УДК 519.7 DOI 10.31429/vestnik-19-3-25-37

Функционал гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля с краем

М. Е. Щербаков[1], **Е. А. Щербаков**✉

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Щербаков Евгений Александрович; e-mail: ko4ep@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается класс допустимых гладких выпуклых поверхностей Лиувилля с краем. В ней выводится нелинейное уравнение Бельтрами, решения которого определяют переход от произвольной изотермической параметризации к полугеодезической. С использованием теоремы о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера устанавливается возможность варьирования допустимых поверхностей с сохранением принадлежности классу допустимых поверхностей. На классе допустимых поверхностей по аналогии с осесимметрическим случаем определяется функционал гауссовой кривизны и доказывается, что его первая вариация определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

Ключевые слова: выпуклая поверхность Лиувилля с краем, изотермическая параметризация, глобальная полугеодезическая параметризация, локальная полугеодезическая параметризация, уравнение Бельтрами, квазиконформные отображения, задача Дирихле, уравнение Монжа-Ампера, гауссова кривизна, функционал гауссовой кривизны.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Щербаков М. Е., Щербаков Е. А. Функционал гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля с краем // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 25–37. DOI 10.31429/vestnik-19-3-25-37

Поступила 20 сентября 2022 г. После доработки 10 октября 2022 г. Принято 11 октября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Gaussian Curvature Functional in the Class of Convex Liouville Surfaces with Boundary

M. E. Shcherbakov, **E. A. Shcherbakov**✉

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Eugeniy A. Shcherbakov; e-mail: ko4ep@mail.ru

Abstract. In the paper, a class of regular convex and bordered Liouville surfaces is considered. We deduce the non-liner Beltrami equation whose solutions permit to transform arbitrary isothermal pameterization into semi-geodesic one. Using the well-known representations of geodesic lines of Liouville surfaces, we prove that Beltrami equation turns to be linear one. Using geodesic lines of the surface, we construct also topological mapping on the set defined by the distribution of geodesic lines. We prove that this mapping is a solution of the Beltrami equation realizing passing from isothermal parameterization to the semi-geodesic one. Applying the theorem of solvability of Dirichlet problem for Monge-Ampere equation, we prove that the admissible surfaces admit non-trivial variations leading to admissible ones. As in the case of axisymmetrical surfaces we define functional of Gauss curvature on the class of admissible surfaces and prove that its first variation for some special variations of the admissible surface is determined by its Gauss curvature.

Keywords: convex Liouville bordered surface, isothermal parameterization, global semi-geodesic parameterization, local semi-geodesic parameterization, Beltrami equation, quasiconformal mapping, Dirichlet problem, Monge-Ampere equation, Gauss curvature, functional of Gauss curvature.

Funding. The study did not have sponsorship.

The author(s) declare no competing interests.The author(s) contributed equally.

Cite as: Shcherbakov M. E., Shcherbakov E. A. Gaussian curvature functional in the class of convex Liouville surfaces with boundary. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 25–37. DOI 10.31429/vestnik-19-3-25-37

Received 20 September 2022. Revised 10 October 2022. Accepted 11 October 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

1. Постановка задачи

В работах [1–3] были определены функционалы гауссовой кривизны, заданные на осесимметрических поверхностях. С их помощью были сформулированы вариационные задачи, решения которых определяют различные равновесные формы висящих жидких капель в трёхфазной модели равновесия, в которой учитывается наличие промежуточного слоя. Такого рода подход позволяет обобщить теорию капиллярных явлений, математическое обоснование которой изложено в работе [4], на тот случай, когда, по крайней мере, один из радиусов кривизны равновесной поверхности представляет собой достаточно большую величину (этом случае классическая формула Лапласа неприменима).

Как известно, осесимметрические поверхности принадлежат к более широкому классу поверхностей, так называемых поверхностей Лиувилля.

Поверхности Лиувилля характеризуются тем, что их первая квадратичная форма при изотермической параметризации поверхности имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))\left(du^2 + dv^2\right).$$

При конструировании функционала гауссовой кривизны в классе осесимметрических поверхностей был использован тот факт, что эти поверхности допускают глобальную полугеодезическую параметризацию.

В работах [1–3], в которых было использовано локальное преобразование осесимметрической поверхности, переводящее геодезические линии в геодезические, было установлено, что сконструированные в них функционалы являются функционалами гауссовой кривизны.

Поскольку для поверхностей Лиувилля существует координатная запись геодезических линий в явном виде, то представляется возможным обобщить полученные там результаты на случай поверхностей Лиувилля.

Реализации этой программы посвящены следующие разделы работы.

2. Квазиконформные отображения и полугеодезическая параметризация поверхностей Лиувилля

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D_\Lambda$ — поверхность Λ Лиувилля с краем. Здесь D_Λ — единичный диск с центром в начале координат. Будем считать, что параметризация рассматриваемой поверхности выбрана таким образом, что её первая квадратическая форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))\left(du^2 + dv^2\right). \tag{2.1}$$

Относительно функций $\varphi\psi$ будем предполагать, что они являются непрерывно дифференцируемыми на интервале $(-1, 1)$ и непрерывными на отрезке $[-1, 1]$ положительными функциями.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Допустим, что существует глобальная полугеодезическая параметризация $r^* : D^*_\Lambda \to \to \Lambda$ рассматриваемой поверхности Лиувилля и τ, t — полугеодезические координаты. Будем считать, что $r^*(\{t = \text{const}\})$ представляют собой геодезические линии поверхности.

Пусть

$$\theta = \theta(w), \quad w = u + iv, \quad w \in D_\Lambda, \quad \theta = \tau + it$$

топологическое отображение круга D_Λ на область D^*_Λ, осуществляющее переход от изометрической параметризации к полугеодезической параметризации.

Тогда функция θ является решением сопряжённого уравнения Бельтрами

$$\theta_{\bar{w}}(w) = \frac{(\varphi(u) + \psi(v)) - J_\theta(w)}{(\varphi(u) + \psi(v)) + J_\theta(w)} \bar{\theta}_w(w). \tag{2.2}$$

Здесь $J_w(u, v)$ — якобиан преобразования $\theta = \theta(u, v)$

$$J_\theta(w) = |\theta_w|^2 - |\theta_{\bar{w}}|^2.$$

Доказательство. Пусть
$$ds^2 = d\tau^2 + G(\tau, t)dt^2, \tag{2.3}$$
представление первой квадратичной формы (2.1) в полугеодезических координатах τt.

Из очевидного равенства

$$\left[(\varphi(u) + \psi(v)) - \left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + \left[(\varphi(u) + \psi(v)) - \left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 - 2\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\tau}{\partial v}dudv =$$
$$= G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}du + \frac{\partial t}{\partial v}dv\right)^2$$

получаем,
$$(\varphi(u) + \psi(v)) - \left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2 = 0.$$
Предположим, что существует функция ω, такая, что имеют место равенства
$$\frac{\partial\tau}{\partial u} = (\cos\omega)\sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}, \quad \frac{\partial\tau}{\partial v} = (\sin\omega)\sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}. \tag{2.4}$$
Аналогичным образом получаем
$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\sin\omega\frac{\sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}}{\sqrt{G}}, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \cos\omega\frac{\sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}}{\sqrt{G}}. \tag{2.5}$$
Исключая из (2.4), (2.5) $\sin\omega$, $\cos\omega$, получим
$$\frac{\partial\tau}{\partial u}(u,v) = \sqrt{G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)}\frac{\partial t}{\partial v}(u,v), \tag{2.6}$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial v}(u,v) = -\sqrt{G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)}\frac{\partial t}{\partial u}(u,v). \tag{2.7}$$
Пусть
$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$
Используя определённые таким образом дифференциальные операторы, перепишем систему уравнений (2.6), (2.7) в комплексной форме
$$\theta_{\bar{w}}(w) = \frac{\sqrt{G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)} - 1}{\sqrt{G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)} + 1}\bar{\theta}_w(w). \tag{2.8}$$
Из соотношений (2.4), (2.5) получаем, что функция $\sqrt{G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)}$ представима в следующем виде:
$$\sqrt{G\left(\tau(u,v), t(u,v)\right)} = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{J_\theta(u,v)}. \tag{2.9}$$
Подставляя (2.9) в (2.8), получим нелинейное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\theta = \theta(u,v)$, реализующая переход от изотермической параметризации поверхности к полугеодезической
$$\theta_{\bar{w}}(w) = \frac{(\varphi(u) + \psi(v)) - J_\theta(w)}{(\varphi(u) + \psi(v)) + J_\theta(w)}\bar{\theta}_w(w). \tag{2.10}$$

Лемма доказана. □

Построим теперь в явном виде топологическое отображение $\theta = \theta(u, v)$. С этой целью заметим, что геодезические линии поверхности Лиувилля имеют вид

$$\int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}} \pm \int\limits_0^v \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}} = t, \quad t, c \in R. \tag{2.11}$$

Рассмотрим семейство геодезических, накрывающих рассматриваемую поверхность, следующего вида

$$\int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}} - \int\limits_0^v \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}} = t, \quad t, c \in R. \tag{2.12}$$

Рассмотрим также семейство ортогональных линий

$$\int\limits_0^u \sqrt{\varphi(x)+c}dx + \int\limits_0^v \sqrt{\psi(y)-c}dy = \tau. \tag{2.13}$$

Теорема 2.2. Пусть

$$C = C(u, v) = \int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}} - \int\limits_0^v \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}}, \tag{2.14}$$

$$B = B(u, v) = \int\limits_0^u \sqrt{\varphi(x)+c}dx + \int\limits_0^v \sqrt{\psi(y)-c}dy. \tag{2.15}$$

Предположим, что функции $\varphi(u) + \psi(v)$, $\sqrt{\varphi(u)+c}\sqrt{\psi(v)-c}$ не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в D_Λ. Тогда преобразование

$$\Omega := B + iC$$

осуществляет топологическое отображение круга D_Λ на область D^*_Λ, осуществляющее переход от изотермической параметризации к геодезической.

Доказательство. Заметим прежде всего, что из условий

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)+c}}, \quad C_v = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)+c}}$$

и из условий теоремы следует, что геодезические линии локально представляют собой графики дифференцируемых монотонных функций. Последнее означает также, что геодезические линии не имеют самопересечений.

Далее заметим, что рассматриваемые геодезические линии, соответствующие различным значениям t_1, t_2, не пересекаются между собой.

Действительно, из условия пересечения геодезических линий в точке (u_0, v_0)

$$\int\limits_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}} - \int\limits_0^{v_0} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}} = t_1 = \int\limits_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}} - \int\limits_0^{v_0} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}} = t_2$$

следует, что $t_1 = t_2$. Противоречие.

Аналогичным образом доказывается, что линии $B(u, v) = \tau$ не имеют самопересечений и не пересекаются между собой.

Остаётся установить, что линии $\{C(u,v)=t\}$, $\{B(u,v)=\tau\}$ пересекаются лишь в одной точке. В противном случае мы имеем

$$\int_0^{u_1}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}}-\int_0^{v_1}\frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}}=\int_0^{u_2}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)+c}}-\int_0^{v_2}\frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}}=t, \tag{2.16}$$

$$\int_0^{u_1}\sqrt{\varphi(x)+c}dx+\int_0^{v_1}\sqrt{\psi(y)-c}dy=\int_0^{u_2}\sqrt{\varphi(x)+c}dx+\int_0^{v_2}\sqrt{\psi(y)-c}dy=\tau. \tag{2.17}$$

Из условия

$$u_1<u_2 \tag{2.18}$$

в силу уравнения (2.17) следует, что

$$v_2<v_1. \tag{2.19}$$

Однако при соблюдении неравенств (2.18), (2.19) равенство (2.16) не соблюдается. Аналогичным образом доказывается невозможность неравенства $u_2<u_1$.

Следовательно, получаем

$$u_1=u_2,\quad v_2=v_1.$$

Итак, установлено, что линии $\{C(u,v)=t\}$, $\{B(u,v)=\tau\}$ определяют ортогональную сеть на рассматриваемой поверхности, а функция Ω осуществляет топологическое отображение круга D_Λ на область D^*_Λ.

Для доказательства второй части теоремы с помощью непосредственных вычислений убеждаемся в том, что функция Ω является решением уравнения (2.10).

Обратная к функции Ω функция $u(\tau,t)+iv(\tau,t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{J_\Omega(u,v)}u_\tau&=v_t;\\ -\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{J_\Omega(u,v)}v_\tau&=u_t.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Пусть $R(\tau,t):=r\left(u(\tau,t),v(\tau,t)\right)$ — новая параметризация рассматриваемой поверхности. Используя (2.20), приходим равенству

$$R^2_\tau(\tau,t)=1,\quad (\tau,t)\in D^*_\Lambda. \tag{2.21}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\langle R_t,R_\tau\rangle=\langle r_uu_t+r_vv_t,r_uu_\tau+r_vv_\tau\rangle=(\varphi(u)+\psi(v))\left(u_tu_\tau+v_tv_\tau\right)=\\ =-\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{J_\Omega(u,v)}v_\tau\frac{J_\Omega(u,v)}{\varphi(u)+\psi(v)}v_t+v_tv_\tau=0.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Соотношения (2.21), (2.22) показывают, что функция Ω осуществляет переход от изотермической к полугеодезической параметризации. Используя представление

$$J_\Omega(u,v)=\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{\sqrt{\varphi(u)+c}\sqrt{\psi(v)-c}},$$

теперь получим, что

$$G(\tau,t)=R^2_t(\tau,t)=\left(\varphi\left(u(\tau,t)\right)+c\right)\left(\psi\left(v(\tau,t)\right)-c\right). \tag{2.23}$$

Из (2.21), (2.23) получаем следующее представление для первой квадратичной формы поверхности Лиувилля в полугеодезических координатах

$$ds^2=d\tau^2+\left(\varphi\left(u(\tau,t)\right)+c\right)\left(\psi\left(v(\tau,t)\right)-c\right)dt^2.$$

Теорема доказана. $\square$

3. Класс допустимых поверхностей Лиувилля

Обозначим через L класс поверхностей Лиувилля, допускающих параметризацию, в которой первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))\left(du^2 + dv^2\right). \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi(u)$, $\psi(v)$ — дифференцируемые на отрезке $[-1, 1]$ функции, принадлежащие классу $C^{4+\alpha}([-1,1])$, $\alpha \in (0, 1)$.

Будем предполагать, что $\sqrt{\varphi(u)+c}\sqrt{\psi(v)-c}$ не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в круге $D_\Lambda = \{\{w = u + iv, |w| < 1\}\}$. Константу c, для простоты, будем считать одной и той же для всех поверхностей из L

Положим также, что рассматриваемые поверхности являются графиками функций $z = u+iv$, $w \in D_\Lambda$.

Будем считать поверхности выпуклыми, а также для простоты, будем считать выполненным следующее условие

$$\left|\left[\left(\sqrt{\psi(v)-c}\right)' - \left(\sqrt{\varphi(u)+c}\right)'\right] \frac{\sqrt{\psi(v)-c}\sqrt{\varphi(u)+c}}{\varphi(u)+\psi(v)}\right| \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Поверхности Лиувилля, удовлетворяющие поставленным условиям будем называть допустимыми поверхностями.

Теорема 3.1. Класс поверхностей, определяемых описанными свойствами, не пуст.

Доказательство. В силу предположений относительно функций φ, ψ функция $K = K(u, v)$ определяемая по формуле гауссовой кривизны по коэффициентам φ, ψ, принадлежит пространству $C^{2+\alpha}\left(\bar{G}\right)$. Воспользуемся теперь следующей теоремой [5], которую в силу её значения мы приводим в тексте нашей работы.

Пусть G — строго выпуклая область класса $C^{k+2,\alpha}$. Пусть $f \in C^{k,\alpha}\left(\bar{G}\right)$ и $f \geqslant c_0 > 0$. Тогда существует единственное решение $u \in C^{k+2,\alpha}\left(\bar{G}\right)$ задачи Дирихле

$$\det D^2 u(w) = f, \quad w \in G,$$

$$u(w) = 0, \quad w \in \partial G.$$

Из этой теоремы следует существование поверхности с заданной кривизной $K = K(u, v)$, определяемой коэффициентами φ, ψ в окрестности произвольной точки (u_0, v_0) из G. Пусть первая квадратичная форма построенной поверхности в полугеодезической параметризации имеет вид

$$dt^2 + G^*(t, \tau)\, d\tau^2.$$

В таком случае в силу инвариантности гауссовой кривизны при диффеоморфизмах мы получаем, что в окрестности точки $t = 0$ функция G соответствующая первой квадратичной форме, определяемой функциями φ, ψ, при приведении её к полугеодезической параметризации, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция G^* на каждой линии $\{\tau = \text{const}\}$.

В силу единственности решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial t^2} + K\sqrt{G} = 0$$

получаем, что функции G, G^* совпадают между собой. Функция G связана с функциями φ, ψ с помощью преобразования, определяемого функцией Ω, осуществляющей переход от изометрической к полугеодезической параметризации.

Осуществляя обратный переход, получим, что первая квадратичная форма поверхности, построенная как решение уравнения Монжа – Ампера, определяет поверхность Лиувилля.

Теорема доказана. □

4. Построение функционала гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ — произвольная параметрическая поверхность из множества L допустимых поверхностей. Пусть

$$\theta = \tau + it, \quad t = t(u,v), \quad \tau = \tau(u,v)$$

— её полугеодезическая параметризация и

$$ds^2 = d\tau^2 + G\left(\bar{r};\tau,t\right)dt^2$$

— представление её первой квадратичной формы в этих координатах. На множестве L рассмотрим функционал $K\left(\bar{r}\right)$ следующего вида:

$$K\left(\bar{r}\right) = \int\limits_{\mathrm{pr}_t\Omega(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f\left(g\left(\bar{r},\tau,t\right)\right)d\tau. \tag{4.1}$$

Здесь $\Gamma_t - t$ — сечение области $D^*_\Lambda := \Omega\left(D_\Lambda\right)$, $\mathrm{pr}_t\theta\left(D_\Lambda\right)$ — её проекция на ось τ

$$g\left(\bar{r},\tau,t\right) = \left(\sqrt{G\left(\bar{r},\tau,t\right)}\right)_\tau \tag{4.2}$$

а функция $f = f(\sigma)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\sqrt{1-\sigma^2} - \frac{df}{d\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} + f\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = -1.$$

Напомним здесь, что в случае поверхностей Лиувилля, представляющих собой осесимметрические поверхности, ранее были построены вариации этих поверхностей, на которых первая вариация функционала Ξ представляла собой линейную комбинацию гауссовой и средней кривизны.

Варьирование поверхностей при этом осуществлялось за счёт варьирования их образующих, представляющих собой их геодезические линии.

Для установления подобного результата относительно варьирования функционала Ξ в случае общих поверхностей Лиувилля поступим аналогичным образом. Построим вариацию поверхности Лиувилля в окрестности точки (u_0, v_0) с помощью вариации функций φ, ψ.

Рассмотрим функции φ^*, ψ^* следующего вида:

$$\varphi^*(u) = \varphi(u) + \varepsilon R(u), \quad \psi^*(v) = \psi(v). \tag{4.3}$$

Здесь $R(u)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в

$$\left\{(u,v):\ u_0 - \delta < u < u_0 + \delta\right\}.$$

Рассмотрим поверхности Лиувилля, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = \left(\varphi^*(u) + \psi^*(v)\right)\left(du^2 + dv^2\right). \tag{4.4}$$

Из Теоремы 3.1 следует, что класс таких поверхностей при достаточно малых $\varepsilon > 0$ не пуст.

Пусть

$$\gamma_t := \Omega^{-1}\left(\Gamma_t\right).$$

Геодезическую линию γ^*_t, соответствующую поверхности, определяемой функциями φ^*, ψ^*, и отличающуюся от геодезической линии γ_t лишь в

$$\left\{(u,v):\ u_0 - \delta < u < u_0 + \delta\right\}$$

будем разыскивать в виде

$$\int\limits_0^{u+\varepsilon P(u)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^*(x)+c}} - \int\limits_0^{v+\varepsilon Q(u)} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}} = t. \tag{4.5}$$

Здесь $P(u)$, $Q(v)$ — финитные функции, равные нулю во внешности отрезка

$$[u_0-\delta, u_0+\delta].$$

Нашей целью является нахождение таких функций P, Q, R что первая вариация функционала Ξ на геодезических вариациях вида (2.9) определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

Теорема 4.1. Пусть S — допустимая поверхность. Предположим дополнительно, что

$$\left(\sqrt{G}\right)_\tau \neq 1$$

в окрестности точки (u_0, v_0)

Тогда для произвольной бесконечно дифференцируемой финитной функции ζ

$$\operatorname{supp}\zeta \subset \{(u,v)\in D_\Lambda \,|\, u_0-\delta<u<u_0+\delta\},$$

существуют финитные непрерывно дифференцируемые функции $P(u)$, $Q(v)$, $R(u)$, носители которых содержатся в $\operatorname{supp}\zeta$, такие что первая вариация функционала K, определяемая вариациями геодезических заданной поверхности преобразованиями вида (2.9), имеет следующее представление

$$\delta K(\bar r)(\bar r) = \varepsilon \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} (K(u(\tau,t), v(\tau,t)))\zeta(u(\tau,t), v(\tau,t))\,d\tau. \tag{4.6}$$

Доказательство. Построим прежде всего полугеодезическую параметризацию проварииированной поверхности Λ^*. С этой целью определим семейство кривых на поверхности, ортогональных семейству кривых, определяемых формулой (4.5). Пусть τ^* — число, определяемое условием

$$\int\limits_0^{u+\varepsilon P(t,\tau)} \sqrt{\varphi^*(x)+c}dx + \int\limits_0^{v+\varepsilon Q(t,\tau)} \sqrt{\psi(y)-c}dy = \tau^*. \tag{4.7}$$

При фиксированном значении t параметр τ является естественным параметром кривой Γ_t, а параметр τ^* — кривой Γ_t^* в п. 1, формулами (2.12), (2.13), было установлено топологическое соответствие между параметрами (u,v) и (τ,t), устанавливающее взаимно однозначное соответствие между u и τ при фиксированном значении t. Аналогичным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между u^*, τ^*.

Ясно, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ при любой дифференцируемой функции P между u, u^* устанавливается дифференцируемый гомеоморфизм.

Лемма 4.2. Пусть

$$\varphi^*(u)+c = \varphi(u)+c+\varepsilon\sqrt{\frac{\varphi(u)+c}{\psi(v)-c}}R(\tau). \tag{4.8}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}(u,v) = \frac{\sqrt{\varphi(u)+c}}{\varphi(u)+\psi(v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial\tau}(u,v) = \frac{\sqrt{\psi(v)-c}}{\varphi(u)+\psi(v)}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau^*}(u,v) = \frac{\sqrt{\varphi^*(u)+c}}{(\varphi^*(u)+\psi(v))}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} = \frac{\sqrt{\varphi^*(u)+c}}{(\varphi^*(u)+\psi(v))}\left(\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{\sqrt{\varphi(u)+c}} - \varepsilon\frac{\partial P}{\partial \tau}\right) + o\left(\varepsilon\right), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.11}$$

$$d\tau^* = d\tau + \varepsilon\left[-\frac{R}{2\left(\varphi\left(u\right)+c\right)} + \frac{R}{\varphi(u)+\psi\left(v\right)} + \frac{\varphi(u)+\psi(v)}{\sqrt{\varphi(u)+c}}\frac{\partial P}{\partial \tau}\right]d\tau + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.12}$$

Доказательство. Для вычисления

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(u,v), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}(u,v)$$

продифференцируем (2.16), (2.17) по τ. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \sqrt{\varphi(u)+c}\frac{\partial u}{\partial \tau}(u,v) + \sqrt{\psi(v)-c}\frac{\partial v}{\partial \tau}(u,v) = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)+c}}\frac{\partial u}{\partial \tau}(u,v) - \frac{1}{\sqrt{\psi(v)-c}}\frac{\partial v}{\partial \tau}(u,v) = 0. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Из ограничений, накладываемых на функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$, получаем, что определитель системы (4.13) отличен от нуля. Разрешая эту систему, получаем (4.9).

Аналогичным образом устанавливается (4.10).

Далее

$$\frac{\sqrt{\varphi^*(u)+c}}{(\varphi^*\left(u\right)+\psi^*(v))} = \frac{\partial u^*}{\partial \tau^*} = \frac{\partial u^*}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} = \left(\frac{\sqrt{\varphi(u)+c}}{\varphi(u)+\psi(v)} + \varepsilon\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*}. \tag{4.14}$$

Из (4.14) следует (4.11), (4.12).

Лемма доказана. □

Лемма 4.3. В принятых нами обозначениях вариации функции $\sqrt{G(\tau,t)}$ и дифференциальных форм

$$\sqrt{G\left((\tau,t)\right)}d\tau, \quad g(\tau,t)d\tau$$

имеют вид

$$\sqrt{G^*\left(\tau^*(\tau),t\right)} - \sqrt{G(\tau,t)} = \frac{\varepsilon}{2}\left(R(\tau)+S(\tau)\right) + o\left(\varepsilon\right), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} g^*\left(\tau^*,t\right) - g\left(\tau,t\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial \tau}\right)d\tau + \\ + g(\tau,t)\varepsilon\left[\frac{R}{2\left(\varphi\left(u\right)+c\right)} - \frac{R}{\varphi(u)+\psi(v)} - \frac{\varphi(u)+\psi(v)}{\sqrt{\varphi(u)+c}}\frac{\partial P}{\partial \tau}\right]d\tau + o\left(\varepsilon\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Доказательство. Следует из определения $g(\tau,t)$, $g^*\left(\tau^*,t\right)$ и (4.11).

Лемма доказана. □

Лемма 4.4. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — параметризация поверхности Λ а $\bar{r}^* = \bar{r}^*(u, v)$ — поверхности Λ^*. Тогда вариация функционала K имеет вид

$$K(\bar{r}^*) - K(\bar{r}) = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int\limits_{\Gamma_t} f_g(\tau, t) \left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right) d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f_g(\tau, t)\, g \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}\right] d\tau + o(\varepsilon). \quad (4.17)$$

Доказательство. В соответствие с определением функционала K получаем

$$K(\bar{r}^*) - K(\bar{r}) = \int\limits_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g(\bar{r}^*; \tau^*, t)) d\tau^* - \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g(\bar{r}; \tau, t)) d\tau =$$

$$= \int\limits_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g^*(\tau^*, t)) d\tau^* - \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) d\tau =$$

$$= \int\limits_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int\limits_{\Gamma_t} [f(g^*(\tau^*, t)) - f(g(\tau, t))] d\tau^* + \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) [d\tau^* - d\tau] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int\limits_{\Gamma_t} f_g(\tau, t) \left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right) d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f_g(\tau, t)\, g \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}\right] d\tau + o(\varepsilon).$$

Лемма доказана. □

Для вывода уравнений для определения функций R, S заметим, что их следует подобрать таким образом, чтобы коэффициенты при функциях f, f_g, были равны коэффициентам уравнения, которому удовлетворяет функция f.

Это уравнение может быть записано в следующем виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[\left(1 - t^2\right) \frac{df}{dt} \right] + ft \right\} = -\sqrt{1 - t^2}. \quad (4.18)$$

Пусть $\zeta = \zeta(\tau, t)$ — финитная функция, заданная в окрестности точки (τ_0, t_0). В таком случае функция f удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} \dot{g}(\tau, t)\, \zeta(\tau, t)\, d\tau = - \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} \left\{ \left[\left(1 - g^2\right) \frac{df}{dg} \right] + fg \right\} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - g^2}} \zeta(\tau, t) \right) d\tau =$$

$$= - \int\limits_{pr_t\theta(D_\Lambda)} dt \int\limits_{\Gamma_t} \left\{ \left[\left(1 - g^2\right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}} \right) \frac{df}{dg} \right] + fg \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}} \right) \right\} d\tau. \quad (4.19)$$

Принимая во внимание (4.18) и (4.19), подберём коэффициенты P, Q, R так, чтобы они представляли решение следующей системы уравнений

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\psi(v)-c}{\varphi(u)+c}}R(\tau,t)\right]_{\tau}-$$
$$-g\left[\frac{[R+P+Q]\left(\tau(u,v),t(u,v)\right)}{2\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)}+\sqrt{\varphi(u)+c}\frac{\partial P}{\partial\tau}(u,v)+\sqrt{\psi(v)-c}\frac{\partial Q}{\partial\tau}(u,v)\right]=$$
$$=\left(1-g^2\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\zeta(\tau,t)}{\sqrt{1-g^2}}\right); \quad (4.20)$$

$$\left[\frac{(R+P+Q)\left(\tau(u,v),t\left(u,v\right)\right)}{2\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)}+\sqrt{\varphi(u)+c}\frac{\partial P}{\partial\tau}(u,v)+\sqrt{\psi(v)-c}\frac{\partial Q}{\partial\tau}(u,v)\right]=$$
$$=g\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\zeta\left(\tau,t\right)}{\sqrt{1-g^2}}\right), \quad (4.21)$$

$$\int\limits_0^{u+\varepsilon P(\tau,t)}\frac{dx}{\sqrt{\varphi^*(x)+c}}-\int\limits_0^{v+\varepsilon Q(\tau,t)}\frac{dy}{\sqrt{\psi(y)-c}}=t. \quad (4.22)$$

Система (4.20)–(4.22) представляет собой систему интегро-дифференциальных функциональных уравнений для трёх неизвестных функций P, Q, R.

Из уравнений (4.20)–(4.22) получаем

$$\sqrt{\frac{\psi(v)-c}{\varphi(u)+c}}R\left(\tau,t\right)=\frac{\zeta(\tau,t)}{\sqrt{1-g^2}}. \quad (4.23)$$

$$\frac{P\left(\tau,t\right)}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}-\frac{Q\left(\tau,t\right)}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}=\int\limits_0^{u(\tau,t)}\frac{R^*\left(x\right)dx}{2\left(\sqrt{\varphi(x)+c}\right)^3}.$$

Дифференцируя обе части уравнения (4.22) по τ, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial P}{\partial\tau}\right)\frac{1}{\sqrt{\varphi^*(u)+c}}-\left(\frac{\partial v}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right)\frac{1}{\sqrt{\psi^*(v)-c}}=0,$$

в котором равенство выполняется с точностью до $\circ(\varepsilon)$ Учитывая сказанное относительно коэффициентов P, Q, R, заменим $\circ(\varepsilon)$ нулём. Учитывая равенство

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}-\frac{\partial v}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}=0,$$

получим

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)+c}}-\frac{\partial Q}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\psi(v)-c}}=$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial u}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^*(u)+c}}-\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)+c}}\right)-\frac{\partial v}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi^*(v)-c}}-\frac{1}{\sqrt{\psi(v)-c}}\right)\right]=$$
$$=\frac{R}{2\left(\varphi(u)+c\right)\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)}. \quad (4.24)$$

Аналогичным образом из (4.22) получим равенство

$$\frac{P\left(\tau,t\right)}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}-\frac{Q\left(\tau,t\right)}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}=\int\limits_{0}^{u(\tau,t)}\frac{R^{*}(x)dx}{2\left(\sqrt{\varphi(x)+c}\right)^{3}}. \tag{4.25}$$

Здесь $R^{*}(x)=R(\tau(x,v),t(x,v))$.

В силу условий теоремы функция $o\left(\varepsilon\right)$ является дифференцируемой функцией. Дифференцируя (4.25) по τ, найдём

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}\frac{\partial P}{\partial\tau}(u,v)-\frac{1}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}\frac{\partial Q}{\partial\tau}(u,v)-\\&\qquad-\frac{P\left(\tau,t\right)}{2\left(\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}\right)^{3}}\frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{Q\left(\tau,t\right)}{2\left(\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}\right)^{3}}\frac{d\psi}{dv}\frac{\partial v}{\partial\tau}=\\&\qquad=\frac{1}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}\frac{\partial P}{\partial\tau}(u,v)-\frac{1}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}\frac{\partial Q}{\partial\tau}(u,v)-\\&\qquad-\frac{P\left(\left(\tau,t\right)\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}\frac{d\varphi}{du}+\frac{Q\left(\left(\tau,t\right)\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\psi(v)-c\right)}\frac{d\psi}{dv}=\\&\qquad\qquad=\frac{R\left(\left(\tau,t\right)\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Из (4.26) получаем ещё одно уравнение, связывающее неизвестные функции

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}\frac{\partial P}{\partial\tau}(u,v)-\frac{1}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}\frac{\partial Q}{\partial\tau}(u,v)-\\&\qquad-\frac{P\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}\frac{d\varphi}{du}+\frac{Q\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\psi(v)-c\right)}\frac{d\psi}{dv}=\\&\qquad\qquad=\frac{R\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Из (4.26), (4.27) следует

$$\begin{aligned}&\frac{R\left(\tau,t\right)}{2\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}-\\&\qquad+\frac{P\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}\frac{d\varphi}{du}-\frac{Q\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\psi(v)-c\right)}\frac{d\psi}{dv}=0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

В результате получаем систему из трёх уравнений для трёх неизвестных функций

$$\sqrt{\frac{\psi(v)-c}{\varphi\left(u\right)+c}}R\left(\tau,t\right)=\frac{\zeta\left(\tau,t\right)}{\sqrt{1-g^{2}}}; \tag{I}$$

$$\begin{aligned}&\frac{R\left(\tau,t\right)}{2\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}+\\&\qquad+\frac{P\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\varphi(u)+c\right)}\frac{d\varphi}{du}-\frac{Q\left(\tau,t\right)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)\left(\psi\left(v\right)-c\right)}\frac{d\psi}{dv}=0;\end{aligned} \tag{II}$$

$$\frac{P\left(\tau,t\right)}{\sqrt{\varphi\left(u\left(\tau,t\right)\right)+c}}-\frac{Q\left(\tau,t\right)}{\sqrt{\psi\left(v\left(\tau,t\right)\right)-c}}=\int\limits_{0}^{u(\tau,t)}\frac{R^{*}(x)dx}{2\left(\sqrt{\varphi\left(x\right)+c}\right)^{3}}-+o\left(\varepsilon\right),\quad\varepsilon\to0. \tag{III}$$

Разрешая полученную систему (I)–(III), эквивалентную (4.20)–(4.22), найдём функции P, Q, R, для которых первая вариация функционала K имеет вид (4.6).

Теорема доказана. □

Литература [References]

1. Shcherbakov, E., Equilibrium state of a pendant drop with inter-phase layer. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2012, vol. 31, c. 1–15. DOI 10.4171/ZAA

2. Shcherbakov, E., Shcherbakov, M., On equilibrium of the pendant drop taking into account the flexural rigidity of intermediate layer. *Doklady Physics*, 2012, vol. 53, iss. 6, pp. 243–244.

3. Shcherbakov, E.A., Shcherbakov, M.E., On equilibrium of pendant drop its flexural rigidity of intermediate layer being accounted for. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 3, pp. 87–94.

4. Финн, Р., *Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория.* Москва, Мир, 1989. [Finn, R., *Equilibrium capillary surfaces.* New York, Springer, 1986.]

5. Figalli, A., *The Monge-Ampere equation and its applications. Zurich Lectures in Advanced Mathematics.* European Mathematical Society, Zurich, 2017.