УДК 51.7 EDN: BLHMYB DOI: 10.31429/vestnik-20-1-12-18

Аспекты численного решения нестационарной задачи ветрового движения жидкости

В. С. Кочергин[1]✉, **С. В. Кочергин**[1], **С. Н. Скляр**[2]

[1] Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия
[2] Американский Университет в Центральной Азии (AUCA), ул. Аалы Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизстан

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе приведены вычислительные подходы при решении нестационарной тестовой задачи ветрового движения жидкости Экмановского типа. При интегрировании нестационарной неоднородной модели ее решение рассматривается как сумма решений стационарного неоднородного уравнения и решения однородного нестационарного аналога. Стационарное неоднородное уравнение для функции тока аппроксимируется на основе схемы Ильина и решается итерационно. Для определения переменной компоненты решения получается уравнение Соболевского типа не разрешенным относительно производной по времени.

Ключевые слова: безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение, функция тока, интегральная скорость.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н. Аспекты численного решения нестационарной задачи ветрового движения жидкости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 12–18. EDN: BLHMYB. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-12-18

Поступила 26 октября 2022 г. После доработки 3 ноября 2022 г. Принято 11 ноября 2022 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Aspects of Numerical Solution of the Unsteady Problem of Fluid Wind Motion

V. S. Kochergin[1]✉, **S. V. Kochergin**[1], **S. N. Sklyar**[2]

[1] Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia
[2] American University of Central Asia, Aaly Tokombaev str., 7/6, Bishkek, 720060, Kirgizstan

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. The paper presents computational approaches for solving the unsteady test problem of wind motion of a fluid. When integrating a non-stationary inhomogeneous model, its solution is considered as the sum of solutions of a stationary inhomogeneous equation and a solution of a homogeneous non-stationary analog. The stationary inhomogeneous equation for the current function is approximated based on the Ilyin scheme and solved iteratively. To determine the variable component of the solution, a Sobolev type equation is obtained that is not resolved with respect to the time derivative. When implementing discrete models of ocean dynamics to solve specific problems, various model calculations are most often compared with each other, based on available data on the dynamics of waters in a given area and based on the experience and preferences of researchers. The presence of an exact solution to a particular problem allows you to objectively make such a choice. In this paper, some computational approaches are proposed for solving a non-stationary problem for further comparison with the obtained analytical “exact” solution. For the unsteady problem of the Ekman type wind circulation, analytical solutions are obtained for a space-variable wind effect. A numerical implementation algorithm is constructed to find an approximate solution. The results can be used in the construction of numerical models of the dynamics of the ocean and various reservoirs.

Keywords: dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution, current function, integral velocity.

Funding. The work was carried out for the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 "Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas" (code "Coastal studies").

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Sklyar, S. N., Aspects of numerical solution of the unsteady problem of fluid wind motion. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 12–18. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-12-18

Received 26 October 2022. Revised 3 November 2022. Accepted 11 November 2022. Published 31 March 2023.

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

При реализации дискретных моделей динамики океана для решения конкретных задач чаще всего происходит сравнение различных модельных расчетов между собой, основываясь на имеющихся данных о динамике вод в данном районе и исходя из опыта и предпочтений исследователей. Наличие точного решения той или иной задачи позволяет объективно осуществить такой выбор. Используемые модели динамики океана сложны [1], поэтому точные решения существуют только для самых простых постановок [2–4]. В [5, 6] подобная задача решена на основе метода обращения динамического оператора. В работах [7, 8] рассматривается трехмерная модель, что позволяет анализировать точность вычисления вертикальной компоненты скорости. В работе [9] проанализированы различные разностные дискретизации при интегрировании уравнения для функции тока для стационарной задачи с переменным по пространству ветровым воздействием достаточно общего вида. В работе [10] получено аналитическое решение нестационарной задачи. В данной работе предлагаются некоторые вычислительные подходы для решения нестационарной задачи для дальнейшего сравнения с полученным аналитическим «точным» решением.

1. Стационарная задача в безразмерном виде

Рассмотрим поверхность водоема в плоскости xOy которая имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q] \, .$$

Постоянная глубина его $H > 0$. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом: Ox — на восток, Oy — на север, Oz — вертикально вниз. В области

$$\Omega = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in \Omega_0, \ 0 \leqslant z \leqslant H\}$$

рассмотрим уравнения стационарной модели ветровых течений

$$\begin{cases} -\ell v = -\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \ell u = -\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$t > 0, \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega},$$

с краевыми условиями

$$\left\{z = 0, \ (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0\right\}: \ k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \tag{1.2}$$

$$\left\{z = H,\ (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0\right\}:\ k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \tag{1.3}$$

$$\{0 \leqslant z \leqslant H,\ (x, y) \in \partial\Omega_0\}:\ Un_x + Vn_y = 0. \tag{1.4}$$

В (1.4) присутствуют интегральные скорости, определяемые по формулам

$$U(x, y) = \int_0^H u(x, y, z)dz, \quad V(x, y) = \int_0^H v(x, y, z)dz,$$

а в (1.3) используется параметризация придонного трения

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \tag{1.5}$$

Пусть в соответствии с [2–4]

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const}. \tag{1.6}$$

Компоненты ветрового воздействия задаются в виде

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1\cos(r_l x) + F_2\sin(r_l x)]\cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1\cos(r_s x) + G_2\sin(r_s x)]\sin(q_p y), \end{cases} \tag{1.7}$$

где приняты обозначения

$$\begin{gathered} r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q}; \\ l, s = 0, 1, 2, \ldots; \quad m, p = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных: F_1, F_2, G_1, G_2 и четыре целочисленных: l, m, s, p параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Например, при

$$\begin{gathered} F_1 = \frac{Fq}{\pi}, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -\frac{Fq}{\pi}, \quad G_2 = 0, \\ l = 0, \quad m = 1, \quad s = 1, \quad p = 1, \end{gathered} \tag{1.9}$$

имеем циклон над акваторией, именно этот вариант ветра мы используем в рамках численных экспериментов.

2. Эволюционная модель

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) в полном объеме, не предполагая ее стационарности. Задача для интегральных скоростей, как и раньше, получается, если уравнения системы (1.1) проинтегрировать по z от 0 до H, учитывая краевые условия (1.2), (1.3), (1.6), а затем перекрестным дифференцированием исключить давление P^s

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mu\right)\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial(\ell V)}{\partial y} - \dfrac{\partial(\ell U)}{\partial x} = \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} - \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ Un_x + Vn_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

В (2.1) и далее отсутствуют начальные условия, поскольку наша цель — найти широкий класс решений задачи, а начальные условия будут определятся выбором нужного решения.

Как и раньше, введем функцию тока $\Phi(x, y, t)$ по формулам (обозначения изменены, чтобы учесть стационарный случай)

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{2.2}$$

Подставив эти величины в первое уравнение из (2.1), получим

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mu\right)\left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) + \beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} - \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \Phi = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Решения задачи (2.3) будем искать в виде

$$\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y) + \Phi_0(x, y, t),$$

где $\Psi(x, y)$ — решение стационарной неоднородной задачи:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) + \beta \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} - \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \Psi = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0; \end{cases} \tag{2.4}$$

а $\Phi_0(x, y, t)$ — решение нестационарной однородной задачи:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mu\right)\left(\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2}\right) + \beta \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \Phi_0 = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

3. Численные методы решения задачи

Рассмотрим задачу (2.4) для функции тока, записав ее для произвольной правой части:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) + \beta \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \Phi(x, y), \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \\ \Psi = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Введем в $\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]$ вычислительную сетку

$$\omega_h \equiv \Big\{(x_i, y_j) \,|\, x_i = (i-1)\Delta x, \ y_j = (j-1)\Delta y; \quad i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, k}; \ \Delta x = \frac{r}{n-1}; \ \Delta y = \frac{q}{k-1}\Big\}. \tag{3.2}$$

Пусть сеточная функция $\{\Psi_{i,j}\}$, определенная на этой сетке, состоит из приближенных значений для величин $\{\Psi(x_i, y_j)\}$ — точного решения. Для определения значений $\{\Psi_{i,j}\}$ рассмотрим семейство разностных схем

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \dfrac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}\right) + \\ \qquad + \beta\left(\dfrac{1 + \theta_{i,j}}{2}\dfrac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x} + \dfrac{1 - \theta_{i,j}}{2}\dfrac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x}\right) = \Phi(x_i, y_j), \\ \qquad i = \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{2, k-1}; \\ \Psi_{i,j} = 0, \quad i, j \in \partial\omega_h, \quad \theta_{i,j} \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Здесь, $\theta_{i,j}$ — набор параметров, определяющий аппроксимацию производных $\partial\Psi/\partial x$, $\partial\Psi/\partial y$ в узле сетки (x_i, y_j). Преобразуем это семейство следующим образом:

$$\frac{\mu}{\Delta x^2}\left(1+\frac{\beta\Delta x}{2\mu}(1+\theta_{i,j})\right)\Psi_{i+1,j}+\frac{\mu}{\Delta x^2}\left(1-\frac{\beta\Delta x}{2\mu}(1-\theta_{i,j})\right)\Psi_{i-1,j}+\frac{\mu}{\Delta y^2}\left(\Psi_{i,j+1}+\Psi_{i,j-1}\right)=$$
$$=\left(\frac{2\mu}{\Delta y^2}+\frac{2\mu}{\Delta x^2}\left(1+\frac{\beta\Delta x}{2\mu}\theta_{i,j}\right)\right)\Psi_{i,j}+\Phi_{i,j};\ i=\overline{2,n-1};\ j=\overline{2,k-1}. \quad (3.3)$$

Определим величину $R\equiv\frac{\beta\Delta x}{2\mu}$ и в терминах этой величины запишем формулы (3.1). Последнюю сеточную задачу будем решать итерационно.

Параметры $\theta_{i,j}$ обычно задают как некоторые функции от числа R. В нашем случае число R — постоянная величина, поэтому семейство параметров превратится в один параметр: $\theta_{i,j}=\theta\left(R_{i,j}\right)=\theta(R)$. Функцию $\theta(R)$ можно выбирать различными способами, в частности при $\theta(R)=\mathrm{cth}(R)-1/R$ имеем схему Ильина А.М. [11], которая дала наилучшие результаты при сравнении различных аппроксимаций. При этом сеточный оператор этой системы является оператором монотонного вида [12].

Рассмотрим нестационарную задачу (2.5) для определения функции тока, переписав ее в более общей форме

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mu\right)\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\beta\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=F\left(x,y\right), & (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0,\quad t>0;\\ \Phi=0,\ (x,y)\in\partial\Omega_0,\quad t>0; & \\ \Phi\left(x,y,t\right)=\varphi\left(x,y\right), \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0\ . & \end{cases} \quad (3.4)$$

Для численного решения задачи (3.4) воспользуемся идеей предыдущего раздела, представим решение как сумму

$$\Phi(x,y,t)=\Psi(x,y)+\Phi_0(x,y,t),$$

где $\Psi(x,y)$ — решение стационарной неоднородной задачи

$$\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)+\beta\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}=F\left(x,y\right), \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0;\\ \Psi=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_0,\end{cases} \quad (3.5)$$

а $\Phi_0(x,y,t)$ — решение нестационарной однородной задачи

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\mu\right)\left(\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}\right)+\beta\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial x}=0, \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0,\quad t>0;\\ \Phi_0=0,\ (x,y)\in\partial\Omega_0,\quad t>0,\\ \Phi_0\left(x,y,0\right)=\varphi\left(x,y\right)-\Psi\left(x,y\right), \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0\ .\end{cases} \quad (3.6)$$

Решение задачи (3.5) может быть найдено методом, изложенным в [10]. Важно отметить, что эта задача решается один раз, а не на каждом шаге по времени. Остановимся на решении задачи (3.6). Предварительно преобразуем эту задачу, умножив каждое из соотношений на величину $e^{\mu t}$ (при соответствующем значении t), обозначим

$$\bar{\Phi}\left(x,y,t\right)=e^{\mu t}\Phi_0\left(x,y,t\right), \quad (3.7)$$

из (3.6) получим задачу для определения функции $\bar{\Phi}\left(x,y,t\right)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial y^2}\right)+\beta\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}=0, \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0,\quad t>0;\\ \bar{\Phi}=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_0,\quad t>0,\\ \bar{\Phi}\left(x,y,0\right)=\varphi\left(x,y\right)-\Psi\left(x,y\right), \quad (x,y)\in\overset{0}{\Omega}_0\ .\end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнение в (3.8) является уравнением Соболевского типа, или уравнением не разрешенным относительно производной по времени. Переходя к аппроксимации задачи (3.8), рассмотрим пространственную вычислительную сетку, определенную соотношениями (3.2), кроме того, будем считать, что по переменной «t» (время) задана равномерная сетка с шагом $\tau = T/M$ (решение определяем на временном интервале $[0, T]$):

$$t_m \equiv m\tau, \quad m = 0, 1, \ldots, M.$$

Приближенные значения искомой функции $\bar{\Phi}(x_i, y_j, t_m)$ в узлах вычислительной сетки будем обозначать символом $\bar{\Phi}^m_{i,j}$. Произвольной сеточной функции $\Phi = \{\Phi_{i,j}\}$ поставим в соответствие сеточную функцию $H = \{H_{i,j}\}$ — решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \dfrac{H_{i,j+1} - 2H_{i,j} + H_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = \\ \qquad = \left(\dfrac{1+\theta_{i,j}}{2} \dfrac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} + \dfrac{1-\theta_{i,j}}{2} \dfrac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} \right), \ i = \overline{2, n-1};\ j = \overline{2, k-1}; \\ H_{i,j} = 0,\ i,j \in \partial\omega_h,\ \theta_{i,j} \in [-1{,}1]\,. \end{cases}$$

Сокращенно это решение будем обозначать как результат действия оператора

$$H = H\left(\Phi\right) \ \text{или}\ H_{i,j} = H\left(\Phi\right)_{i,j}.$$

Задачу будем решать итерационным способом, каждый раз, когда необходимо найти функцию H, а параметры $\theta_{i,j} \in [-1{,}1]$ будем считать заданными по той же формуле, что и при решении задачи (3.5). Теперь, после аппроксимации по пространственным координатам, задачу (3.8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\Phi}_{i,j}}{dt} + \beta H\left(\bar{\Phi}\right)_{i,j} = 0, \quad t > 0; \quad i = \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{2, k-1}; \\ \bar{\Phi}_{i,j} = 0, \quad i,j \in \partial\omega_h, \\ \bar{\Phi}_{i,j} = \varphi\left(x_i, y_j\right) - \Psi_{i,j}, \quad t = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Или в операторной форме

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\Phi}}{dt} + \beta H\left(\bar{\Phi}\right) = 0,\ \text{в области}\ \overset{0}{\Omega}_h, \quad t > 0; \\ \bar{\Phi}_{i,j} = 0,\ \text{на границе}\ \partial\omega_h, \\ \bar{\Phi} = \varphi - \Psi,\ \text{в области}\ \omega_h, \quad t = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Систему (3.9), (3.10) предлагается решать двухстадийным методом Рунге–Кутта ($\lambda \in (0{,}1]$):

– начальные условия

$$\bar{\Phi}^0_{i,j} = \varphi\left(x_i, y_j\right) - \Psi_{i,j}, \quad i,j \in \omega_h, \quad t = 0. \tag{3.11}$$

– предиктор ($m = 1, 2, \ldots, M$)

$$y_{i,j} = \bar{\Phi}^{m-1}_{i,j} + \tau\lambda\beta H\left(\bar{\Phi}^{m-1}\right)_{i,j}, \quad i,j \in \omega_h; \tag{3.12}$$

– корректор

$$\bar{\Phi}^m_{i,j} = \bar{\Phi}^{m-1}_{i,j} + \tau\beta \left[\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) H\left(\bar{\Phi}^{m-1}\right)_{i,j} + \frac{1}{2\lambda} H\left(y_{i,j}\right) \right], \quad i,j \in \omega_h; \tag{3.13}$$

После реализации алгоритма (3.11)–(3.13) для всех $m = 1, 2, \ldots, M$ находим решение задачи (3.6) по формуле (3.7)

$$\Phi^m_0 = e^{-\mu t_m} \bar{\Phi}^m \ \text{всюду в}\ \omega_h,\ \text{при}\ m = 1, 2, \ldots, M.$$

Далее находим общее решение задачи (3.4) как сумму разностных решений стационарной и нестационарной однородной задачи. Оценку используемых разностных дискретизаций можно производить с полученными ранее в [10] аналитическими решениями поставленной задачи.

Заключение

Для нестационарной задачи ветровой циркуляции Экмановского типа получены аналитические решения при переменном по пространству ветровом воздействии. Построен алгоритм численной реализации для нахождения приближенного решения. Результаты могут быть использованы при построении численных моделей динамики океана и различных водоемов.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана.* Наука, Москва, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie cirkulyacii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation.* Nauka, Moskva, 1988. (in Russian)]
2. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
3. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description.* University of California Press, 1965.
4. Стоммел, Г., *Гольфстрим.* Москва, ИЛ, 1965. [Stommel, G., *Gulfstream = Gulfstream.* Moscow, Inostrannaya Literatura, 1965. (in Russian)]
5. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.* Севастополь, Экоси-Гидрофизика, 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins.* Sevastopol, Ekosi-Gidrofizika, 2002. (in Russian)]
6. Kochergin, V.P., Dunets, T.V., Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.
7. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. In: Chaplina, T.O, (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume I.* Springer Geology. Springer, Cham., 2020, pp. 17–25. DOI: 10.1007/978-3-030-38177-6_3
8. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows. In: Chaplina T.O. (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume II.* Springer Geology. Springer, 2021, pp. 65–71. DOI: 10.1007/978-3-030-53521-6_9
9. Кочергин, В.С., Кочергин, В.С., Скляр, С.Н., Тестирование разностных схем при решении уравнения для функции тока на основе решения задачи ветровых течений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 2, с. 53–61. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Testing of difference schemes in solving the equation for the streem function based on solving the problem of wind currents. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 19, no. 2, pp. 53–61. (in Russian)] EDN: EBWSAI DOI: 10.31429/vestnik-19-2-53-61
10. Кочергин, В.С., Кочергин, В.С., Скляр, С.Н., Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 16–25. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the equation for the stream function in the model of flows with spatially variable wind action. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 19, no. 1, pp. 16–25. (in Russian)] EDN: XAPDKT DOI: 10.31429/vestnik-19-1-16-24
11. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Il'in, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Math notes*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)]
12. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* Москва, Мир, 1983. [Dulan, E., Miller, Dzh., Shilders, U., *Uniform numerical methods for solving problems with a boundary layer.* Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]