.

Ключевые слова: механика, математические аналогии, прочность, устойчивость и колебания ортотропных пластин и оболочек.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи (Великанов П.Г.), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.).

Цитирование: Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 47–54. DOI 10.31429/vestnik-19-3-47-54

Поступила 18 июля 2022 г. После доработки 2 сентября 2022 г. Принято 5 сентября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Mathematical Analogies in Solving Problems of Strength, Stability and Vibrations of Orthotropic Plates and Shells

P. G. Velikanov^{1,2}✉, Yu. P. Artyukhin¹¹ Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia² Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia✉ Peter G. Velikanov; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. Modern mechanical engineering very often sets tasks for the calculation of thin-walled structures with mutually exclusive properties: on the one hand, the structures under study must combine high strength and reliability, and on the other, cost-effectiveness and lightness. For a successful combination of the above properties, it seems quite justified to use orthotropic materials and plastics in structures. The article demonstrates the possibility of using mathematical analogies to solve problems of strength, stability and vibrations to use solutions for the same type of isotropic structures to predict the behavior of the same structures made of orthotropic material. As examples where mathematical analogies were used, the following were considered: problems of bending an orthotropic cylindrical shell; the problem of weak bending of an orthotropic plate; a method for solving the equation of dynamics of an orthotropic plate; stability of orthotropic shells, etc.

Keywords: mechanics, mathematical analogies, strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells.

Funding. The study did not have sponsorship.

The authors contributed equally. The idea of the work (Yu.P. Artyukhin), calculations (Yu.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article (P.G. Velikanov), making edits and approving the final version (Yu.P. Artyukhin, P.G. Velikanov).

Cite as: Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P. Mathematical analogies in solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. DOI 10.31429/vestnik-19-3-47-54

Received 18 July 2022. Revised 2 September 2022. Accepted 5 September 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Появление композиционных материалов существенно расширило гамму физико-механических характеристик конструкций, изготовленных из этих материалов. Большое разнообразие этих характеристик приводит к разнообразию напряженно-деформированного состояния даже для геометрически однородных конструкций. Встает вопрос, нельзя ли использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала? По-видимому, впервые эту идею выдвинул А.В. Саченков [1, 2].

1. Постановка и решение задач

Точная математическая аналогия имеет место при замене модуля сдвига \tilde{G} некоторым гипотетическим (фиктивным) модулем сдвига \tilde{G}_0 , имеющим вид

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}, \quad (*)$$

где E_j, ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления ($j = 1, 2$).

Это равенство позволяет установить следующую физическую аналогию между изотропией и ортотропией материала

$$E \leftrightarrow \sqrt{E_1 E_2}; \quad \nu \leftrightarrow \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad (1.1)$$

т.е. усредненные механические характеристики ортотропной оболочки соответствуют характеристикам изотропной оболочки. Подобный модуль сдвига в 1914 г. предложил использовать для железобетонных плит в выражении для крутильной жесткости Губер М., но в отличие от (1.1) он заменял ν на ν_B — коэффициент Пуассона бетона [3].

Аффинное преобразование одной из координат приводит к окончательной идентичности уравнений изотропной и ортотропной оболочки. При этом, если граничные условия в аналогичных задачах совпадают, то любое решение задачи изгиба, устойчивости и колебаний ортотропной оболочки может быть получено из решения задачи для изотропной оболочки путем замены соответствующих характеристик. Для многих задач, к сожалению, эти перемены дают лишь предварительные оценочные результаты. Точность результатов зависит от влияния модуля сдвига на конкретные величины напряженно-деформированного состояния. Если в задачах преобладающими являются деформации растяжения и изгиба, а деформации сдвига и кручения малы, то погрешность будет минимальной (например, малость влияния последних на интегральные характеристики — максимальный прогиб, критические нагрузки, частоты свободных колебаний).

Рассмотрим некоторые примеры.

1. *Задача изгиба изотропной цилиндрической оболочки под действием сосредоточенной силы P_** сводится к решению следующего уравнения в комплексной форме (впервые Новожиловым В.В. было выполнено комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек. Представление уравнений в комплексной форме позволило существенно упростить решение задачи: сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений):

$$\nabla^4 \tilde{F} + i2b_*^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi_*^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} = i2b_*^2 R P_* \delta(\xi_* - \xi_{*0}, \phi), \quad (1.2)$$

где \tilde{F} — комплексная функция усилий; i — мнимая единица; b_* — размер оболочки в плане; ξ_* , ϕ — линии кривизны оболочки; $(\xi_{*0}, 0)$ — точка приложения сосредоточенной силы; R — радиус кривизны цилиндрической оболочки; $\delta(\xi_* - \xi_{*0}, \phi)$ — обобщенная δ -функция Дирака; P_* — интенсивность сосредоточенной нагрузки.

Решение аналогичной задачи для ортотропной цилиндрической оболочки при использовании соотношения (*) приводит к определению комплексной функции усилий из следующего уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \sqrt{\delta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)^2 \tilde{F} + i2b^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} = i2b^2 RP \delta(\xi - \xi_0, \phi), \quad (1.3)$$

где $\delta = E_2/E_1$.

Учитывая (1.1) и заменяя осевую координату

$$\xi_* \leftrightarrow \sqrt[4]{\delta} \xi, \quad (1.4)$$

с учетом свойств δ -функции [4–7], приходим к уравнению (1.2), в котором нужно выполнить следующие соответствия:

$$b_*^2 \leftrightarrow \frac{b^2}{\sqrt{\delta}}; \quad P_* \leftrightarrow \frac{P}{\sqrt[4]{\delta}}. \quad (1.5)$$

Если оболочка свободно оперта по краям или имеет место скользящее защемление, то граничные условия в терминах комплексной функции \tilde{F} для изотропной и ортотропной оболочек тождественно совпадают. При этом любое решение задачи об изгибе ортотропной цилиндрической оболочки может быть получено из решения аналогичной задачи для изотропной оболочки.

Пересчет результатов осуществляется по формулам (1.1), (1.4), (1.5). Как видно из этих формул, влияние ортотропии материала дает лишь один параметр δ — отношение окружной жесткости к продольной. Несмотря на то, что этот параметр является основным для многих характеристик напряженно-деформированного состояния, он не является единственным.

Например, известно, что фундаментальное решение (для единичной сосредоточенной нагрузки) для ортотропной пластинки зависит от коэффициента [4]

$$\mu = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta}}, \quad (1.6)$$

где

$$\delta_1 = \nu_2 + \frac{2\tilde{G}(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1}; \quad \delta_2 = \frac{E_2}{E_1} = \delta.$$

Причем, имеет место три случая: 1) $\mu > 1$, 2) $\mu < 1$, 3) $\mu = 1$. Последний случай соответствует предельному значению, когда корни характеристического уравнения являются кратными и соответствуют гипотетическому (фиктивному) модулю сдвига \tilde{G}_0 . Поэтому этот случай не в полной мере отражает разнообразие ортотропии.

Определим поведение решения уравнений (1.2), (1.3) в окрестности точки приложения нагрузки. Главная особенность уравнения (1.2) определяется старшими производными и имеет вид [8]

$$\tilde{F} = \frac{ib_*^2 P_* R}{4\pi} \rho_*^2 \ln \rho_*; \quad \rho_*^2 = (\xi_* - \xi_{*0})^2 + \phi^2,$$

что при пересчете дает

$$\tilde{F} = \frac{ib^2 PR}{4\pi \sqrt[4]{\delta^3}} \rho_1^2 \ln \rho_1; \quad \rho_1^2 = \sqrt{\delta} (\xi - \xi_0)^2 + \phi^2, \quad (1.7)$$

где ρ_1 — расстояние текущей точки от точки приложения нагрузки. Положим $\xi - \xi_0 = \rho \cos(\alpha)$, $\phi = \rho \sin(\alpha)$, где α — направление угла между расстоянием ρ и продольной осью ξ . Из формулы (1.7) следует, что в окрестности сосредоточенной нагрузки в ортотропной оболочке и пластинке

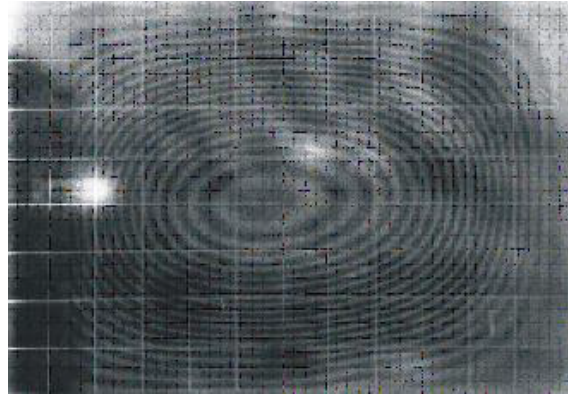


Рис. 1. Линии равного прогиба в виде эллипсов для ортотропной пластинки

линиями равного прогиба являются эллипсы (а не круги, как получается в изотропном случае), что подтверждается экспериментально, например, с помощью метода голографической интерферометрии (рис. 1) [9].

Из (1.7) могут быть получены следующие асимптотические формулы

$$w = -\frac{PR^2}{8\pi D_1 \sqrt[4]{\delta^3}} \rho_1^2 \ln \rho_1; \quad M_1 = \frac{P(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}{4\pi \sqrt[4]{\delta}} \ln \rho_1; \quad T_1 = \frac{P}{4\pi R \sqrt[4]{\delta}} \ln \rho_1; \quad (1.8)$$

$$M_2 = \frac{P \sqrt[4]{\delta} (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}{4\pi} \ln \rho_1; \quad T_2 = -\frac{P \sqrt[4]{\delta}}{4\pi R} \ln \rho_1,$$

где w – прогиб; M_1, M_2, T_1, T_2 – усилия и изгибающие моменты j -го направления.

Эти формулы при $\alpha = 0$ полностью совпадают с асимптотическими формулами, полученными в [10] Христенко А.С. другим методом.

Для свободно опертой по торцам оболочки длины $\xi_1 = L/R$ и толщины $\gamma = R/h$ при действии радиальной силы, приложенной в середине пролета, может быть обобщена формула Одквиста Ф. [11]

$$w_0 = \frac{w_{\max} E_1 R}{P} = \frac{1,629 \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{\delta} \right]^{5/8} \sqrt[4]{\gamma^9} \sqrt{\xi_1}, \quad (1.9)$$

которой можно пользоваться, например, для предварительных оценочных расчетов, так как она дает погрешность до 10 %.

Разберем случай, когда равенство (*) не имеет места. Будем исходить из технической теории цилиндрических оболочек. Кроме того, в уравнении

$$\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \phi^4} + 2ib^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} \right) = -i2b^2 R^3 q_3,$$

где

$$\lambda = \frac{E_2}{4\tilde{G}} + \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\tilde{G}} - \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} - \nu_2,$$

опустим член уравнения с ε . Попытка построения комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек (в отличие от изотропных) натолкнулось на следующую трудность – появление комплексно-сопряженных неизвестных функций \tilde{F} , что первоначально не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Несмотря на указанную трудность, эта запись позволяет более компактно

представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

В результате получим

$$\nabla^4 \tilde{F} + \left(\frac{\delta}{\lambda^2} - 1 \right) \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \phi^4} + i2b_*^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi_*^2} = i2b_*^2 RP_* \delta(\xi_* - \xi_{*0}, \phi), \quad (1.10)$$

где

$$\xi_* = \sqrt{\lambda} \xi, \quad P_* = \frac{P}{\sqrt{\lambda}}, \quad b_*^2 = \frac{b^2}{\lambda}.$$

Можно сделать оценку второго члена уравнения (1.10) по сравнению с первым для различных композиционных материалов, предполагая, что все производные бигармонического оператора равны единице. Оценка показывает, что второй член уравнения по сравнению с бигармоническим оператором составляет от 10 до 20 %. При учете членов с кривизнами удельный вес этого члена будет еще меньше. Интересно отметить, что величина δ/λ^2 является инвариантом относительно поворота осей на угол $\pi/2$.

2. *Слабый изгиб ортотропной пластины.*

Уравнение изгиба в этом случае будет [4]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y_*^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y_*^4} = \frac{q_3}{D_1}. \quad (1.11)$$

Вводя новую переменную $y_* = \sqrt[4]{\delta_2} y$, уравнение (1.11) можно записать в виде

$$\nabla^4 w + 2\zeta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_3}{D_1}; \quad \zeta = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_2}} - 1. \quad (1.12)$$

Уравнение изгиба ортотропной пластины, представленное в форме (1.12), позволяет развить быстро сходящийся способ последовательных приближений. Для ортотропных пластин $|\zeta| < 1$. Представляя решение уравнения (1.12) в виде следующего ряда по степеням ζ

$$w = w_1 + \zeta w_2 + \zeta^2 w_3 + \dots,$$

получим следующую систему зацепляющихся уравнений

$$\nabla^4 w_1 = \frac{q_3}{D_1}; \quad \nabla^4 w_2 = -2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad \nabla^4 w_3 = -2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \dots$$

Интегрирование аналогичной системы уравнений и представление решения в комплексной форме для случая плоской задачи было выполнено в монографии Лехницкого С.Г. [12]. Предполагаемый способ разложения по степеням параметра ζ в отличие от способа Лехницкого С.Г. обладает более сильной сходимостью. Последнее становится понятным, если учесть, что в предлагаемом способе разложения в ряд вычисление ведется от первого приближения для ортотропной пластины, а в способе Лехницкого С.Г. — от первого приближения для изотропной пластины. Легко видеть при этом, что первое приближение для ортотропной пластины может быть получено из решения для изотропной на основании установленной аналогии.

Предлагаемый метод позволяет автоматически в первом приближении решить задачу определения частот собственных колебаний ортотропных пластин по известным решениям для изотропных пластин.

Уравнение динамики ортотропной пластины имеет вид

$$\nabla^4 w + 2\zeta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \omega_1^2 w = 0,$$

где ω_1^2 — величина, пропорциональная квадрату частоты.

Решение в первом приближении получается из уравнения

$$\nabla^4 w - \omega_1^2 w = 0 \quad (1.13)$$

на основании аналогии с колебаниями изотропной пластины.

Решение по первому приближению (1.13) может быть использовано для предварительных оценочных расчетов. Величина ω_1^2 в первом приближении будет определена с недостатком, если истинное значение $\zeta > 0$ и с избытком, если $\zeta < 0$.

3. Устойчивость ортотропных оболочек.

Рассмотрим ортотропную цилиндрическую оболочку под действием фиктивной нагрузки

$$-q_3 = P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y},$$

характеризующую проекцию внутренних усилий на нормаль при повороте элемента во время деформации.

Уравнение нейтрального равновесия элемента оболочки в этом случае имеет вид [13]

$$\nabla_\delta^4 \nabla_\lambda^4 w + \frac{E_2 h}{D_1 R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\nabla_\delta^4 q_3}{D_1}, \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_\delta^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; & \nabla_\lambda^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \\ \lambda_1 &= \lambda; & \lambda_2 &= \delta_2 = \delta. \end{aligned}$$

Предполагая, что оболочка сжимается равномерно усилиями Ph , и считая, что деформация цилиндрической оболочки осесимметричная, из уравнения (1.14) получаем

$$D_1 \frac{d^8 w}{dx^8} + P \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{E_2 h}{R^2} \frac{d^4 w}{dx^4} = 0. \quad (1.15)$$

Сравнивая уравнение (1.15) с уравнением устойчивости изотропной цилиндрической оболочки [13], обнаруживаем следующее соответствие:

$$D_1 \leftrightarrow D; \quad E_2 \leftrightarrow E, \quad (1.16)$$

либо $\nu_1 \nu_2 \leftrightarrow \nu^2$; $E_1 E_2 \leftrightarrow E^2$.

Соотношения (1.16) соответствуют введению гипотетического (фиктивного) модуля сдвига \tilde{G}_0 , а поэтому решение будет зависеть от одного безразмерного параметра $\delta = E_2/E_1$. Все это объясняется тем, что при осесимметричной деформации решение вообще не зависит от модуля сдвига. Если теперь воспользоваться формулой для верхнего критического напряжения [14]

$$P_B^* = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)\gamma}}$$

и учесть соотношения (1.16), то получим известную формулу для критического напряжения [13, 15] ортотропной цилиндрической оболочки

$$P_B = \frac{E_1 \sqrt{\delta}}{\sqrt{3(1-\nu_1 \nu_2)\gamma}}. \quad (1.17)$$

При потере устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки в результате действия внешнего давления $q = P_y/R$, вводя гипотетический (фиктивный) модуль сдвига \tilde{G}_0 и делая преобразование в уравнении (1.15) $x_* = x \sqrt[4]{\delta}$, будем иметь следующее уравнение устойчивости:

$$D_2 \nabla^8 w + \frac{E_2 h}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x_*^4} = -\nabla^4 \left(q R \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Отсюда следует такая аналогия с изотропной задачей

$$E \leftrightarrow E_2; \quad l_* \leftrightarrow l\sqrt[4]{\delta}; \quad \nu^2 \leftrightarrow \nu_1\nu_2. \quad (1.18)$$

Из формулы для верхнего критического давления изотропной цилиндрической оболочки [14]

$$q_{\text{кр}}^* = \frac{\sqrt{6}E\gamma^{-5/2}\pi R}{9(1-\nu^2)^{3/4}l_*},$$

где l_* — длина оболочки, и аналогии (1.18) найдем критическое давление для ортотропной цилиндрической оболочки

$$q_{\text{кр}} = \frac{2\pi E_1 \delta^{3/4} h^{5/2}}{3\sqrt{6}(1-\nu_1\nu_2)^{3/4} l R^{3/2}}.$$

При потере устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки при кручении усилием $S_{\text{кр}}$ можно путем подобных рассуждений прийти к соотношениям пересчета (1.18) и $S_{\text{кр}}^* \leftrightarrow \sqrt[4]{\delta} S_{\text{кр}}$, пользуясь которыми и результатом монографии [14]

$$S_{\text{кр}}^* = 0,74 \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8} R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{l_*^2}},$$

будем иметь

$$S_{\text{кр}} = 0,74 \frac{E_2 h}{(1-\nu_1\nu_2)^{5/8} \delta^{5/8} R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{l^2}}.$$

Полученные значения критических нагрузок полностью совпадают с результатами статьи [16], найденными обычной и существенно более длинной процедурой определения собственных значений краевой задачи.

Заключение

В статье продемонстрирована возможность с помощью математических аналогий для решения задач прочности, устойчивости и колебаний использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала.

Отработка предложенной методики (по использованию математических аналогий) была успешно продемонстрирована на следующих задачах: задача изгиба ортотропной цилиндрической оболочки; задача слабого изгиба ортотропной пластины; методика решения уравнения динамики ортотропной пластины; устойчивость ортотропных оболочек и др.

Метод математических аналогий позволил без потери точности существенно сократить время для расчета конструкций, изготовленных из ортотропного материала, если известно решение для однотипной изотропной конструкции.

Литература [References]

1. Артюхин, Ю.П., Саченков, А.В., К расчету ортотропных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1967, вып. 5, с. 300–310. [Artyukhin, Yu.P., Sachenkov, A.V., On the calculation of orthotropic plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, 1967, iss. 5, pp. 300–310. (in Russian)]
2. Саченков, А.В., О сведении расчета ортотропных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1975, вып. 11, с. 180–185. [Sachenkov, A.V., On the reduction of the calculation of orthotropic plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, 1975, iss. 11, pp. 180–185. (in Russian)]
3. Huber, M.T., Die Grundlagen einer rationellen Bemessung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. *Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines*, 1914 vol. 66, no. 30, pp. 557–564.

4. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань, ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and shallow shells by the boundary elements method*. Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]
5. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., *Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины*. *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii = Mathematical modeling and boundary value problems: Proc. of the All-Russian Scientific Conference*, 2004, part 3, pp. 67–71. (in Russian)]
6. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., *Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов*. *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnykh sred = Actual problems of continuum mechanics*, 2020. pp. 105–111. (in Russian)]
7. Оконечников, А.С., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Основы теории*. Москва, МАИ, 2019. [Okonechnikov, A.S., Tarlakovsky, D.V., Fedotenko, G.V., *Obobshchennye funktsii v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. Osnovy teorii = Generalized functions in mechanics of a deformable solid. Fundamentals of theory*. Moscow, MAI, 2019. (in Russian)]
8. Ион, Ф., *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*. Москва, ИМ, 1958. [Jon, F., *Ploskie volny i sfericheskie srednie v primenenii k differentsial'nykh uravneniyam s chastnymi proizvodnymi = Plane waves and spherical averages as applied to partial differential equations*. Moscow, IM, 1958. (in Russian)]
9. Костин, В.А., Снегуренко, А.П., *Идентификация поля цилиндрических жесткостей изотропных и ортотропных пластин*. *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2001, № 2, с. 3–9. [Kostin, V.A., Snegurenko, A.P., Identification of the field of cylindrical stiffness of isotropic and orthotropic plates. *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva = Bulletin of the A.N. Tupolev KSTU*, 2001, No. 2, pp. 3–9. (in Russian)]
10. Христенко, А.С., *О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку*. *Известия АН СССР. ОТН, механика и машиностроение*, 1962, № 3. [Khristenko, A.S., On the effect of concentrated loads on an orthotropic cylindrical shell. *Izvestiya AN SSSR. OTN, mekhanika i mashinostroenie = Izvestia of the USSR Academy of Sciences. OTN, Mechanics and Mechanical Engineering*, 1962, No. 3. (in Russian)]
11. Odkvist, F.K.J., Action of forces and moments symmetrically distributed along a generatrix of a thin cylindrical shell. *J. Appl. Mech.*, 1946, vol. 13, iss. 2, pp. A106–A108. DOI doi.org/10.1115/1.4009534
12. Лехницкий, С.Г., *Анизотропные пластинки*. Москва, Гостехиздат, 1947. [Lehnitsky, S.G., *Anizotropnye plastinki = Anisotropic plates*. Moscow, Gostekhizdat, 1947. (in Russian)]
13. Thielemann, W., Schnell, W., Fischer, G., Beul- und Nachbeulverhalten orthotroper Kreiszyinderschalen unter Axial- und Innendruck. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, 1960, vol. 8, no. 10/11, pp. 284–292.
14. Вольмир, А.С., *Устойчивость упругих систем*. Москва, Физматгиз, 1963. [Volmir, A.S., *Ustoychivost' uprugikh sistem = Stability of elastic systems*. Moscow, Fizmatgiz, 1963. (in Russian)]
15. Кабанов, В.В., *Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при совместном действии внешнего давления и продольных усилий*. *Известия вузов, сер. «Авиационная техника»*, 1964, № 4, с. 46–51. [Kabanov, V.V., Stability of an anisotropic circular cylindrical shell under the combined action of external pressure and longitudinal forces. *Izvestiya vuzov, ser. "Aviation Technology" = Proc. of universities, series "Aviation Engineering"*, 1964, no. 4, pp. 46–51. (in Russian)]
16. Даревский, В.М., Кукуджанов, С.Н., *Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении*. В: *Прочность цилиндрических оболочек*. Москва, Оборонгиз, 1959, с. 95–108. [Darevskiy, V.M., Kukudzhanov, S.N., Stability of the cylindrical orthotropic shell under torsion and normal pressure. In: *Prochnost' tsilindricheskikh obolochek = Strength of cylindrical shells*. Moscow, Oborongiz, 1959, pp. 95–108. (in Russian)]