

УДК 532.5:539.3

EDN: YALICI DOI: 10.31429/vestnik-20-1-41-51

## Неустановившиеся трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимися возмущениями переменной интенсивности

А. А. Ярошенко <sup>1,2</sup>✉, Ж. В. Маленко <sup>1,2</sup><sup>1</sup> Севастопольский государственный университет, ул. Университетская, 33, Севастополь, 299053, Россия<sup>2</sup> Филиал «Государственного морского университета имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Севастополь, ул. Героев Севастополя, 11, корпус 8/22, Севастополь, 299009, Россия

✉ Ярошенко Александр Александрович; ORCID 0000-0002-6471-0162; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

*Аннотация.* В работе проводится исследование колебаний плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений переменной интенсивности. В основу колебаний плавающего ледяного покрова положены линеаризованные уравнения гидромеханики и линейная классическая теория колебаний пластин. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая изотропная пластинка. Определены значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения как впереди источника возмущений, так и за ним. Исследована зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника. Показано, что таких значений критических скоростей будет шесть. Приводятся фазовые портреты образующихся волн для различных диапазонов скорости перемещения источника и частоты его колебаний, а также фронты образующихся волн. Показано, что в зависимости от скорости перемещения источника и частоты его колебаний образуется от одной до семи систем волн. Определены угловые зоны, в которых образуются эти волны.

*Ключевые слова:* изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, ледяной покров, критическая скорость.

*Финансирование.* Исследование не имело спонсорской поддержки.

*Цитирование:* Ярошенко А. А., Маленко Ж. В. Неустановившиеся трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимися возмущениями переменной интенсивности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 41–51. EDN: YALICI. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-41-51

Поступила 10 ноября 2022 г. После доработки 21 декабря 2022 г. Принято 21 марта 2023 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

## Unsteady Bending-Gravity Waves in the Sea with Ice Cover Caused by Moving Disturbances of Variable Intensity

А. А. Yaroshenko<sup>1,2</sup>✉, Zh. V. Malenko<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Sevastopol State University, Univesitetskaya st., 33, Sevastopol, 299053, Russia<sup>2</sup> Branch of “Admiral F.F. Ushakov State Maritime University” in Sevastopol, Heroes of Sevastopol st., 11, housing 8/22, Sevastopol, 299009, Russia

✉ Aleksandr A. Yaroshenko; ORCID 0000-0002-6471-0162; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

*Abstract.* In winter, most of the rivers and lakes of the northern regions of Russia are covered with ice. This makes navigation difficult. To prolong navigation, hovercrafts are used, which, moving at a certain speed, destroy the ice cover. On the other hand, the ice cover of rivers and lakes is used to organize crossings and delivery of various cargoes along them. Therefore, it is important to know the values of the critical velocities at which the destruction of the floating ice sheet occurs.

The paper investigates the development of three-dimensional bending-gravity waves generated by a moving source of variable intensity. The ice cover is modeled by a thin elastic isotropic plate floating on the surface of an ideal incompressible fluid of finite depth. Methods of integral Fourier and Laplace transformations are used to solve the problem. The resulting integral representation for the elevation of the plate-liquid surface is investigated by the stationary phase method for multidimensional integrals.

The values of critical velocities at which the nature of the wave disturbance changes both in front of the source of disturbances and behind it, are determined. The dependence of critical velocities on the oscillation frequency of the source is investigated. It is shown that there will be six such values of critical velocities. In the absence of source oscillations, there are three values of critical velocities.

Phase portraits of the generated waves for different ranges of the source velocity and frequency of its oscillations, as well as the fronts of the generated waves are given. It is shown that depending on the velocity of the source and the frequency of its oscillations, from one to seven wave systems are formed. The angular zones in which these waves are formed are determined.

*Keywords:* bending-gravitational waves, elastic plate, ice cover, critical speed.

*Funding.* The study did not have sponsorship.

*Cite as:* Yaroshenko, A. A., Malenko, Zh. V., Unsteady bending-gravity waves in the sea with ice cover caused by moving disturbances of variable intensity. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 41–51. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-41-51

Received 10 November 2022. Revised 21 December 2022. Accepted 21 March 2023. Published 31 March 2023. The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

В районах Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока большинство рек и озер в зимний период покрывается ледяным покровом. Возникает необходимость разрушения ледяного покрова для продления навигации. Для этих целей используются суда на воздушной подушке (СВП), которые, двигаясь с определенной скоростью (критической скоростью), создают изгибно-гравитационные волны, способные разрушать ледяной покров. Возникает необходимость в исследовании режимов движения СВП. С другой стороны ледяной покров рек и озер используют для организации переправ и доставки по ним различных грузов. Поэтому важно знать значения критических скоростей, при которых происходит разрушение ледяного покрова.

Работа Хейсина Д.Е. [1] является одной из первых основополагающих работ, посвященных динамике ледяного покрова. В книге изложена математическая теория волновых процессов в ледяном покрове, плавающем на поверхности жидкости. Ряд параграфов посвящен исследованиям колебаний ледяного покрова при перемещении по нему нагрузки.

Теория распространения трехмерных изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых движущимися источниками возмущений, свое дальнейшее развитие получила в работах Доценко С.Ф. [2], Букатова А.Е. [3], Козина В.М. и его учеников [4–6]. Кроме теоретических исследований Козиним В.М. и его учениками выполнен большой объем экспериментальных работ, посвященных исследованию колебаний ледяного покрова, вызванных движением различного рода объектов. Среди зарубежных работ следует отметить книгу Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. [7], в которой обобщены работы зарубежных авторов.

В работе [8] исследуются трехмерные изгибно-гравитационные волны, возникающие в плавающей на поверхности жидкости упругой пластине, по поверхности которой перемещаются гармонически меняющиеся со временем давления. В [9] исследуются колебания ледяного покрова от периодического изменения давления в подушке СВП. Ледяной покров моделируется вязкоупругой изотропной пластиной, которая описывается моделью Кельвина–Фойта. Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния ледяного покрова. В настоящей работе проводится исследование влияния частоты колебаний движущегося источника на значения критических скоростей, количество образующихся волн, угловые зоны распространения этих волн и их фронты.

## 1. Постановка задачи

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины  $H$  плавает сплошной ледяной покров, по поверхности которого перемещается нагрузка переменной интенсивности

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const.} \quad (1.1)$$

Исследуем развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимся источником возмущений (1.1). Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой толщины  $h$ , плавающей на поверхности жидкости. Полагаем, что до начала действия возмущений жидкость не возмущена и граница поверхности пластина – жидкость горизонтальна.

Считая движение жидкости потенциальным, в рамках линейной теории в системе координат  $x_1, y$  связанной с движущейся со скоростью  $v$  областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (1.2)$$

со следующими граничными, начальными и кинематическим условиями:

$$\begin{aligned} D_1\nabla^4\zeta + Q_1\Delta_l\zeta + \chi_1F\zeta + \zeta + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{1}{g} &= \frac{p}{\rho g} \text{ при } z = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H, \quad \varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) &= 0, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - v\frac{\partial\zeta}{\partial x} \text{ при } z = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \\ \nabla^4 = \Delta_l^2, \quad \Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

$\rho$  – плотность жидкости,  $E, h, \rho_1, \mu$  – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, соответственно,  $Q$  – сжимающее усилие,  $\zeta$  – возвышение поверхности пластина – жидкость. Здесь и далее у  $x_1$  опущен индекс 1.

## 2. Решение задачи

Применяя для решения задачи (1.1)–(1.3) метод интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам  $x, y$  и Лапласа по времени  $t$  для возвышения поверхности пластина – жидкость получим

$$\zeta = \frac{p_0}{8\pi^2\rho g} e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dm dn, \quad (2.1)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1\Delta_2} - \frac{1}{\tau\Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau\Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad (2.2)$$

$$r = (m^2 + n^2)^{1/2}, \quad \Delta_j = \sigma + vm + \delta_j\tau, \quad \delta_j = (-1)^j, \quad j = 1, 2,$$

$$\tau(r) = (l(r)M(r))^{1/2}, \quad l(r) = 1 + Q_1r^2 + D_1r^4,$$

$$M(r) = rg(1 + \chi_1rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH,$$

$f^*(m, n)$  – трансформанта Фурье функции  $f(x, y)$ . Первое слагаемое в выражении (2.2) описывает установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Преобразуем (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right), \\ i(1 - e^{-i\Delta_j t})/\Delta_j &= - \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi. \end{aligned}$$

После перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений (1.1) выражение (2.1) для  $\zeta$  примет вид

$$\zeta = -\frac{p_0}{8\pi^2\rho g} \operatorname{Im}(e^{i\sigma t}(J_1 - J_2)), \quad (2.3)$$

$$J_j = \int_0^\infty \int_0^t \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{r f^*(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i(rR \cos(\theta-\gamma) - \Delta_j \xi)} d\theta d\xi dr,$$

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma,$$

$$m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta.$$

### 3. Анализ полученного решения

Асимптотическое исследование выражения (2.3) для  $\zeta$  при больших значениях  $R$  и  $t$  выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов [10, 11]. Стационарные точки  $(r, \theta, \xi)$  для  $J_j$  удовлетворяют системе уравнений

$$R = \cos(\theta - \gamma) - (v \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad v \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad (3.1)$$

$$\sigma + \delta_j \tau + vr \cos \theta = 0. \quad (3.2)$$

Здесь штрих означает производную по  $r$ .

Уравнение (3.2) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma) / vr \quad (3.3)$$

при  $|\tau_j| \leq 1$ . После подстановки (3.3) в (3.1) получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \chi_j(r), \quad \chi_j = \tau'(1 - \tau_j^2)^{1/2} (v - \tau_j \tau')^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\xi = R/u_j, \quad u_j = (v - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma. \quad (3.5)$$

Из (3.4) определяются значения  $r$ , соответствующие стационарным точкам интегралов  $J_j$  в установившемся и неустановившемся режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием  $0 \leq \xi \leq t$ . Это условие и соотношение (3.5) характеризуют распространение колебаний.

Из анализа поведения функций  $\chi_j(r)$  следует, что число положительных корней  $\alpha_{ij}$  уравнений (3.4) зависит от скорости  $v$  перемещения давлений, частоты колебаний  $\sigma$  источника и величины угла  $\gamma$ . В табл. 1, 2 приведены системы волн  $\zeta_{ij}$  в зависимости от скорости перемещения источника и частоты его колебаний, а также угловые зоны, в которых распространяется каждая из волн. Вследствие симметрии волнового движения относительно оси  $x$  в таблицах рассмотрены величины  $\gamma$  из диапазона  $0 \leq \gamma \leq \pi$ .

Здесь

$$\sigma_0 = (\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2)) (\beta_2 - \beta_1)^{-1},$$

$$v_{01} = \tau_5(\beta_2), \quad v_{02} = \tau_5(\beta_1), \quad v_{03} = \tau_6(\beta_3),$$

$$v_{11} = (\tau_7(\beta_4))^{1/2}, \quad v_{12} = (\tau_8(\beta_6))^{1/2}, \quad v_{10} = (\tau_9(\beta_8))^{1/2},$$

$$\tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma) / r, \quad \tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau' / \tau'', \quad \tau_8 = \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau' / \tau'', \quad \tau_9 = \tau_5 \tau',$$

$$\beta_k \quad (k = 1, \dots, 9)$$

являются корнями уравнений

$$\tau_5'(\beta_{1,2}) = 0, \quad \tau_6'(\beta_3) = 0, \quad \chi_1''(\beta_{4,5}) = 0, \quad \chi_2''(\beta_{6,7}) = 0, \quad \tau_9'(\beta_{8,9}) = 0,$$

Таблица 1. Системы изгибно-гравитационных волн  $\zeta_{1j}$

Table 1. Flexural gravity wave systems  $\zeta_{1j}$

$\sigma$	$v$	$\gamma$	$\zeta_{1j}$
$0 < \sigma < \sigma_0$	$0 < v < v_{01}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{14}$
	$v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{13}, \zeta_{14}$
	$v_{11} < v < v_{02}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$	$\zeta_{11}, \zeta_{14}$
		$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$	$\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$
		$\gamma_1 \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{13}, \zeta_{14}$
	$v > v_{02}$ ( $v_{02} < v < v_{10}, v > v_{10}$ )	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$	$\zeta_{14}$
		$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	$\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$
$\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$		$\zeta_{13}$	
$\sigma > \sigma_0$	$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{14}$
	$v > v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$	$\zeta_{14}$
		$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	$\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$
		$\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{13}$

Таблица 2. Системы изгибно-гравитационных волн  $\zeta_{2j}$

Table 2. Systems of flexural-gravity waves  $\zeta_{2j}$

$\sigma$	$v$	$\gamma$	$\zeta_{2j}$
$\sigma > 0$	$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{23}$
	$v > v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_{22}$	$\zeta_{21}$
		$\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	$\zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}$
		$\gamma_{11} \leq \gamma \leq \pi$	$\zeta_{23}$

где  $\beta_1 < \beta_2, \beta_4 < \beta_5, \beta_6 < \beta_7, \beta_8 < \beta_9, r_1 < r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4, r_5 < \beta_3 < r_6, r_k, (k = 1, \dots, 4)$  — положительные корни уравнения  $1 - \tau_1^2 = 0$ , а  $r_{5,6}$  — уравнения  $1 - \tau_2^2 = 0$ .

Размеры угловых зон определяются величинами углов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$ :  $\gamma_1 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$ , если  $v_{11} < v < v_{02}$ ,  $\gamma_3 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$ , если  $v > v_{02}$ ,  $\gamma_2 = \arctg \chi_1(\alpha_2)$ ,  $\gamma_{11} = \arctg \chi_2(\alpha_3)$ ,  $\gamma_{22} = \arctg \chi_2(\alpha_4)$ ,  $\alpha_k (k = 1, \dots, 4)$  — корни уравнений  $\chi_1'(\alpha_{1,2}) = 0, \chi_2'(\alpha_{3,4}) = 0, \alpha_1 < \alpha_2, \alpha_3 < \alpha_4$ .

Каждый корень  $\alpha_{jk}$  уравнений (3.4) характеризует систему волн  $\zeta_{jk}$  вида

$$\zeta_{jk} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_{jk}) \cos(R\varphi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk}\pi/4) + O(R^{-1}),$$

$$\psi_j = -\frac{p_0}{\rho g} f^*(r) M(r) ((1 - \tau_j^2)\tau v)^{-1} (2\pi |\varphi_j'|)^{-1/2},$$

$$\varphi_j = \delta_j r ((1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma),$$

$$j = 1, \quad k = 1, \dots, 4;$$

$$j = 2, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\delta_{jk} = (-1)^{j+k}, \quad k \neq 4, \quad \delta_{14} = 1.$$

Волны образуются в областях  $R < u_{jk}t, u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$  угловых зон, соответствующих диапазону изменения скорости перемещения источника возмущений.

При  $0 < \sigma < \sigma_0$  для  $\alpha_{1k}$  справедливы следующие оценки:

$$-r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ для } 0 < v < v_{01}; r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v_{01} < v < v_{11};$$

$$-r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v_{11} < v < v_{02};$$

$$-r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v > v_{02}.$$

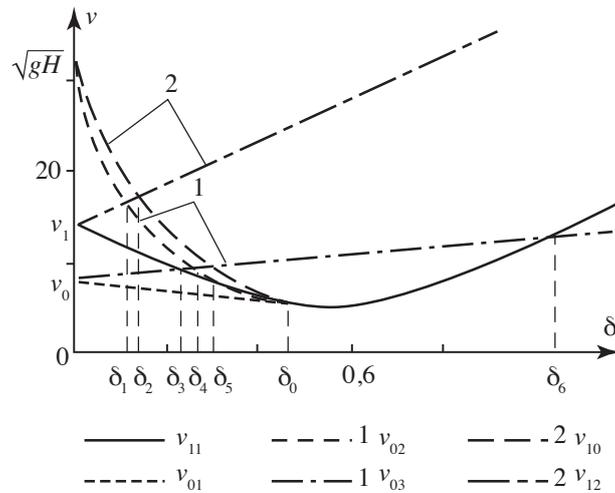


Рис. 1. Зависимость критических скоростей от частоты: пунктирная линия —  $v_{01}$ , прерывистая линия 1 —  $v_{02}$ , штрихпунктирная линия 1 —  $v_{03}$ , прерывистая линия 2 —  $v_{10}$ , сплошная линия —  $v_{11}$ , штрихпунктирная линия 2 —  $v_{12}$

Fig. 1. Dependence of critical speeds on frequency: short-dashed line —  $v_{01}$ , dashed line 1 —  $v_{02}$ , dash-dotted line 1 —  $v_{03}$ , long-dashed line 2 —  $v_{10}$ , solid line —  $v_{11}$ , dash-dotted line 2 —  $v_{12}$

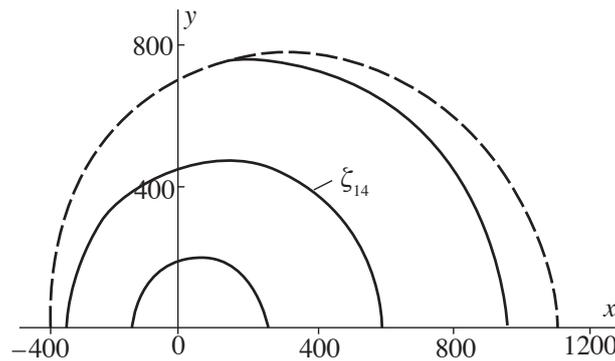


Рис. 2. Линии равной фазы волны  $\zeta_{14}$ ;  $v = 5$  м/с ( $0 < v < v_{01}$ ),  $\sigma = 0,3$  с $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  с

Fig. 2. Lines of equal phase of  $\zeta_{14}$  wave;  $v = 5$  m/s ( $0 < v < v_{01}$ ),  $\sigma = 0,3$  s $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

При  $\sigma > \sigma_0$  для  $\alpha_{1k}$  справедливы следующие оценки:

- $r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2$  для  $0 < v < v_{11}$ ;
- $r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2$  для  $v > v_{11}$ .

При  $\sigma > 0$  для  $\alpha_{2k}$  справедливы следующие оценки:

- $r_5 \leq \alpha_{23} \leq r_6$  для  $v_{03} < v < v_{12}$ ;
- $r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq r_6$  для  $v > v_{12}$ .

На рис. 1 приведены зависимости критических скоростей перемещения области возмущений от частоты колебаний. Для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости:  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м $^2$ ,  $\rho = 870$  кг/м $^3$ ,  $\rho_1 = 10^3$  кг/м $^3$ ,  $\mu = 0,34$ ,  $H = 10^2$  м,  $h = 0,2$  м,  $Q = 0$ .

Критические скорости  $v_{03}$  и  $v_{12}$  растут при увеличении  $\sigma$ , а скорости  $v_{01}$ ,  $v_{02}$  и  $v_{10}$  — убывают. Критическая скорость  $v_{11}$  имеет минимум. В окрестности этих скоростей меняется характер волнового возмущения. При  $\sigma = 0$ :  $v_{01} = v_{03} = v_0$ ,  $v_{11} = v_{12} = v_1$ ,  $v_{10} = v_{02} = \sqrt{gH}$ .

На рис. 2–10 представлены фазовые портреты образующихся волн  $\zeta_{jk}$  ( $j = 1, k = 1-4$ ;  $j = 2, k = 1-3$ ), количество которых зависит от скорости перемещения источника возмущений и его

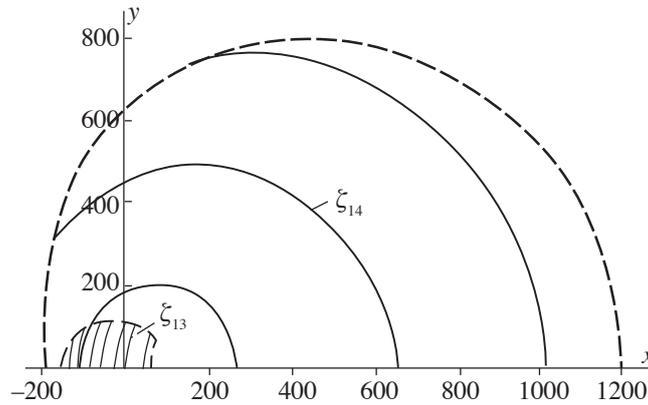


Рис. 3. Линии равной фазы волн  $\zeta_{13}$  и  $\zeta_{14}$ ;  $v = 7$  м/с ( $v_{01} < v < v_{11}$ ),  $\sigma = 0,3$  с<sup>-1</sup> ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  с

Fig. 3. Lines of equal phase of  $\zeta_{13}$  and  $\zeta_{14}$  waves;  $v = 7$  m/s ( $v_{01} < v < v_{11}$ ),  $\sigma = 0,3$  s<sup>-1</sup> ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

частоты колебаний. Передние фронты этих волн перемещаются со скоростью  $u_{jk}$  (пунктирная линия на рисунках).

При движении области давлений (1.1) может возбуждаться от одной до семи систем волн с амплитудами затухания как  $R^{-1/2}$  (3.6). Эти волны формируют колебания пластинки и волновое движение жидкости как перед областью давлений, так и за ней

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_{14}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_0, 0 < v < v_{01}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, 0 < v < v_{11}; \sigma > \sigma_6, 0 < v < v_{03}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{13}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_3, v_{01} < v < v_{03}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_0, v_{01} < v < v_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{21}, \text{ при } \sigma > \sigma_6, v_{03} < v < v_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_3, v_{03} < v < v_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при } \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, v_{02} < v < v_{03}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, v_{11} < v < v_{03}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при } \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, v_{11} < v < v_{03}; \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, v_{11} < v < v_{03}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } \sigma_1 < \sigma < \sigma_4, v_{02} < v < v_{12}; \sigma_4 < \sigma < \sigma_6, v_{03} < v < v_{12}; \\ & \sigma > \sigma_6, v_{11} < v < v_{12}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_1, v_{11} < v < v_{12}; \\ & \sigma_1 < \sigma < \sigma_3, v_{11} < v < v_{02}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, v_{03} < v < v_{02}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_1, v > v_{02}; \sigma > \sigma_1, v > v_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23} \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_1, v_{12} < v < v_{02}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Волны  $\zeta_{14}$ ,  $\zeta_{21}$ ,  $\zeta_{22}$  обусловлены периодическими изменениями давлений  $\sigma > 0$ .

Волны  $\zeta_{14}$  имеют вид кольцевых волн. В зависимости от скорости  $v$  и частоты  $\sigma$ , волны  $\zeta_{14}$  распространяются как вокруг области давлений (рис. 2-4, 7), так и за ней в угловой зоне  $-\gamma_3 < \gamma < \gamma_3$  (рис. 5, 6, 8). При  $0 < v < v_{02}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  (рис. 2-4) и  $0 < v < v_{11}$ ,  $\sigma > \sigma_0$  (рис. 7) волны распространяются вокруг области давлений. При  $v > v_{02}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  и  $v > v_{11}$ ,  $\sigma > \sigma_0$  волны распространяются за областью давлений (рис. 8).

Волны  $\zeta_{21}$  имеют характер поперечных, а  $\zeta_{22}$  — продольных корабельных волн. Волны  $\zeta_{21}$  распространяются в угловой зоне  $-\gamma_{11} < \gamma < \gamma_{11}$ , а  $\zeta_{22}$  — в угловых зонах  $\gamma_{22} < |\gamma| < \gamma_{11}$  за движущейся областью периодических давлений при  $v > v_{12}$  (рис. 10).

Волны  $\zeta_{11}$  и  $\zeta_{12}$  носят характер продольных и поперечных корабельных волн, распространяющихся за источником возмущений. Они образуются и при  $\sigma = 0$  [12, 13]. Волны  $\zeta_{11}$  образуются при  $v_{11} < v < v_{02}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  в угловой зоне  $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$  (рис. 4). Волны  $\zeta_{12}$  образуются в угловых зонах  $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$  при  $v_{11} < v < v_{02}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  (рис. 4) и угловых зонах  $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$  при  $v > v_{02}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  (рис. 5, 6) и  $v > v_{11}$ ,  $\sigma > \sigma_0$  (рис. 8).

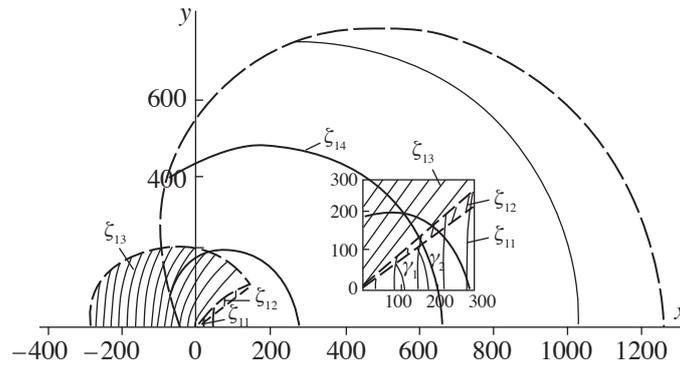


Рис. 4. Линии равной фазы волн  $\zeta_{11}$ ,  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  и  $\zeta_{14}$ ;  $v = 8$  м/с ( $v_{11} < v < v_{02}$ ),  $\sigma = 0,3$  с $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  с

Fig. 4. Lines of equal phase of  $\zeta_{11}$ ,  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  and  $\zeta_{14}$  waves;  $v = 8$  m/s ( $v_{11} < v < v_{02}$ ),  $\sigma = 0,3$  s $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

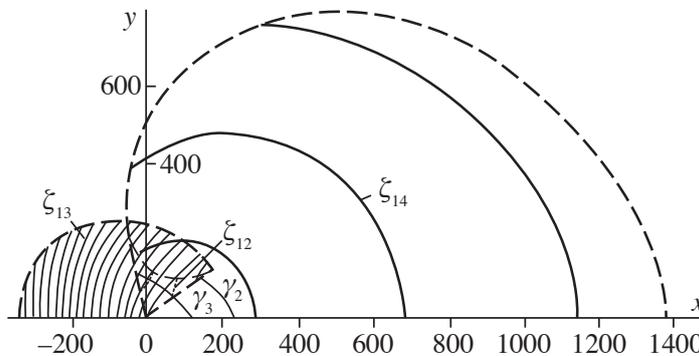


Рис. 5. Линии равной фазы волн  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  и  $\zeta_{14}$ ;  $v = 8,5$  м/с ( $v_{02} < v < v_{10}$ ),  $\sigma = 0,3$  с $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  с

Fig. 5. Lines of equal phase of  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  and  $\zeta_{14}$  waves;  $v = 8,5$  m/s ( $v_{02} < v < v_{10}$ ),  $\sigma = 0,3$  s $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

Волны  $\zeta_{13}$  и  $\zeta_{23}$  — изгибно-гравитационные волны. Они обусловлены наличием упругой пластины. Из них  $\zeta_{13}$  образуются как при  $\sigma > 0$ , так и при  $\sigma = 0$  [12,13]. Волны  $\zeta_{23}$  генерируются только при перемещении периодических возмущений.

Волны  $\zeta_{13}$  образуются при  $v > v_{01}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  (рис. 3–6) и  $v > v_{11}$ ,  $\sigma > \sigma_0$ , а  $\zeta_{23}$  при  $v > v_{03}$ ,  $\sigma > 0$  (рис. 9, 10). Волны  $\zeta_{13}$  при  $v_{01} < v < v_{11}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$ , как и волны  $\zeta_{23}$  при  $v_{03} < v < v_{12}$ ,  $\sigma > 0$ , распространяются как впереди области возмущений, так и за ней. Волны  $\zeta_{13}$  при  $v > v_{11}$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  (рис. 4, 5, 6) и  $v > v_{11}$ ,  $\sigma > \sigma_0$  (рис. 8) распространяются в угловой зоне  $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$ , а волны  $\zeta_{23}$  при  $v > v_{12}$ ,  $\sigma > 0$  распространяются в угловой зоне  $\gamma_{22} \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_{22}$ .

### Заключение

При перемещении по ледяному покрову возмущений переменной интенсивности, в зависимости от частоты колебаний источника и скорости его перемещения, существует шесть значений критических скоростей, если  $0 < \sigma < \sigma_0$ , и три, если  $\sigma > \sigma_0$ . При движении по упругой пластине возмущений постоянной интенсивности существует три значения критических скоростей —  $v_0$ ,  $v_1$  и  $\sqrt{gH}$ .

При  $\sigma = 0$  значения критических скоростей  $v_{01}$  и  $v_{03}$  равны значению  $v_0$  ( $v_{01} = v_{03} = v_0$ ), где  $v_0$  — минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны. Критические скорости  $v_{11}$  и  $v_{12}$  равны значению критической скорости  $v_1$  ( $v_{11} = v_{12} = v_1$ ), где  $v_1$  — скорость,

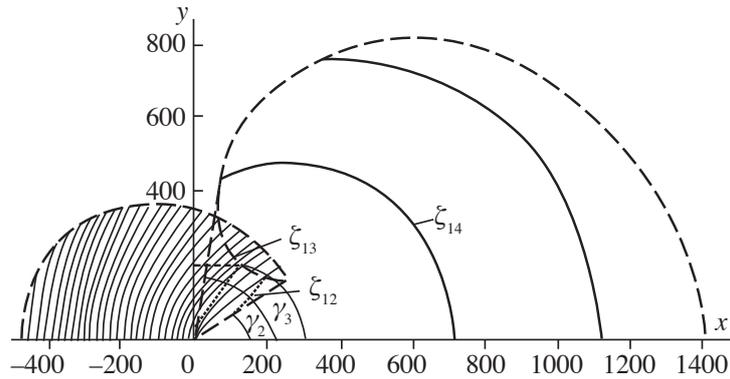


Рис. 6. Линии равной фазы волн  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  и  $\zeta_{14}$ ;  $v = 10$  м/с ( $v > v_{10}$ ),  $\sigma = 0,3$  с $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  с  
 Fig. 6. Lines of equal phase of  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  and  $\zeta_{14}$  waves;  $v = 10$  m/s ( $v > v_{10}$ ),  $\sigma = 0,3$  s $^{-1}$  ( $\sigma < \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

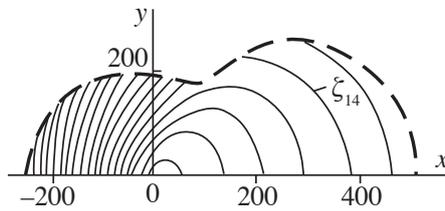


Рис. 7. Линии равной фазы волны  $\zeta_{14}$ ;  $v = 5$  м/с ( $0 < v < v_{11}$ ),  $\sigma = 0,8$  с $^{-1}$  ( $\sigma > \sigma_0$ ),  $t = 40$  с  
 Fig. 7. Equal-phase lines of  $\zeta_{14}$  wave;  $v = 5$  m/s ( $0 < v < v_{11}$ ),  $\sigma = 0,8$  s $^{-1}$  ( $\sigma > \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

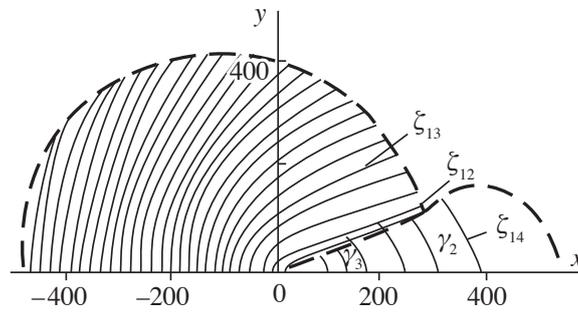


Рис. 8. Линии равной фазы волн  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  и  $\zeta_{14}$ ;  $v = 16$  м/с ( $v > v_{11}$ ),  $\sigma = 0,8$  с $^{-1}$  ( $\sigma > \sigma_0$ ),  $t = 40$  с  
 Fig. 8. Lines of equal phase of  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{13}$  and  $\zeta_{14}$  waves;  $v = 16$  m/s ( $v > v_{11}$ ),  $\sigma = 0,8$  s $^{-1}$  ( $\sigma > \sigma_0$ ),  $t = 40$  s

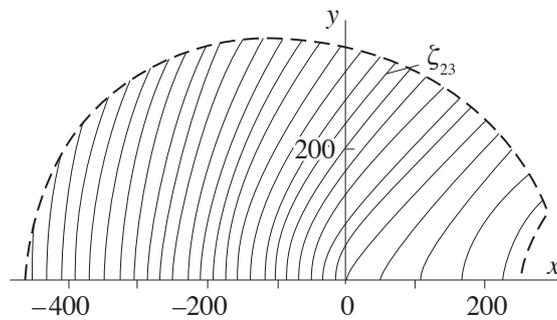


Рис. 9. Линии равной фазы волны  $\zeta_{23}$ ;  $v = 12$  м/с ( $v_{03} < v < v_{12}$ ),  $\sigma = 0,2$  с $^{-1}$  ( $\sigma > 0$ ),  $t = 40$  с  
 Fig. 9. Lines of equal phase of  $\zeta_{23}$  wave;  $v = 12$  m/s ( $v_{03} < v < v_{12}$ ),  $\sigma = 0,2$  s $^{-1}$  ( $\sigma > 0$ ),  $t = 40$  s

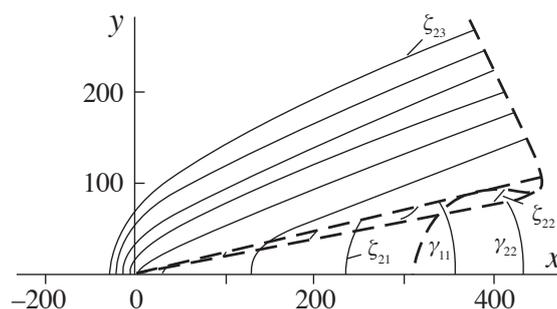


Рис. 10. Линии равной фазы волн  $\zeta_{21}$ ,  $\zeta_{22}$ ,  $\zeta_{23}$ ;  $v = 25$  м/с ( $v > v_{12}$ ),  $\sigma = 0,2$  с<sup>-1</sup> ( $\sigma > 0$ ),  $t = 20$  с

Fig. 10. Lines of equal phase of  $\zeta_{21}$ ,  $\zeta_{22}$ ,  $\zeta_{23}$  waves;  $v = 25$  m/s ( $v > v_{12}$ ),  $\sigma = 0,2$  s<sup>-1</sup> ( $\sigma > 0$ ),  $t = 20$  s

при которой совпадают фазовые скорости гравитационной, упругой и изгибно-гравитационной волн. Значения критических скоростей  $v_{02}$  и  $v_{10}$  равны  $\sqrt{gH}$  ( $v_{02} = v_{10} = \sqrt{gH}$ ), где  $\sqrt{gH}$  — максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

Движущимися возмущениями переменной интенсивности, в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний источника, может генерироваться от одной до семи систем волн, а движущимися возмущениями постоянной интенсивности ( $\sigma = 0$ ) генерируется от одной до трех систем волн.

#### Литература [References]

1. Хейсин, Д.Е., *Динамика ледяного покрова*. Ленинград, Гидрометеиздат, 1967. [Heisin, D.E., *Dinamika ledyanogo pokrova = Dynamics of the ice cover*. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1967. (in Russian)]
2. Доценко, С.Ф., О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустойчивых корабельных волнах. *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*, 1978, № 5, с. 26–32. [Dotsenko, S.F., On gravitationally elastic and gravitationally capillary unsteady ship waves. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza = Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*, 1978, no. 5, pp. 26–32. (in Russian)]
3. Букатов, А.Е., *Волны в море с плавающим ледяным покровом*. Севастополь, ФГБУН МГИ, 2017. [Bukatov, A.E., *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom = Waves in the sea with a floating ice cover*. Sevastopol, FGBUN MGI, 2017. (in Russian)]
4. Козин, В.М., *Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты*. Москва, Академия Естествознания, 2007. [Kozin, V.M., *Rezonansnyy metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i eksperimenty = Resonant method of ice cover destruction. Inventions and experiments*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2007. (in Russian)]
5. Козин, В.М., Жесткая, В.Д., Погорелова, А.В., Чижумов, С.Д., Джабраилов, М.Р., Морозов, В.С., Кустов, А.Н., *Прикладные задачи динамики ледяного покрова*. Москва, Академия Естествознания, 2008. [Kozin V.M., Zhestkaya, V.D., Pogorelova, A.V., Chizhiumov, S.D., Dzhabrailov, M.R., Morozov, V.S., Kustov, A.N., *Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova = Applied problems of ice cover dynamics*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2008. (in Russian)]
6. Козин, В.М., Земляк, В.Л., Рогожникова, Е.Г., Погорелова, А.В., *Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки*. Новосибирск, Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020. [Kozin, V.M., Zemlyak, V.L., Rogozhnikova, E.G., Pogorelova, A.V., *Vliyanie ledovykh usloviy na deformirovannoe sostoyanie ledyanogo pokrova ot dvizheniya nagruzki = The influence of ice conditions on the deformed state of the ice cover from the movement of the load*. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2020. (in Russian)]
7. Squire, V.A., Hosking, R.J., Kerr, A.D., Langhorne, P.J., *Moving loads on ice plates*. Springer Science & Business Media, 2012.
8. Букатов, А.Е., Ярошенко, А.А., Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности. *Журнал прикладной механики и технической физики*. 1986, № 5, с. 54–60. [Bukatov, A.E., Yaroshenko, A.A., The development of three-dimensional

- bending-gravitational waves during the movement of a pressure region of variable intensity. *Zhurnal prikladnoj mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1986, no. 5, pp. 54–60. (in Russian)]
9. Кожаяев, А.В., Козин, В.М., Повышение эффективности резонансного метода интерференций изгибно-гравитационных волн от периодического изменения давления в подушке СВП. В *Сборник докладов IV Всероссийской конференции с международным участием «Полярная механика-2017» 14–15 сентября 2017 г., Санкт-Петербург. Полярная механика*, 2018, № 4, с. 265–271. [Kozhaev, A.V., Kozin, V.M., Increasing the efficiency of the resonant method of interference of bending-gravitational waves from periodic pressure changes in the SVP cushion. In *Sbornik dokladov IV Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem “Polyarnaya mekhanika-2017” 14–15 sentyabrya 2017 g., Sankt-Peterburg. Polyarnaya mekhanika = Collection of reports of the IV All-Russian Conference with international participation “Polar Mechanics-2017” September 14–15, 2017, St. Petersburg. Polar mechanics*, 2018, no. 4, pp. 265–271. (in Russian)]
  10. Федорюк, М.В., *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва, Libroком, 2020. [Fedoryuk, M.V., *Asimptotika. Integraly i ryady = Asymptotics. Integrals and series*. Moscow, Librocom, 2020. (in Russian)]
  11. Федорюк, М.В., *Метод перевала*. Москва, Ленанд, 2022. [Fedoryuk, M.V., *Metod perevala = The method of the pass*. Moscow, Lenand, 2022. (in Russian)]
  12. Маленко, Ж.В., Ярошенко, А.А., Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений. *Морские интеллектуальные технологии*, 2021, т. 4, № 2, с. 157–161. [Malenko, Zh.V., Yaroshenko, A.A., Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances. *Morskie intellektual’nye tekhnologii = Marine intellectual technologies*, 2021, vol. 4, no. 2, pp. 157–161. (in Russian)] EDN: ULKHDF DOI: [10.37220/MIT.2021.52.2.086](https://doi.org/10.37220/MIT.2021.52.2.086)
  13. Маленко, Ж.В., Ярошенко А.А., Влияние сжимающих усилий на амплитуды изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 2, с. 29–38. [Yaroshenko, A.A., Malenko, Zh.V., The effect of compressive forces on the amplitudes of bending-gravitational waves generated by moving perturbations. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 29–38. (in Russian)] EDN: SFJRYI DOI: [10.31429/vestnik-19-2-29-38](https://doi.org/10.31429/vestnik-19-2-29-38)