



УДК 531.39

EDN: WKXRZY DOI: 10.31429/vestnik-20-1-27-32

Задача Фламана для ортотропной полуплоскости

П. Г. Великанов ^{1,2}✉, Ю. П. Артюхин ¹

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

² Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Современное машиностроение очень часто ставит задачи по расчету тонкостенных конструкций со взаимоисключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую надежность и прочность, а с другой, - легкость и экономичность. Для успешного сочетания вышеперечисленных свойств, вполне оправданным представляется использование в конструкциях ортотропных материалов и пластиков.

Известно, что существуют математические аналогии, которые позволяют для решения задач прочности, устойчивости и колебаний эффективно использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала. В рассматриваемой статье продемонстрирована возможность с использованием математических аналогий и интегрального преобразования Фурье решить задачу Фламана для ортотропной полуплоскости методом сведения ее к двум изотропным задачам.

Преобразование уравнений плоской задачи теории упругости ортотропного тела позволило понизить порядок уравнений. Преобразованные системы уравнений отличаются лишь знаками, поэтому интегрирование уравнений можно вести для одной полуплоскости. Благодаря этому объем вычислительной работы существенно уменьшился по сравнению с решением первоначальной системы уравнений.

Ключевые слова: механика, математические аналогии, задача Фламана, ортотропные пластинки, интегральное преобразование Фурье.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Задача Фламана для ортотропной полуплоскости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 27–32. EDN: WKXRZY. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-27-32

Поступила 8 сентября 2022 г. После доработки 12 января 2023 г. Принято 28 февраля 2023 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи (Великанов П.Г.), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.).

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

The Flamant Problem for an Orthotropic Half-Plane

P. G. Velikanov^{1,2}✉, Yu. P. Artyukhin¹

¹ Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia

² Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. Modern mechanical engineering very often sets tasks for the calculation of thin-walled structures with mutually exclusive properties: on the one hand, the studied structures must combine high reliability and strength, and on the other, lightness and economy. For a successful combination of the above properties, it seems quite justified to use orthotropic materials and plastics in structures.

It is known that there are mathematical analogies that allow solving problems of strength, stability and vibrations to effectively use solutions for the same type of isotropic structures to predict the behavior of the same structures made of orthotropic material. The article demonstrates the possibility of using mathematical analogies and the integral Fourier transform to solve the Flamant problem for an orthotropic half-plane by reducing it to two isotropic problems.

The transformation of the equations of the plane problem of the theory of elasticity of an orthotropic body made it possible to lower the order of the equations. The transformed systems of equations differ only in signs, so the integration of equations can be carried out for one half-plane. Due to this, the amount of computational work has significantly decreased compared to the solution of the original system of equations.

Keywords: mechanics, mathematical analogies, the Flamant problem, orthotropic plates, integral Fourier transform.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P. G., Artyukhin, Yu. P., The Flamant problem for an orthotropic half-plane. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 27–32. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-27-32

Received 8 September 2022. Revised 12 January 2023. Accepted 28 February 2023. Published 31 March 2023.

The authors declare no competing interests. The contribution of each co-author to the process of writing an article at different stages of its creation: the idea of the work (Yu.P. Artyukhin), calculations and calculations (Yu.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article (P.G. Velikanov), making edits and approving the final version (Yu.P. Artyukhin, P.G. Velikanov).

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Появление композиционных материалов существенно расширило спектр физико-механических характеристик конструкций, изготовленных из этих материалов. Большое разнообразие этих характеристик приводит к разнообразию напряженно-деформированного состояния даже для геометрически однородных конструкций. Известно, что существуют математические аналогии, позволяющие для решения задач прочности, устойчивости и колебаний эффективно использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала. В этой связи встает вопрос, нельзя ли для решения задачи Фламана для ортотропной полуплоскости использовать подобные математические аналогии для сведения решения к изотропным задачам?

1. Постановка и решение задач

В статье [1] было показано, что линейные задачи прочности ортотропных пластин и пологих оболочек путем двух аффинных преобразований координат можно свести к двум задачам для изотропных пластин и пологих оболочек. Для плоской задачи теории упругости такое сведение оказалось возможным реализовать без каких-либо ограничений на характеристики ортотропного материала. Предложенный в [1] способ решения успешно был опробован в статье [2] при решении задачи о концентрации напряжений в ортотропной пластинке с эллиптическим отверстием.

В рассматриваемой статье исследуется возможность решения задачи Фламана для ортотропной полуплоскости методом сведения к двум изотропным задачам.

Рассмотрим равновесие упругой ортотропной полуплоскости в области $(-\infty < y < 0)$ и нагруженной в начале координат наклонной сосредоточенной силой, проекции которой на оси координат обозначим через $(-T, -P)$ соответственно. Уравнения равновесия и совместности деформаций малого элемента полуплоскости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2\lambda_1 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$2\lambda_1 = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{\beta_{22}}; \quad \lambda_2 = \frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}.$$

Связь между компонентами деформированного $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \omega)$ и напряженного $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ состояний осуществляется с помощью закона Гука

$$\varepsilon_x = \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y; \quad \varepsilon_y = \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y; \quad \omega = \beta_{66}\tau_{xy},$$

коэффициенты которого выражаются через технические постоянные для тонкой пластинки

$$\beta_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad \beta_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}; \quad \beta_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad \beta_{66} = \frac{1}{\tilde{G}},$$

где E_j, ν_{ij} ($i \neq j$) — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления ($i, j = 1, 2$); \tilde{G} — модуль сдвига.

Для плоской деформации

$$\beta_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad \beta_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1}; \quad \beta_{22} = -\frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}; \quad \beta_{66} = \frac{1}{\tilde{G}}.$$

Следуя работе [1], представим уравнение совместности деформаций (1.1) в двух видах

$$\nabla_1^2 f_2 = 0; \quad \nabla_2^2 f_1 = 0, \tag{1.2}$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \quad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}; \quad y_1 = y\mu_2^{-1/2}; \quad y_2 = y\mu_1^{-1/2};$$

$$f_1 = \sigma_y + \mu_1\sigma_x; \quad f_2 = \sigma_y + \mu_2\sigma_x; \quad \mu_{1,2} = \lambda_1 \mp \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2}. \tag{1.3}$$

Обращая систему (1.3), найдем

$$\sigma_x = \frac{1}{\mu}(f_2 - f_1); \quad \sigma_y = \frac{1}{\mu}(\mu_2 f_1 - \mu_1 f_2); \quad \mu = \mu_2 - \mu_1.$$

Введем еще две новых функции S_1 и S_2 , через которые выражаются напряжения сдвига

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\mu}(S_1 + S_2). \tag{1.4}$$

Пользуясь произволом S_j ($j = 1, 2$), разделим уравнения равновесия (1.1) на две системы:

$$\frac{\partial f_1^*}{\partial x} - \frac{\partial S_1}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial y_1} + \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial f_2^*}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y_2} = 0; \quad \frac{\partial S_2}{\partial x} - \frac{\partial f_2^*}{\partial y_2} = 0, \tag{1.6}$$

где $f_1^* = \sqrt{\mu_2}f_1$; $f_2^* = \sqrt{\mu_1}f_2$.

В результате анализа уравнений оказалось, что представления уравнений совместности деформаций (1.2) являются следствиями систем уравнений (1.5), (1.6). Таким образом, задача об определении напряженного состояния ортотропной полуплоскости сведена к решению уравнений Лапласа на плоскостях (x, y_1) , (x, y_2) , граничные условия на которых являются условиями сопряжения решений, удовлетворяющих первоначальному граничному условиям. В задаче Фламана эта постановка такова: найти функции (f_j^*, S_j) ($j = 1, 2$), удовлетворяющие на полуплоскостях (x, y_j) ($j = 1, 2$) уравнениям

$$\frac{\partial f_j^*}{\partial x} \mp \frac{\partial S_j}{\partial y_j} = 0; \quad \frac{\partial S_j}{\partial x} \pm \frac{\partial f_j^*}{\partial y_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{1.7}$$

и на границе $y = y_1 = y_2 = 0$ условиям

$$\sigma_y = \frac{1}{\mu}(\sqrt{\mu_2}f_1^* - \sqrt{\mu_1}f_2^*) = -P\delta(x); \tag{1.8}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\mu} (S_1 + S_2) = -T\delta(x),$$

где $\delta(x)$ — обобщенная δ -функция Дирака [3–6].

Преобразуем уравнения (1.7) и граничные условия (1.8) с помощью интегрального преобразования Фурье [3–6] к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{f}_j^*}{dy_j^2} - \alpha^2 \bar{f}_j^* &= 0; \quad \bar{S}_j = \pm \frac{1}{i\alpha} \frac{d\bar{f}_j^*}{dy_j} \quad (j = 1, 2); \\ \sqrt{\mu_2} \bar{f}_1^*(0) - \sqrt{\mu_1} \bar{f}_2^*(0) &= -P\mu; \quad \bar{S}_1(0) + \bar{S}_2(0) = -T\mu, \end{aligned}$$

где

$$\bar{f}_j^*(y_j, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j^*(x, y_j) e^{i\alpha x} dx; \quad \bar{S}_j(y_j, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_j(x, y_j) e^{i\alpha x} dx \quad (j = 1, 2)$$

— трансформанты (изображения, образы) интегрального преобразования Фурье соответствующих функций.

В связи с затуханием решения на бесконечности трансформанты искомых функций равны

$$\bar{f}_j^*(y_j, \alpha) = c_j e^{|\alpha|y_j}; \quad \bar{S}_j(y_j, \alpha) = \pm \frac{|\alpha|}{i\alpha} c_j e^{|\alpha|y_j} \quad (j = 1, 2),$$

где

$$c_j = \pi c \left[\frac{i\alpha}{|\alpha|} r_j T - P \right]; \quad r_j = \sqrt{\mu_j} \quad (j = 1, 2); \quad c = \frac{r_1 + r_2}{\pi}.$$

Обратное интегральное преобразование Фурье [3–6] приводит к необходимости вычисления оригиналов (прообразов) вида

$$\begin{aligned} f_j^*(x, y_j) &= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i\alpha}{|\alpha|} r_j T - P \right] e^{|\alpha|y_j - i\alpha x} d\alpha \quad (j = 1, 2); \\ S_j(x, y_j) &= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[r_j T - \frac{|\alpha|P}{i\alpha} \right] e^{|\alpha|y_j - i\alpha x} d\alpha \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Разбивая бесконечную область интегрирования на два интервала $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ и заменяя в первом интеграле переменную α на $-\alpha$, преобразуем интегралы следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i\alpha}{|\alpha|} r_j T - P \right] e^{|\alpha|y_j - i\alpha x} d\alpha &= \int_0^{\infty} \{ i r_j T (e^{\alpha \bar{z}_j} - e^{\alpha z_j}) - P (e^{\alpha \bar{z}_j} + e^{\alpha z_j}) \} d\alpha; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[r_j T - \frac{|\alpha|P}{i\alpha} \right] e^{|\alpha|y_j - i\alpha x} d\alpha &= \int_0^{\infty} \{ r_j T (e^{\alpha z_j} + e^{\alpha \bar{z}_j}) + i P (e^{\alpha \bar{z}_j} - e^{\alpha z_j}) \} d\alpha, \end{aligned}$$

где $z_j = y_j + ix$; $\bar{z}_j = y_j - ix$ ($j = 1, 2$).

В связи с тем, что при $\text{Re}(\zeta) < 0$ несобственный интеграл имеет точное решение

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha \zeta} d\alpha = -\frac{1}{\zeta},$$

получим

$$\int_0^{\infty} (e^{\alpha \bar{z}_j} - e^{\alpha z_j}) d\alpha = -\frac{2ix}{x^2 + y_j^2}; \quad \int_0^{\infty} (e^{\alpha \bar{z}_j} + e^{\alpha z_j}) d\alpha = -\frac{2y_j}{x^2 + y_j^2} \quad (j = 1, 2).$$

В результате вычисления всех необходимых интегралов оригиналы (прообразы) интегрального преобразования Фурье принимают вид

$$f_j^* = c \left[\frac{r_j T x + P y_j}{x^2 + y_j^2} \right]; \quad S_j = \mp c \left[\frac{r_j T y_j - P x}{x^2 + y_j^2} \right] \quad (j = 1, 2).$$

Переходя к действительной плоскости x, y , находим искомые напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{cx^2}{L(x, y)} (r_1 r_2 x T + P y); & \sigma_y &= \frac{cy^2}{L(x, y)} (r_1 r_2 x T + P y); \\ \tau_{xy} &= \frac{cxy}{L(x, y)} (r_1 r_2 x T + P y); & L(x, y) &= y^4 + 2\lambda_1 x^2 y^2 + \lambda_2 x^4. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Полученные формулы (1.9) при $r_1 = r_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ совпадают с формулами для напряжений изотропной полуплоскости [7–9].

Если привести напряжения (1.9) к напряжениям на площадках полярной системы координат $x = r \sin \theta; y = -r \cos \theta$,

$$\sigma_r = -\frac{(u_1 + u_2)}{\pi r L(\theta)} \left[\sqrt{\beta_{11} \beta_{22}} P \cos \theta + \beta_{11} T \sin \theta \right]; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad u_i = \frac{1}{r_i} \quad (j = 1, 2),$$

где

$$L(\theta) = \beta_{11} \sin^4 \theta + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \beta_{22} \cos^4 \theta,$$

то можно заметить, что они не отличаются от выражений, приведенных в монографии Лехницкого С.Г. [10].

Преобразование уравнений плоской задачи теории упругости ортотропного тела позволяет понизить порядок уравнений. Преобразованные системы уравнений отличаются лишь знаками. Поэтому интегрирование уравнений можно вести для одной полуплоскости. Благодаря этому объем вычислений уменьшается по сравнению с решением первоначальной системы уравнений.

Заключение

В статье показано, что для решения задачи Фламана для ортотропной полуплоскости можно эффективно использовать математические аналогии для сведения решения к изотропным задачам. Так в рассматриваемой статье продемонстрирована возможность решения задачи Фламана для ортотропной полуплоскости методом сведения ее к двум изотропным задачам.

Преобразование уравнений плоской задачи теории упругости ортотропного тела позволило понизить порядок уравнений. Преобразованные системы уравнений оказались отличными лишь знаками, что позволило интегрирование уравнений вести лишь для одной полуплоскости. Благодаря этому объем вычислительной работы существенно уменьшился по сравнению с решением первоначальной системы уравнений.

Литература [References]

1. Саченков, А.В., О сведении расчета ортотропных пластин и оболочек. В *Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 11*. Изд-во КГУ, Казань, 1975, с. 180–185. [Sachenkov A.V. On the reduction of the calculation of orthotropic plates and shells. In *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Studies on the theory of plates and shells, iss. 11*, 1975, Publishing house of Kazan State University, Kazan, pp. 180–185. (in Russian)]

2. Тазюков, Ф.Х., Об одном способе расчета многосвязных ортотропных пластинок. В *Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 12*. Изд-во КГУ, Казань, 1976, с. 261–265. [Tazyukov, F.H., On one method of calculating multi-connected orthotropic plates. In *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Studies on the theory of plates and shells, vol. 12*, Publishing house of Kazan State University, Kazan, 1976, pp. 261–265. (in Russian)]
3. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. ФЭН, Казань, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Solving problems of nonlinear deformation of plates and shallow shells by the boundary elements method*. Fen, Kazan, 2002. (in Russian)]
4. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины. В *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции, 2004, ч. 3*, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. In *Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the All-Russian Scientific Conference, 2004, pt. 3*, pp. 67–71. (in Russian)]
5. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. *Актуальные проблемы механики сплошных сред, 2020*, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. *Actual problems of continuum mechanics, 2020*, pp. 105–111. (in Russian)]
6. Оконецников, А.С., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Основы теории*. Изд-во МАИ, Москва, 2019. [Okonechnikov, A.S., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov G.V., *Generalized functions in mechanics of a deformable solid. Fundamentals of theory*. Publishing House of Moscow Aviation Institute, Moscow, 2019. (in Russian)]
7. Новожилов, В.В., *Теория упругости*. Судпромгиз, Ленинград, 1958. [Novozhilov, V.V., *Theory of elasticity*. Sudpromgiz, Leningrad, 1958. (in Russian)]
8. Локтева, Н.А., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Плоские задачи теории упругости*. Изд-во МАИ, Москва, 2011. [Lokteva, N.A., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Planar problems of elasticity theory*. Publishing House of Moscow Aviation Institute, Moscow, 2011. (in Russian)]
9. Леденев В.В., Однолько В.Г., Нгуен З.Х. *Теоретические основы механики деформирования и разрушения*. Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», Тамбов, 2013. [Ledenev, V.V., Odnolko, V.G., Nguyen, Z.H., *Theoretical foundations of deformation and fracture mechanics*. Publishing house of Tambov State Technical University, Tambov, 2013. (in Russian)]
10. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Наука, Москва, 1977. [Lehnitsky, S.G., *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Nauka, Moscow, 1977. (in Russian)]