

УДК 539.3:532.5

DOI 10.31429/vestnik-19-3-55-62

Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями

А. А. Ярошенко ^{1,2}✉, Ж. В. Маленко ^{1,2}, Е. В. Маркина ¹, Л. О. Костюкова ¹,
И. И. Бабилов ¹

¹ Севастопольский государственный университет, ул. Университетская, 33, Севастополь, 299053, Россия

² Филиал «Государственного морского университета имени адмирала Ф. Ф. Ушакова» в г. Севастополь, ул. Героев Севастополя, 11, корпус 8/22, Севастополь, 299009, Россия

✉ Ярошенко Александр Александрович; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Аннотация. Исследуется развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых областью давлений, движущихся по поверхности ледяного покрова, плавающего на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Исследуется влияние равномерного сжатия на неустановившиеся колебания ледяного покрова. Показано, что для больших значений сжимающих усилий существует три значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. Изучено влияние сжимающих усилий на значения критических скоростей. Проведен анализ зависимости фронтов распространяющихся волн от сил сжатия. Показано, что при увеличении сжимающих усилий увеличивается область покрытая волнами. При больших сжимающих усилиях образуется угловая зона, в которой происходит наложение волн. Эта зона уменьшается при увеличении скорости перемещения нагрузки.

Ключевые слова: сжимающие усилия, изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, ледяной покров, критическая скорость.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Ярошенко А. А., Маленко Ж. В., Маркина Е. В., Костюкова Л. О., Бабилов И. И. Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 55–62. DOI 10.31429/vestnik-19-3-55-62

Поступила 1 сентября 2022 г. После доработки 15 сентября 2022 г. Принято 17 сентября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

The Effect of Compressive Forces on the Development of Bending-Gravitational Waves Generated by Moving Perturbations

A. A. Yaroshenko^{1,2}✉, Zh. V. Malenko^{1,2}, E. V. Markina¹, L. O. Kostyukova¹, I. I. Babikov¹

¹ Sevastopol State University, Univesitetskaya st., 33, Sevastopol, 299053, Russia

² Branch of "Admiral F.F. Ushakov State Maritime University" in Sevastopol, Heroes of Sevastopol st., 11, housing 8/22, Sevastopol, 299009, Russia

✉ Aleksandr A. Yaroshenko; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Abstract. In winter, the ice cover on rivers and lakes is used to deliver various kinds of cargo through it. Therefore, it is important to know the behavior of the ice sheet depending on the speed of movement of the load and other characteristics of the ice. The influence of uniform compression and the velocity of load displacement on unsteady three-dimensional vibrations of an ice sheet floating on the surface of a homogeneous liquid is investigated. The ice cover is modeled by a thin elastic isotropic plate. It is shown that there are three values of critical velocities at which the nature of the wave disturbance changes. In this case, from two to three systems of bending-gravitational waves are formed. These waves propagate both ahead of the source of disturbances and behind it. The influence of compressive forces on the values of critical velocities is studied. It is shown that compressive forces have the greatest effect on the propagation velocity of elastic waves, and the least on the propagation velocity of transverse and longitudinal waves propagating behind the source. The velocity of propagation of elastic waves increases with increasing compressive forces. With an increase in the speed of movement of the source of disturbances and compression forces, the area covered by waves increases. For large values of compressive forces, an angular zone is formed behind the source, in which waves overlap. This zone decreases with an increase in the speed of movement of the load.

Keywords: compressive forces, bending-gravitational waves, elastic plate, ice cover, critical speed.

Funding. The study did not have sponsorship.

The authors declare that there is no conflict of interest. The authors contributed equally.

Cite as: Yaroshenko A. A., Malenko Zh. V., Markina E. V., Kostyukova L. O., Babikov I. I. The effect of compressive forces on the development of bending-gravitational waves generated by moving perturbations. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 55–62. DOI 10.31429/vestnik-19-3-55-62

Received 1 September 2022. Revised 15 September 2022. Accepted 17 September 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

В зимнее время в районах Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока ледяной покров на реках и озерах используется для доставки по нему грузов. При использовании ледяного покрова в качестве переправ важно знать не только физико-механические свойства льда, но и его поведение от воздействия на него различного рода нагрузок. При движении по ледяному покрову транспортного средства в нем образуются волны, которые в определенных случаях приводят к разрушению льда. Экспериментальные исследования показывают, что скорость транспортного средства влияет на несущую способность плавающего ледяного покрова.

Теория поведения ледяного покрова от воздействия на него движущихся нагрузок получила свое развитие в работе Хейсина Д.Е. [1]. В книге изложена математическая теория волновых процессов, происходящих в плавающем ледяном покрове. Рассматриваются плоские задачи распространения волн в битых и сплошных льдах. Трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движением нагрузки, исследовались в работах [1–5]. В книге [3] обобщены результаты зарубежных авторов посвященных исследованию перемещений грузов по пресноводному и морскому льду. Работа охватывает как экспериментальные, так и теоретические исследования.

Неустановившиеся трехмерные колебания ледяного покрова от движения нагрузки без учета сжимающихся усилий рассмотрены в работах [6, 7], с учетом равномерного растяжения — в [4, 8], а равномерного сжатия — в [4, 9]. Влияние неравномерного сжатия на развитие изгибно-гравитационных волн под действием периодической и импульсной нагрузки рассмотрено в работе [10].

В настоящей работе проводится исследование влияния сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн и на значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового движения.

1. Постановка задачи

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает ледяной покров, который моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость неограниченны. В начальный момент времени поверхность пластина–жидкость горизонтальна. Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности пластинки прикладываются давления вида

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (1.1)$$

Исследуем влияние равномерного сжатия на развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, вызываемых движущимся источником возмущений (1.1).

Считаем движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки ζ — малыми. В системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ

$$\Delta\phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty \quad (1.2)$$

с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_t \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -p_1 f(x, y) \text{ при } z = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial\phi/\partial z = 0 \text{ при } z = -H, \tag{1.4}$$

начальными

$$\phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0 \tag{1.5}$$

и кинематическим

$$\partial\zeta/\partial t = \partial\phi/\partial z - v\partial\zeta/\partial x \text{ при } z = 0 \tag{1.6}$$

условиями, где

$$D_1 = D/\rho g, \quad Q_1 = Q/\rho g, \quad \chi_1 = \rho_1 h/\rho g, \quad D = Eh^3/(12(1-\mu^2)), \quad p_1 = p_0/\rho g,$$

$$\nabla^4 = \Delta_l^2, \quad \Delta_l = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad F = \partial^2/\partial t^2 + 2v\partial^2/\partial t\partial x + v^2\partial^2/\partial x^2,$$

ρ — плотность жидкости, E, h, ρ_1, μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q — сжимающее усилие, ζ — возвышение поверхности пластина-жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

2. Решение задачи

Применяя к (1.2)–(1.6) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y и преобразование Лапласа по времени t , получим следующее интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость:

$$\zeta = -\frac{p_1}{4\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty \int_0^t \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} r\tau^{-1} M(r) f^*(r) e^{i\Phi(r, \theta, \xi)} d\theta d\xi dr, \tag{2.1}$$

$$\tau = \sqrt{l(r)M(r)}, \quad M(r) = rg \text{th } rH(1 + \chi_1 rg \text{th } rH)^{-1}, \quad l(r) = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4,$$

$$\Phi = rR \cos(\theta - \gamma) - \xi \Delta_1, \quad \Delta_1 = vr \cos \theta - \tau, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{m^2 + n^2},$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta,$$

$f^*(r)$ — трансформанта Фурье функции $f(R)$. Отсюда для больших значений R и t найдем асимптотическое выражение для ζ при условии $Q_1 = 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости пластины [1].

Рассмотрим случай больших сжимающих усилий, удовлетворяющих условию $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Здесь $Q_0 = \tau_4(r_4)$, где

$$\tau_4 = \frac{(1 + D_1 r^4)\tau_5 + 4D_1 r^4 \tau_6}{(\tau_5 + 2\tau_6)r^2}, \quad \tau_5 = \text{th } rH + rH \text{ch}^{-2} rH, \quad \tau_6 = (1 + \chi_1 rg \text{th } rH) \text{th } rH,$$

r_4 — единственный положительный корень уравнения $\tau_4'(r) = 0$, штрих означает производную по r .

Применяя к (2.1) метод стационарной фазы [11, 12] последовательно по θ и ξ , получим

$$\zeta = -\frac{p_1}{2\pi} \text{Im} \sum_{s=1}^6 I_s + O(R^{-1}), \tag{2.2}$$

$$I_1 = \int_{r_1}^{r_2} N_1 dr, \quad 0 < \gamma < \pi/2, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_2 = \int_{n_2}^{r_2} N_1 dr, \quad \pi/2 < \gamma < \pi;$$

$$I_3 = \int_{r_1}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi/2 < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_4 = \int_{n_4}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi < \gamma < -\pi/2;$$

$$I_5 = \int_{n_1}^{n_2} N_1 dr, \quad -\pi/2 < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_6 = \int_{n_3}^{n_4} N_2 dr, \quad 0 < \gamma < \pi/2;$$

$$N_{1,2} = B_1 \exp(iR\Phi_{1,2}), \quad B_1 = M(r)f^*(r)/\nu\tau(1 - \tau_0^2)^{1/2}, \quad \nu = vt/R,$$

$$\Phi_{1,2} = (\tau_0 \cos \gamma \mp (1 - \tau_0^2)^{1/2} \sin \gamma)r, \quad \tau_0 = \tau/vr, \quad n_2 > n_1, \quad n_4 > n_3.$$

Здесь r_1, r_2 — положительные корни уравнения $\tau = vr$, а n_1, n_2 и n_3, n_4 — положительные корни уравнений $\operatorname{tg} \gamma = -\tau_1(r)$ и $\operatorname{tg} \gamma = \tau_1(r)$ соответственно, где $\tau_1 = (1 - \tau_0^2)^{1/2}/\tau_0$. Принадлежность стационарных точек области интегрирования характеризуется условием

$$0 \leq \xi_0 \leq t, \quad \xi_0 = (\tau_0(1 - \tau_0^2)^{-1/2} \sin \gamma + \cos \gamma)Rv^{-1}.$$

В интегралах I_1, I_2, I_5 стационарными точками фазовой функции Φ_1 являются корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2(r) = \tau'(1 - \tau_0^2)^{1/2}/(v - \tau_0\tau'). \quad (2.3)$$

В интегралах I_3, I_4, I_6 стационарными точками фазовой функции Φ_2 — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = -\tau_2(r). \quad (2.4)$$

Если $v_0 < v < v_1$, то уравнение (2.3) при $0 < \gamma < \pi$ имеет один действительный корень $-\alpha_2$, а при $-\gamma_2 < \gamma < 0$ два корня $-\alpha_2, \alpha_3$. Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 — действительный корень уравнения $r\tau' - \tau = 0$; $v_1 = \tau(r_5)/r_5$, где $0 < r_5 < r_6$, r_5, r_6 — действительные корни уравнения $\tau'(r) = 0$.

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то $\tau_2'(\alpha_4) = \tau_2'(\alpha_5) = 0$, $\alpha_4 < \alpha_5$.

Уравнение (2.3) имеет один $-\alpha_3$, два $-\alpha_2, \alpha_3$ или три $-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ корня при $\gamma_1 < \gamma < \pi$, $-\gamma_2 < \gamma < 0$, $0 < \gamma < \gamma_1$ соответственно.

Для $v > \sqrt{gH}$ корнями уравнения (2.3) будут: α_2, α_3 в случае $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ и α_3 — в случае $\gamma_3 < \gamma < \pi$. Причем $\tau_2'(\alpha_5) = 0$.

Аналогично определяются угловые зоны, в которых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удовлетворяют уравнению (2.4). Углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются формулами

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = -\operatorname{arctg} \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \operatorname{arctg}((v^2/gH) - 1)^{1/2}.$$

Таким образом, вычисляя I_1 – I_6 методом стационарной фазы, получим

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}), & \text{при } 0 < v < v_0; \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{при } v_0 < v < v_1; v > \sqrt{gH}; \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Причем для $v_0 < v < v_1$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < 0, R < u_2t; \\ \eta_{22}, & \text{если } 0 < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \gamma_2, R > u_2t; \gamma_2 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_{31}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \pi, R < u_3t; \\ \eta_{32}, & \text{если } -\pi < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \pi, R > u_3t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_{11}, & \text{если } 0 < \gamma < 0, R < u_1t; \\ \eta_{12}, & \text{если } -\gamma_1 < \gamma < 0, R < u_1t; \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_1t; \gamma_1 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \gamma_1, R < u_2t; \\ \eta_{22}, & \text{если } -\gamma_1 < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_2t; \gamma^* < \gamma < 2\pi - \gamma^*, \gamma^* = \max(\gamma_1, \gamma_2), \end{cases} \quad (2.9)$$

а ζ_3 определяется по формуле (2.7).

В случае $v > \sqrt{gH}$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \gamma_3, R < u_2t; \\ \eta_{22}, & \text{если } -\gamma_3 < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, R > u_2t, \gamma_3 < |\gamma| < \pi, \end{cases}, \quad (2.10)$$

а ζ_3 определяется из (2.7).

Здесь

$$\eta_{kj} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4), \quad u_k = u(\alpha_k, \gamma),$$

$$\psi_j(r) = -\frac{p_1 f^*(r) M(r)}{v\tau(2\pi(1 - \tau_0^2) |\Phi_j''|)^{1/2}}, \quad u(r, \alpha) = \frac{v(1 - \tau_0^2)^{1/2}}{\tau_0 \sin \gamma + (1 - \tau_0^2)^{1/2} \cos \gamma}.$$

3. Анализ полученного решения

Таким образом, при $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ волновое возмущение пластина-жидкость формируется, как следует из формул (2.5)–(2.10), волнами ζ_2, ζ_3 , если $v_0 < v < v_1$ или $v > \sqrt{gH}$ и волнами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, если $v_1 < v < \sqrt{gH}$.

Численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 870$ кг/м³, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $\mu = 0,34$, $H = 10^2$ м, $h = 0,2$ м.

Для $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$ значения критических скоростей будут: $v_0 = 3,1$ м/с, $v_1 = 6,7$ м/с, для $Q_1 = 1,8\sqrt{D_1}$ — $v_0 = 2,5$ м/с, $v_1 = 7,1$ м/с, для $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$ — $v_0 = 1,9$ м/с, $v_1 = 7,3$ м/с. Увеличение сжимающего усилия Q приводит к уменьшению v_0 и росту v_1 .

На рис. 1а–4а приведены фазовые портреты колебаний и их внешние границы, а на рис. 1б–4б представлены линии передних фронтов образующихся волн для различных значений сжимающих усилий.

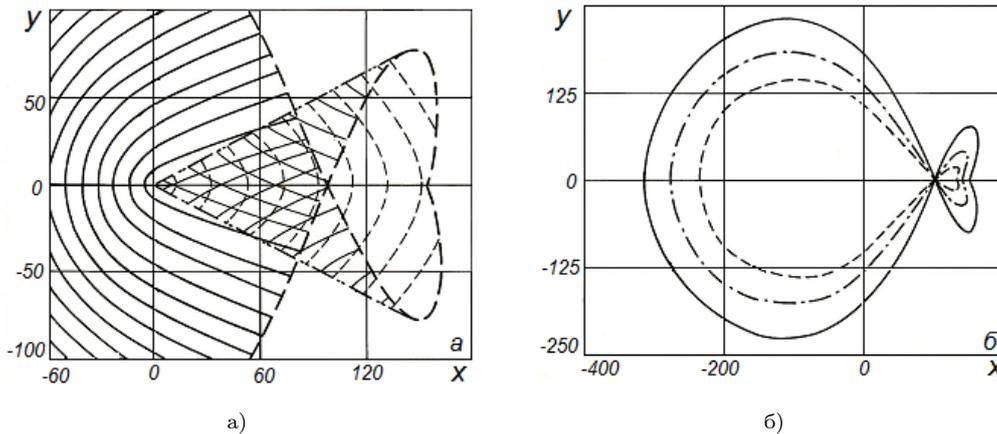


Рис. 1. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн ζ_2, ζ_3 для $v = 5$ м/с, ($v_0 < v < v_1$), $t = 20$ с;

- а) прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$;
- б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, штрихпунктирная линия $Q_1 = 1,8\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$

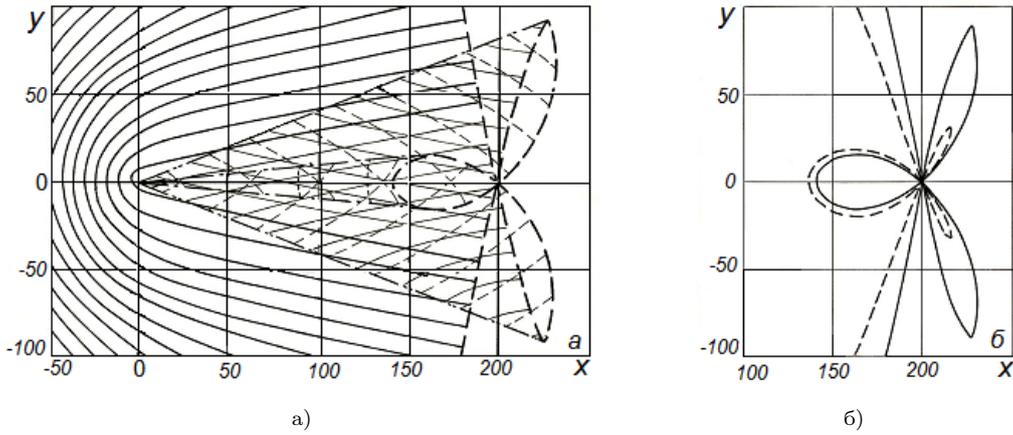


Рис. 2. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для $v = 10$ м/с, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $\gamma_1 < \gamma_2$;
 а) пунктирная линия ζ_1 , прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия γ_1 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с;
 б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с

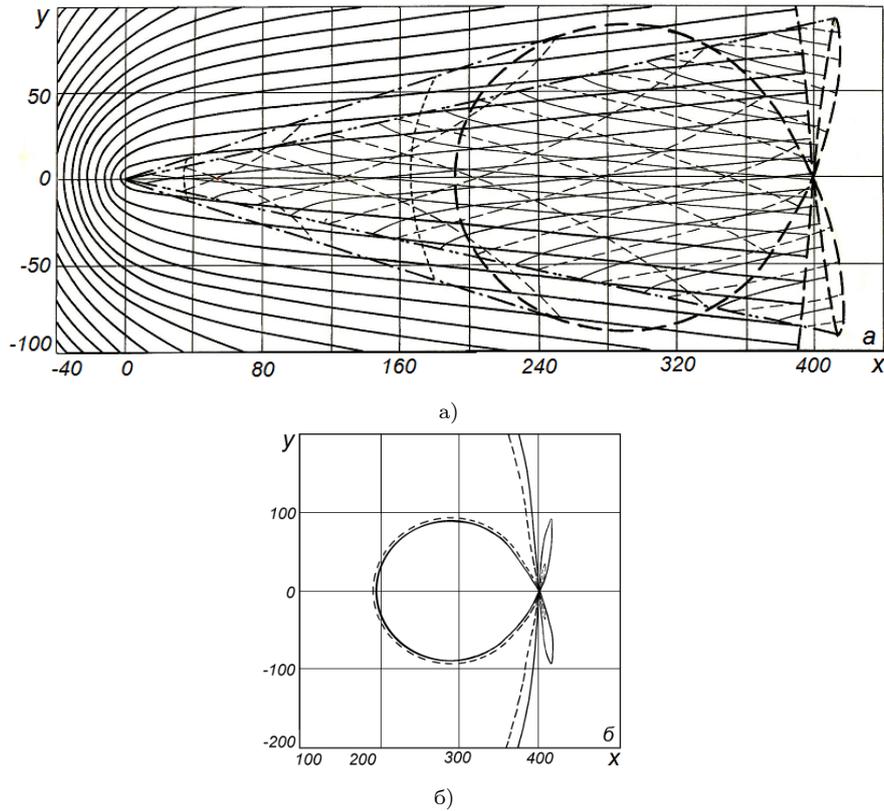


Рис. 3. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для $v = 20$ м/с, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $\gamma_1 > \gamma_2$;
 а) пунктирная линия ζ_1 , прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия γ_1 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с;
 б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с.

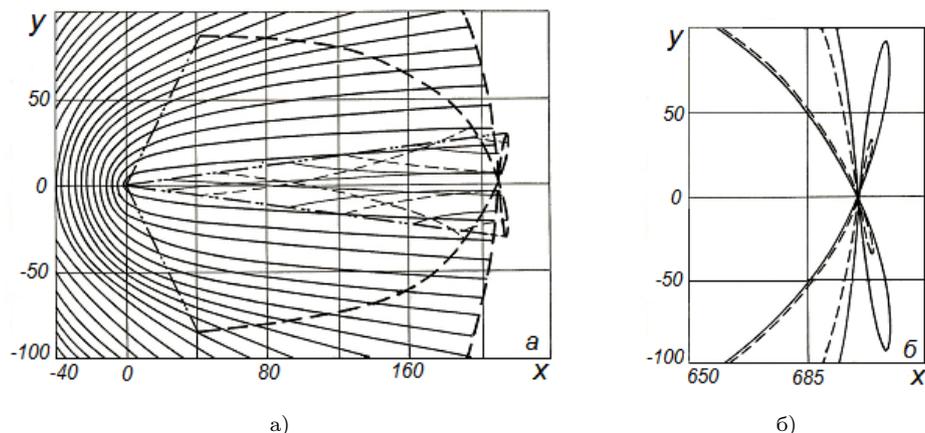


Рис. 4. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн ζ_2, ζ_3 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$);

- а) прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , штрихпунктирная линия с тремя точками γ_3 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 6$ с;
 б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с.

Упругие волны ζ_3 распространяются как перед областью давлений, так и за ней. Поперечные волны ζ_1 и продольные волны ζ_2 вместе с упругими волнами ζ_3 формируют волновой след за областью возмущений. В волновом следе левая и правая угловые зоны волн ζ_1 симметрично расположены по разные стороны от линии перемещения области. Левая и правая угловые зоны упругих волн ζ_3 , образующихся за областью возмущений, для $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ так же, как и волн ζ_2 для $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$, заходят за эту линию, частично перекрывая друг друга.

Фронтальная скорость u_3 упругих волн ζ_3 , распространяющихся впереди источника, растет с увеличением сжимающих усилий. Для волн ζ_3 , распространяющихся за источником возмущений, в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ фронтальная скорость уменьшается, причем несущественно.

Продольные волны ζ_2 при $v_0 < v < \sqrt{gH}$ распространяются в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, а при $v > \sqrt{gH}$ — в угловой зоне $-\gamma_3 < \gamma < \gamma_3$. Фронтальная скорость u_2 этих волн в волновом следе убывает с ростом сил сжатия.

Поперечные волны ζ_1 распространяются за источником в угловой зоне $-\gamma_1 < \gamma < \gamma_1$ при $v_1 < v < \sqrt{gH}$. При увеличении скорости движения источника эта зона увеличивается. Фронтальная скорость u_1 волн ζ_1 с увеличением сил сжатия незначительно возрастает.

Заключение

С увеличением сжимающих усилий и скорости перемещения источника растет область покрытая волнами. Наибольшее влияние сжимающие усилия оказывают на скорость распространения упругих волн ζ_3 и наименьшее — на продольные ζ_2 и поперечные ζ_1 волны.

За источником возмущений, для больших значений сжимающих усилий, образуется зона, в которой происходит наложение волн. Угловая зона $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, в которой происходит наложение волн, уменьшается при увеличении скорости движения источника возмущений.

Литература [References]

1. Хейсин, Д.Е., *Динамика ледяного покрова*. Ленинград, Гидрометеиздат, 1967. [Heisin, D.E., *Dinamika ledyanogo pokrova = Dynamics of the ice cover*. Leningrad, Gidrometeizdat, 1967. (in Russian)]
2. Козин, В.М., Жесткая, В.Д., Погорелова, А.В., Чижумов, С.Д., Джабраилов, М.Р., Морозов, В.С., Кустов, А.Н., *Прикладные задачи динамики ледяного покрова*. Москва, Академия Естественных наук, 2010.

2008. [Kozin, V.M., Zhestkaya, V.D., Pogorelova, A.V., Chizhiumov, S.D., Dzhabrailov, M.R., Morozov, V.S., Kustov, A.N., *Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova = Applied problems of ice cover dynamics*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2008. (in Russian)]
3. Squire, V.A., Hosking, R.J., Kerr, A.D., Langhorne, P.J., *Moving Loads on Ice Plates*. Springer Science & Business Media, 2012.
 4. Букатов, А.Е., *Волны в море с плавающим ледяным покровом*. Севастополь, ФГБУН МГИ, 2017. [Bukatov, A.E., *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom = Waves in the sea with a floating ice cover*. Sevastopol, FGBUN MGI, 2017. (in Russian)]
 5. Козин, В.М., Земляк, В.Л., Рогожникова, Е.Г., Погорелова, А.В., *Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки*. Новосибирск, Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020. [Kozin, V.M., Zemlyak, V.L., Rogozhnikova, E.G., Pogorelova, A.V., *Vliyanie ledovykh usloviy na deformirovannoe sostoyanie ledyanogo pokrova ot dvizheniya nagruzki = The influence of ice conditions on the deformed state of the ice cover from the movement of the load*. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2020. (in Russian)]
 6. Доценко, С.Ф., О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустойчивых корабельных волнах. *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*, 1978, № 5, с. 26–32. [Dotsenko, S.F., On gravitationally elastic and gravitationally capillary unsteady ship waves. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza = Proc. of the USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*, 1978, no. 5, pp. 26–32. (in Russian)]
 7. Черкесов, Л.В., *Гидродинамика волн*. Киев, Наукова думка, 1980. [Cherkesov, L.V., *Gidrodinamika voln = Hydrodynamics of waves*. Kiev, Nauchnaya Dumka, 1980. (in Russian)]
 8. Букатов, А.Е., Ярошенко, А.А., Развитие трехмерных колебаний упругой равномерно растянутой плавающей пластинки. *Динамические системы*, 1985, вып. 4, с. 72–77. [Bukatov, A.E., Yaroshenko, A.A., Development of three-dimensional vibrations of an elastic uniformly stretched floating plate. *Dinamicheskie sistemy = Dynamic systems*, 1985, iss. 4, pp. 72–77. (in Russian)]
 9. Букатов, А.Е., Ярошенко, А.А., Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости. *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*, 1984, № 6, с. 78–83. [Bukatov, A.E., Yaroshenko, A.A., The effect of a uniformly compressed floating elastic plate on the development of three-dimensional waves in a homogeneous liquid. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza = Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*, 1984, no. 6, pp. 78–83. (in Russian)]
 10. Стурова, И.В., Влияние неравномерного сжатия упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, на развитие нестационарных изгибно-гравитационных волн. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2021, № 2, с. 63–71. [Sturova, I.V., The effect of uneven compression of an elastic plate floating on the surface of a liquid on the development of unsteady bending-gravitational waves. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza = News of the Russian Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*. 2021, no. 2, pp. 63–71. (in Russian)]
 11. Федорюк, М.В., *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва, Либроком, 2020. [Fedoryuk, M.V., *Asimptotika. Integraly i ryady = Asymptotics. Integrals and series*. Moscow, Librocom, 2020. (In Russian)]
 12. Федорюк, М.В., *Метод перевала*. Москва, Ленанд, 2022. [Fedoryuk, M.V., *Metod perevala = The method of the pass*. Moscow, Lenand, 2022. (in Russian)]