УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-3-38-46

Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных блочных элементов, имитирующих наночастицы

В. А. Бабешко[1,2]✉, **Д. А. Хрипков**[1], **В. С. Евдокимов**[2], **О. М. Бабешко**[1], **О. В. Евдокимова**[2]

[1] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
[2] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

✉ Бабешко Владимир Андреевич; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. Теория блочных элементов граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных нашла ряд приложений в сейсмологии, теории прочности и разрушения, материаловедении. Теория фракталов, разработанная Б. Мандельбротом, является еще одной областью, в которой блочные элементы могли бы выступить в качестве имитаторов наночастиц — самоподобных деформируемых объектов. В ранее опубликованных работах приводится модель самоорганизации наночастиц на основе блочных элементов. В настоящей работе рассматривается вопрос самосборки наночастиц, которые, объединяясь, формируют объекты больших размеров. В основе этого исследования лежит ранее установленное свойство блочных элементов формировать дискретное топологическое пространство. Также используется свойство, присущее деформируемым штампам, генерировать резонансы колебаний в касательной к границе слоистой среды плоскости. Перечисленные свойства позволяют моделировать самосборку наночастиц.

Ключевые слова: наночастицы, самосборка, высокочастотные резонансы, дискретный спектр, блочные элементы.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00128).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Бабешко В. А., Хрипков Д. А., Евдокимов В. С., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных блочных элементов, имитирующих наночастицы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 38–46. DOI 10.31429/vestnik-19-3-38-46

Поступила 27 августа 2022 г. После доработки 11 сентября 2022 г. Принято 17 сентября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

Construction of a Discrete Topological Self-Assembly Space for Packed Block Elements Simulating Nanoparticles

V. A. Babeshko[1,2]✉, **D. A. Khripkov**[1], **V. S. Evdokimov**[2], **O. M. Babeshko**[1], **O. V. Evdokimova**[2]

[1] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

✉ Vladimir A. Babeshko; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The theory of block elements of boundary value problems for partial differential equations has found a number of applications in seismology, strength and fracture theory, and materials science. The theory of fractals developed by B. Mandelbrot is another area in which block elements could act as simulators of nanoparticles – self-similar deformable objects. Previously published papers present a model of self-organization of nanoparticles based on block elements. In this paper, we consider the issue of self-assembly nanoparticles, which combine to form large objects. This study is based on the previously established property of block elements to form a discrete topological space. The property inherent in deformable stamps is also used to generate resonances of vibrations in a plane tangent to the boundary of the layered medium. These properties make it possible to simulate the self-assembly of nanoparticles.

Keywords: nanoparticles, self-assembly, high-frequency resonances, discrete spectrum, block elements.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00128).

The author(s) declare no competing interests.The author(s) contributed equally.

Cite as: Babeshko V. A., Khripkov D. A., Evdokimov V. S., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. Construction of a discrete topological self-assembly space for packed block elements simulating nanoparticles. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 38–46. DOI 10.31429/vestnik-19-3-38-46

Received 27 August 2022. Revised 11 September 2022. Accepted 17 September 2022. Published 12 October 2022.

Введение

В работе [1] предложена модель самоорганизации наночастиц, возникающей в связи с проявлениями высокочастотных резонансов объектов, расположенных на поверхности слоистой среды. В процессе исследования рассматривались вертикальные гармонические колебания такой блочной структуры. В то же время, по причинам сложных физико-механических процессов в микромире, существуют также и горизонтальные составляющие гармонических процессов. Косвенным свидетельством этого является возникновение броуновского движение в жидкости, состоящее в горизонтальных воздействиях на плавающие частицы, осуществляемых некоторыми микрообъектами молекулярного уровня. Допуская существование горизонтальных гармонических колебаний для деформируемых частиц, вызываемых в твердом теле тепловыми колебаниями атомных кристаллических решеток, можно таким же образом, как и в случае вертикальных колебаний, уже в системе интегральных уравнений также получить высокочастотный резонанс. Это следует из появления дискретного спектра оператора, поскольку за счет деформируемой частицы слоистая среда оказывается рельефной. Этот результат для рельефной полосы впервые был получен И.И. Воровичем [2,3] и подтвержден рядом примеров. В одной из последних работ, связанных с теорией деформируемых штампов [4], найдены аналитические уравнения для определения дискретных спектров.

В [5, 6] приведены примеры возникновения резонанса в слоистой среде при наличии на поверхности деформируемого блочного элемента. В работах по развитию механических методов прогноза землетрясений, где в качестве деформируемых штампов принимались пластины Кирхгофа, также описаны ситуации, когда встречаются дискретные спектры в задачах о горизонтальном движении литосферных плит [7]. В работах [8, 9] численными методами изучались полубесконечные и конечные пластины, авторами обнаружено явление резонанса на границе пластины, названное краевым резонансом.

Таким образом, с помощью подхода, основанного на свойствах контактных задач с деформируемым штампом, удается выявить возникновение дискретного собственного числа в контактной задаче при горизонтальных смещениях деформируемых штампов.

1. О дискретном спектре деформируемого объекта на слое

Впервые вопрос возникновения дискретного спектра оператора теории упругости в неоднородной полосе был рассмотрен академиком И.И. Воровичем в работах [2,3]. Была исследована полоса с прямолинейными границами, имеющая в ограниченной области неоднородность в виде рельефности.

В дальнейшем в монографии [10] рассматривались модели деформируемого штампа на слое в виде пружины, соединяющей два абсолютно жестких штампа. В работах [5,6] рассмотрен случай антиплоского колебания на слое прямоугольного деформируемого штампа. Исследован тот случай, когда в штампе относительно больших размеров возбуждается резонанс на частотах, на которых тонкий упругий слой заперт для возбуждаемых волн. Этот случай представляет интерес в связи с возможными приложениями. Опуская детали и рассматривая представление уравнений теории упругости в форме потенциальной и вихревой составляющих, имеем

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0.$$

Функция ϕ дает потенциальную составляющую решения, а компоненты ψ_n, $n=1,2,3$ вектора $\boldsymbol{\psi}$ — вихревую.

Исходное уравнение будет удовлетворяться, если функции находятся из уравнений

$$\Delta\phi+k_1^2\phi=0,\quad \Delta\psi_n+k_2^2\psi_n=0,\quad n=1,2,3, \tag{1.1}$$

$$k_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu},\quad k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Параметры k_1 и k_2 характеризуют фазовые скорости ωk_1^{-1} и ωk_2^{-1} продольных и поперечных волн в упругой среде.

Были построены блочные элементы для более общих, чем (1.1), уравнений, включающих также уравнения вида

$$\left[A_{11}\partial^2x_1+A_{22}\partial^2x_2+A_{33}\partial^2x_3+A\right]\phi(x_1,x_2,x_3)=0 \tag{1.2}$$

в областях, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда и различного вида пирамид. На границах областей ставятся условия Дирихле или Неймана.

Решения граничных задач отыскиваются в пространствах медленно растущих обобщенных функций. Рассмотрен случай, когда ставится граничная задача для упругого неограниченного слоя толщины h с рельефной верхней границей. Рельефность описываем упругим прямоугольным параллелепипедом, лежащим на верхней границе слоя и жестко соединенным с ним. Очевидно, такая конструкция, рассеченная по верхней границе слоя, распадается на два блока — прямоугольный параллелепипед (шестигранный блок) и слой (простейший двугранный блок). С позиции дифференциального метода факторизации такая структура — не более, чем двухслойный объект, только с большим количеством граней.

Функциональные уравнения для блока представимы в виде

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1\Phi_1=\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c}\mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{13}-i\alpha_3^1\phi_1\right)\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1+\alpha_2^1\eta_2^1\right]d\eta_1^1d\eta_2^1+\\
+\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\mathrm{A}_{11}\left(\phi'_{22}+i\alpha_1^1\phi_2\right)\exp i\left[-\alpha_1^1a+\alpha_2^1x_2^2+\alpha_3^1\left(x_1^2-b\right)\right]dx_1^2dx_2^2+\\
+\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c}\mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{33}+i\alpha_3^1\phi_3\right)\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^3+\alpha_2^1x_2^3-\alpha_3^1 2b\right]dx_1^3dx_2^3-\\
-\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\mathrm{A}_{11}\left(\phi'_{43}-i\alpha_1^1\phi_4\right)\exp i\left[\alpha_1^1a+\alpha_2^1x_2^4-\alpha_3^1\left(x_1^4+b\right)\right]dx_1^4dx_2^4+\\
+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\mathrm{A}_{22}\left(\phi'_{53}+i\alpha_2^1\phi_5\right)\exp i\left[\alpha_1^1x_1^5-\alpha_2^1c+\alpha_3^1\left(x_2^5-b\right)\right]dx_1^5dx_2^5+\\
+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\mathrm{A}_{22}\left(\phi'_{63}-i\alpha_2^1\phi_6\right)\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^6+\alpha_2^1c+\alpha_3^1\left(x_2^6-b\right)\right]dx_1^6dx_2^6.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В случае слоя имеем

$$\mathrm{K}_1\Phi_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{130}-i\alpha_3^1\phi_{10}\right)\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1+\alpha_2^1\eta_2^1\right]d\eta_1^1 d\eta_2^1+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{330}+i\alpha_3^1\phi_{30}\right)\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^3+\alpha_2^1x_2^3-\alpha_3^1h\right]dx_1^3dx_2^3. \quad (1.4)$$

Здесь ϕ'_{m3} означает производную в локальной системе координат x_1^m, x_2^m, x_3^m по переменной x_3^m, ϕ_{m3} — значение функции в системе x_1^m, x_2^m, x_3^m.

Функциональные уравнения дают эквивалентную формулировку граничных задач, но уже в терминах интегральных преобразований. Они же выявляют подлежащие факторизации функции или матрицы-функции. Введя операторы преобразования Фурье, имеем

$$\mathbf{F}\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k\right)\phi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\left(x_1^k,x_2^k\right)\exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}^k,\mathbf{x}^k\right)\right)dx_1^kdx_2^k,$$

$$[\mathbf{F}^{-1}\left(x_1^k,x_2^k\right)\Phi=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k\right)\exp\left(-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}^k,\mathbf{x}^k\right)\right)d\alpha_1^kd\alpha_2^k,\quad \left(\boldsymbol{\alpha}^k,\mathbf{x}^k\right)=\alpha_1^kx_1^k+\alpha_2^kx_2^k,$$

$$\mathbf{F}\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k,\alpha_3^k\right)\phi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\left(x_1^k,x_2^k,x_3^k\right)\exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}^k,\mathbf{x}^k\right)\right)dx_1^kdx_2^kdx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}\left(x_1^k,x_2^k,x_3^k\right)\Phi=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k,\alpha_2^k\right)\exp\left(-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}^k,\mathbf{x}^k\right)\right)d\alpha_1^kd\alpha_2^kd\alpha_3^k,\quad k=1,2,\ldots,6,$$
$$\left(\boldsymbol{\alpha}^k,\mathbf{x}^k\right)=\alpha_1^kx_1^k+\alpha_2^kx_2^k+\alpha_3^kx_3^k.$$

Псевдодифференциальные уравнения, являющиеся результатом вычисления формы-вычета Лере, описывают все возможные виды граничных условий, которые можно сформулировать для данной системы дифференциальных уравнений граничной задачи. После выбора граничных условий осуществляется переход к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениями для решения граничной задачи. В рассматриваемом случае имеем псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1,x_2^1)\left\{\ldots\right\}=0,\quad \left|x_1^1\right|\le a,\quad \left|x_2^1\right|\leqslant c\ \text{ для блока,}$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1,x_2^1)\left\{\ldots\right\}=0,\quad -\infty\leqslant x_1^1,x_2^1\le\infty\ \text{ для слоя.}$$

Многоточие в этих формулах означает выражения, стоящие в правых частях формул (1.3) и (1.4) соответственно, при замене α_3^1 на α_{3-}^1.

Подлежащие факторизации функции в левой части функциональных уравнений дают характеристические уравнения в локальных системах координат. Они имеют вид

$$K_1(\alpha_1^n,\alpha_2^n,\alpha_3^n)=\xi_{12}+A_{33}(\alpha_3^n)^2,\quad n=1,3;$$

$$K_2(\alpha_1^n,\alpha_2^n,\alpha_3^n)=\xi_{23}+A_{11}(\alpha_3^n)^2,\quad n=2,4;$$

$$K_3(\alpha_1^n,\alpha_2^n,\alpha_3^n)=\xi_{31}+A_{22}(\alpha_3^n)^2,\quad n=5,6,$$

$$\xi_{ij}=A_{ii}(\alpha_1^n)^2+A_{jj}(\alpha_2^n)^2-A.$$

Представляющие интерес корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha_{3-}^{n}(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_{33}^{-1}\xi_{12}}, \quad n = 1, 3;$$

$$\alpha_{3-}^{n}(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_{11}^{-1}\xi_{23}}, \quad n = 2, 4;$$

$$\alpha_{3-}^{n}(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_{22}^{-1}\xi_{31}}, \quad n = 5, 6.$$

Берутся те ветви аналитических функций, которые обеспечивают принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье. Находятся представления решения в каждой из введенных локальных систем координат, т.е. представление блочных элементов. Имеем

$$\phi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\mathrm{K}_1^{-1}\{\ldots\}$$

для блока.

В случае слоя имеем

$$\phi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\mathrm{K}_1^{-1}\{\ldots\}.$$

Представленные соотношения дают описание блочной структуры, отвечающей всем граничным задачам, возможным для рассматриваемой дифференциальной формы (1.2). Функции, не заданные на границе, но также входящие в псевдодифференциальные уравнения, рассматриваются как неизвестные. Для их определения псевдодифференциальные уравнения сводятся к интегральным или интегро-дифференциальным. На поверхности контакта двух блоков, в зависимости от условий контакта — жесткое сцепление, частичное сцепление, наличие трещины или включения, ставятся соответствующие граничные условия. Например, в случае жесткого сцепления блока со слоем, во всей группе уравнений блока надо принять $\phi_3 = \phi_{10}$, $\phi'_{33} = \phi'_{130}$. Система уравнений относительно неизвестных становится замкнутой.

Вопрос сопряжения принятых граничных условий с граничными условиями напряженно-деформированного состояния блочной структуры, оценки поведения решений в окрестности ребер, угловых точек и на бесконечности решается дополнительным исследованием, в ряде случаев достаточно простым.

Этапы исследования включают в себя сопряжение блоков в блочную структуру путем замены граничных условий слоя граничными условиями для блока, приближенное решение возникающего интегрального уравнения и определение из полученных соотношений параметров, обеспечивающих существование корректного решения при нулевых граничных условиях. В результате при малой относительной толщине слоя ($h \ll a$), получаются дискретные частоты блочной структуры; они описываются неравенством вида

$$k_2 \approx \pi\sqrt{(n+1/2)^2 a^{-2} + (s+1/2)^2 (b+h)^{-2}} < \frac{\pi}{2h}, \quad n, s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Видно, что при любых числах n и s всегда найдутся такие ширина a и высота b блока, при которых слой с рельефной границей будет иметь конечное число дискретных резонансных частот. Этой особенностью колебания указанной структуры отличаются от колебания ограниченного тела, имеющего счетный спектр частот.

2. О высокочастотном резонансе деформируемого штампа на слое

Рассматривается многослойная среда, на ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости [4]. Предполагается, что в области $\Omega(A \leqslant x_1 \leqslant B, |x_2| \leqslant \infty)$ действует штамп.

Например, для среды, описываемой системой уравнений Ламе, предполагается, что в зоне контакта действует жесткий штамп без трения, т. е. в зоне контакта действуют только нормальные напряжения. Вне штампа напряжения отсутствуют. Методом, описанным в [4], смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{A}^{B} k\left(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2\right) q\left(\xi_1, \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 = f\left(x_1, x_2\right), \quad A \leqslant x_1 \leqslant B,\ |x_2| \leqslant \infty,$$

$$k\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\alpha_1, \alpha_2\right) e^{-\mathrm{i}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ — контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения. Задача состоит в рассмотрении случая деформируемого штампа. Ранее указанные задачи решались только численным методом. В результате вне исследования оставались некоторые особенности решений в динамических задачах. Кроме этого, численные методы оказывались либо малоэффективными, либо несостоятельными в случаях, когда границы постановки граничных задач уходят на бесконечность или оказываются очень больших размеров. Именно для таких задач оказывается эффективным предложенный в настоящей работе метод. Он демонстрирует значительные различия, как в методе решения задачи, так и в получаемом результате в сравнении со случаем жесткого штампа. Разработанный авторами подход [4] открыл возможность использовать «фракталы», то есть упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред.

Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации фракталов. С учетом этой возможности, в качестве деформируемого штампа принимаются фракталы — решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца.

Рассматриваются два случая. Полоса вырождается в полуплоскость, случай A, и полоса имеет большую относительную ширину, случай B.

Таким образом, необходимо построить в областях $\Omega_1(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ и $\Omega_2(-B \leqslant x_1 \leqslant B,\ |x_2| \leqslant \infty)$, $B \gg 1$ упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы. Ниже рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях

$$\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2\right] \phi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2). \tag{2.1}$$

Здесь $\phi(x_1, x_2)$ — вертикальное перемещение в зоне контакта, $q(x_1, x_2)$ — контактные напряжений, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t(x_1, x_2)$ — заданные внешние воздействия сверху на объект. Кроме этого, задаются граничные условия, имеющие для задачи A в области $\Omega_1(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ вид

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(A, x_2), \quad x_1 \to A.$$

Для задачи B в области $\Omega_2(- \leqslant x_1 \leqslant B)$ граничные условия следующие

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(-B, x_2), \quad x_1 \to -B; \quad \phi(x_1, x_2) = \phi(B, x_2), \quad x_1 \to B.$$

Для обеих задач необходимо построить упакованные блочные элементы. Одна из проблем, с которой здесь приходится столкнуться, сводится к вычислению появившегося в уравнении функционала от неизвестной функции.

В работе доказана возможность их определения, чем обосновывается корректность поставленной задачи. В случае первой задачи оказывается возможным аналитически точно построить решение, которое содержит в знаменателе функции, обращающиеся в ноль при некоторых значениях параметров в случае динамической контактной задачи.

Решение принимает вид [4]

$$Q_A(\alpha_1) = \left[1 - \mathrm{N}_1(k)\right]^{-1} \mathrm{N}_2(k)\mathrm{N}_1(\alpha_1) + \mathrm{N}_2(\alpha_1). \tag{2.2}$$

Здесь

$$\mathrm{N}_1(k) = 2kP_{0+}(k)\, R_+^{-1}(k) \left\{P_{0-}(\alpha_1)\, R_-^{-1}(\alpha_1)\, (\alpha_1 + k)^{-1} e^{i(\alpha_1 - k)A}\right\}_k^+,$$

k — параметр, зависящий от частоты гармонических колебаний блочной структуры. В том случае, когда имеет место $1 - \mathrm{N}_1(k) = 0$, возникает высокочастотный резонанс в блочной структуре.

3. Высокочастотный резонанс в сейсмологии

В работе [7] рассмотрен случай горизонтального взаимодействия литосферных плит при их горизонтальном движении.

Постановка задачи предполагает встречное движение по границе Конрада гранитных литосферных плит, моделируемых пластинами Кирхгофа, лежащими на базальтовом основании. В процессе решения функциональных уравнений

$$\mathbf{X}_2^+ + \left\{\mathbf{N}_+(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{D}_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-2i\alpha_2\theta}\mathbf{X}_1^-\right\}_{\alpha_2}^+ = \left\{\mathbf{N}_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{F}_2^+(\alpha_1, \alpha_2)\right\}_{\alpha_2}^+,$$

$$\mathbf{X}_1^- + \left\{\mathbf{D}_-(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{N}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{2i\alpha_2\theta}\mathbf{X}_2^+\right\}_{\alpha_2}^- = \left\{\mathbf{D}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{F}_1^-(\alpha_1, \alpha_2)\right\}_{\alpha_2}^-,$$

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{D}_+(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{D}_-(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}_-(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{N}_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

В этой задаче, как и в работе [4], возникает проблема определения функционалов решения. При их определении из алгебраической системы уравнений формируются соотношения, подобные (2.1), (2.2), приводящие к образованию функций в знаменателе. Их нули служат для определения значений резонансных частот, подобно изложенному в [4]. Таким образом, и в случае горизонтальных колебаний в контактных задачах с деформируемым штампом также возникают резонансные явления касательного направления движения. Именно они инициируют самосборку наноматериалов, происходящую в результате многократного перемешивания горизонтально двигающихся объектов, пока на горизонтальном резонансе не произойдет взаимная состыковка границами.

4. О математической стыковке блочных элементов, как объектов наночастиц

Воспользуемся результатами работы [11], в которой показано, что блочные элементы, занимающие четыре квадранта декартовой системы координат, представляют дискретное топологическое пространство и любое их объединение также объект этого пространства. Показано, что их объединения по границам приводит к более крупным частицам, удовлетворяющим тем же уравнениям, то есть тех же свойств.

В работе [11] получены четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте. Они имеют вид

$$\phi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{\omega_n(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1\right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle,$$

$$\omega_2 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_3 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_4 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1\right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактор-топологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. Названными объединениями являются следующие объекты

$$\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2),\quad \phi_2(x_1,x_2)\cup\phi_3(x_1,x_2),\quad \phi_3(x_1,x_2)\cup\phi_4(x_1,x_2),\quad \phi_4(x_1,x_2)\cup\phi_1(x_1,x_2).$$

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полупространства. Имеем

$$\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)+\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2.$$

Отсюда

$$\omega_1+\omega_2=\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle+$$
$$+\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle.$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}},\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_2Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_1Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}},\quad \frac{\alpha_1Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, т. е. обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль всплывает при вычислении обращений преобразований Фурье при получения значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат.

Поэтому при исчезновении границы между блочными элементами, и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах, ими следует пренебрегать, так как граница исчезает. Остаются те из них, которые сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая ненужные члены, имеем

$$\omega_1+\omega_2=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)\rangle+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1-}(\alpha_1)\rangle=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)+Q_{1-}(\alpha_1)\rangle=$$
$$=\frac{\alpha_2-\alpha_{21+}}{\alpha_{21+}}Q_1(\alpha_1).$$

Это же показывается и в остальных случаях.

Вывод

Таким образом, механико-математический подход дает возможность описать явления самоорганизации и самосборки наноматериалов.

Литература [References]

1. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Об одной механической модели самоорганизации наночастиц. *МТТ*, 2022, № 6, с. 12–18. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On one mechanical model of self-organization of nanoparticles. *Mehanika tverdogo tela = Solid mechanics*, 2022, no. 6, p. 12–18. (in Russian)] DOI 10.31857/S0572329922060034

2. Ворович, И.И., Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *ДАН СССР*, 1979, т. 245, № 4, с. 817–820. [Vorovich, I.I., Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous strip. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)]

3. Ворович, И.И., Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *ДАН СССР*, 1979, т. 245, № 5, с. 1076–1079. [Vorovich I.I. Resonance properties of an elastic inhomogeneous band. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)]

4. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности.* 2022. Т. 84, №1. С. 25–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On contact problems with a deformable stamp. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and plasticity*, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. (in Russian)] DOI 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34

5. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей. *Doklady akademii nauk = Proc. of the Academy of Sciences*, 2010, т. 435, №1, с. 29–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On block elements in layered media with a relief boundary. 2010, vol.435, no. 1, pp. 29–34. (in Russian)]

6. Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., О слоистых упругих средах с рельефной границей. *Известия РАН. Прикладная математика и механика*, 2010, № 6, С. 890–894. [Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., On layered elastic media with a relief boundary. *Izvestiya RAN. Prikladnaya matematika i mekhanika = Proc. of the Russian Academy of Sciences. Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, no. 6, pp. 890–894. (in Russian)]

7. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 11, pp. 4727–4739. DOI 10.1007/s00707-018-2255-7

8. Гринченко, В.Т., Улитко, А.Ф., *Равновесие упругих тел канонической формы.* Киев, Наукова Думка, 1985. [Grinchenko, V.T., Ulitko, A.F., *Ravnovesie uprugikh tel kanonicheskoy formy = Equilibrium of elastic bodies of canonical form.* Kyiv, Naukova Dumka, 1985. (in Russian)]

9. Головчан, В.Т., Кубенко, В.Д., Шульга, Н.А., Гузь, А.Н., Гринченко, В.Т., *Динамика упругих тел.* Киев, Наукова Думка, 1986. [Golovchan, V.T., Kubenko, V.D., Shulga, N.A., Guz, A.N., Grinchenko, V.T., *Dinamika uprugikh tel = Dynamics of elastic bodies.* Kyiv, Naukova Dumka, 1986. (in Russian)]

10. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.* Москва, Научный мир, 1999. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media.* Moscow, Scientific world, 1999. (in Russian)]

11. Бабешко, В.А., Кириллова, Е.В, Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., Хрипков, Д.А., Евдокимов, В.С., Зарецкий, А.Г., О дискретизации топологических пространств блочных элементов с разными граничными условиями для трещин нового типа. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 4, с. 14–22. [Babeshko, V.A., Kirillova, E.V., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., Khripkov, D.A., Evdokimov, V.S., Zaretsky, A.G., On discretization topological spaces of block elements with different boundary conditions for cracks of a new type. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 4, pp. 14–22. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-18-4-14-22