

УДК 535.31:51-7

EDN: YZQSHG DOI: 10.31429/vestnik-20-1-52-64

## Моделирование рефракционных изображений при распространении лазерных пучков в оптически неоднородных жидких средах

А. В. Ведяшкина<sup>1</sup>, И. Н. Павлов<sup>2</sup>, И. Л. Расковская<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> АО «Особое конструкторское бюро Московского энергетического института», ул. Красноказарменная, д. 14, Москва, 111250, Россия

<sup>2</sup> Национальный исследовательский университет «МЭИ», ул. Красноказарменная, д. 17, Москва, 111250, Россия

✉ Расковская Ирина Львовна; ORCID 0000-0002-1231-9479; e-mail: raskovskail@mail.ru

*Аннотация.* Обоснована актуальность исследования и сформулированы проблемы, возникающие при разработке математических моделей распространения волновых пучков в условиях сильной рефракции. Предложены модели пучков, формируемых на основе дифракционных оптических элементов. Представлены результаты моделирования прямотеневых рефракционных изображений для лазерных пучков различных типов при распространении их в стратифицированной жидкой среде в отсутствие и при наличии каустик.

*Ключевые слова:* оптически неоднородные жидкие среды, лазерные пучки, рефракция, математические модели распространения оптического излучения, лазерная диагностика жидких сред.

*Финансирование.* Исследование не имело спонсорской поддержки.

*Цитирование:* Ведяшкина А. В., Павлов И. Н., Расковская И. Л. Моделирование рефракционных изображений при распространении лазерных пучков в оптически неоднородных жидких средах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2023. Т. 20, № 1. С. 52–64. EDN: YZQSHG. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-52-64

Поступила 5 ноября 2022 г. После доработки 11 ноября 2022 г. Принято 6 декабря 2022 г. Публикация 31 марта 2023 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Идея/концепция работы (Расковская И.Л.), проведение экспериментов (Павлов И.Н.), вычислений, расчетов, анализ данных (Расковская И.Л., Ведяшкина А.В.), написание статьи (Расковская И.Л.), внесение правок (Павлов И.Н.), утверждение окончательного варианта (Расковская И.Л., Павлов И.Н., Ведяшкина А.В.).

© Автор(ы), 2023. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Modeling of Refractive Images During the Propagation of Laser Beams in Optically Inhomogeneous Liquid Media

A. V. Vedyashkina<sup>1</sup>, I. N. Pavlov<sup>2</sup>, I. L. Raskovskaya<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> JSC “Special Design Bureau of the Moscow Power Engineering Institute”, Krasnokazarmennaya st., 14, Moscow, 111250, Russia

<sup>2</sup> National Research University “MPEI”, Krasnokazarmennaya st., 17, Moscow, 111250, Russia

✉ Irina L. Raskovskaya; ORCID 0000-0002-1231-9479; e-mail: raskovskail@mail.ru

*Abstract.* The analytical models for the propagation of wave beams in the presence of strong refraction in liquid media have been developed, applicable to both narrow and wide, including structured laser beams used for probing inhomogeneities with significant refractive index gradients. Laser diagnostics of water stratifications with significant refractive index gradients, as a rule, is based on solving the inverse problem of refraction of optical radiation, which requires the development of models for the propagation of probing beams in and out of the medium. The propagation of laser radiation in highly inhomogeneous liquid media is accompanied by a change in its characteristics: curvature of the ray trajectories, distortion of the beam shape, and the formation of caustics. In this case, it is advisable to carry out measurements based on probing the medium with structured laser radiation, which makes it possible to record not the change in intensity, but the relative displacement of the structural elements of the beam.

Image discretization at the physical level can be carried out based on the use of structured laser beams for probing, formed using diffractive optical elements (DOE). DOEs that focus laser radiation into thin lines or small regions of space are the most promising for use in diagnosing gradient inhomogeneities. The use of beams with such a structure significantly expands the possibilities of traditional laser gradient methods.

The wave field of a structured laser beam with a known wavelength which has passed through an optical inhomogeneity with a given change in the refractive index can be described based on the Kirchhoff integral or using the spectral approach. Beam propagation in an inhomogeneous medium is described by the Helmholtz equation, which under a number of assumptions can be reduced to a parabolic one and solved by numerical methods. An alternative is to use an approach that simultaneously uses the principles of geometric optics and the spectral method. The advantage of this approach is the possibility of obtaining an approximate solution in an analytical form that is the same for wide and narrow beams, which makes it possible to solve the inverse problem without using laborious computational methods.

Using the stationary phase method, an asymptotic representation is obtained for the wave field of structured laser beams passing through an optically inhomogeneous medium, which is valid in the region of caustics and in the region of multirays. On the basis of experimental refractive images and the developed wave models, the reconstruction of the spatial and temporal characteristics of thermophysical and wave processes in liquid, including those accompanied by an abrupt perturbation of its parameters, can be carried out. The use of wave models in this case is fundamental for describing the position of the caustics and the significant spreading of the structural elements of the beam.

**Keywords:** optically inhomogeneous liquid media, laser beams, refraction, mathematical models of propagation of optical radiation, laser diagnostics of liquid media.

**Funding.** The study did not have sponsorship.

**Cite as:** Vedyashkina, A. V., Pavlov, I. N., Raskovskaya, I. L., Modeling of refractive images during the propagation of laser beams in optically inhomogeneous liquid media. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 52–64. DOI: 10.31429/vestnik-20-1-52-64

Received 5 November 2022. Revised 11 November 2022. Accepted 6 December 2022. Published 31 March 2023.

The author(s) declare no competing interests. Idea/concept of the work (Raskovskaya I.L.), conducting experiments (Pavlov I.N.), calculations, data analysis (Raskovskaya I.L., Vedyashkina A.V.), paper writing (Raskovskaya I.L.), making edits (Pavlov I.N.), approval of the final version (Raskovskaya I.L., Pavlov I.N., Vedyashkina A.V.).

© The Author(s), 2023. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CCBY\) license](#).

## Введение

С целью диагностики оптически неоднородных жидких сред [1–6] разработаны аналитические модели распространения волновых пучков при наличии сильной рефракции, применимые как к узким, так и к широким, в том числе структурированным лазерным пучкам, используемым для зондирования неоднородностей с существенными градиентами показателя преломления [7].

Жидкие среды становятся оптически неоднородными при наличии температурных и плотностных стратификаций, при воздействии акустических полей, перемешивании [8–15]. Оптически неоднородная прозрачная жидкость представляет собой протяженный динамический фазовый объект, характеризующийся некоторым полем показателя преломления. Как правило, на основе экспериментальных данных непосредственно определяется поле показателя преломления, которое с использованием известных рефрактометрических соотношений [16] может быть пересчитано в поле другой физической величины (температуры, давления, плотности и др.), обуславливающей оптическую неоднородность среды.

Лазерная диагностика водных стратификаций со значительными градиентами показателя преломления, как правило, основана на решении обратной задачи рефракции оптического излучения, что требует разработки моделей распространения зондирующих пучков внутри и на выходе из среды.

Для обнаружения и визуализации градиентных оптических неоднородностей в прозрачных средах, как правило, используются теневые методы [17–23], позволяющие в целом получить представление о форме и динамике наблюдаемого объекта. Однако для количественной диагностики параметров среды теневые изображения градиентных неоднородностей в широком лазерном пучке пригодны только в случае слабой рефракции, когда пространственное изменение интенсивности изображения линейно связано с градиентом показателя преломления. В случае сильной рефракции количественная диагностика данным методом затруднена.

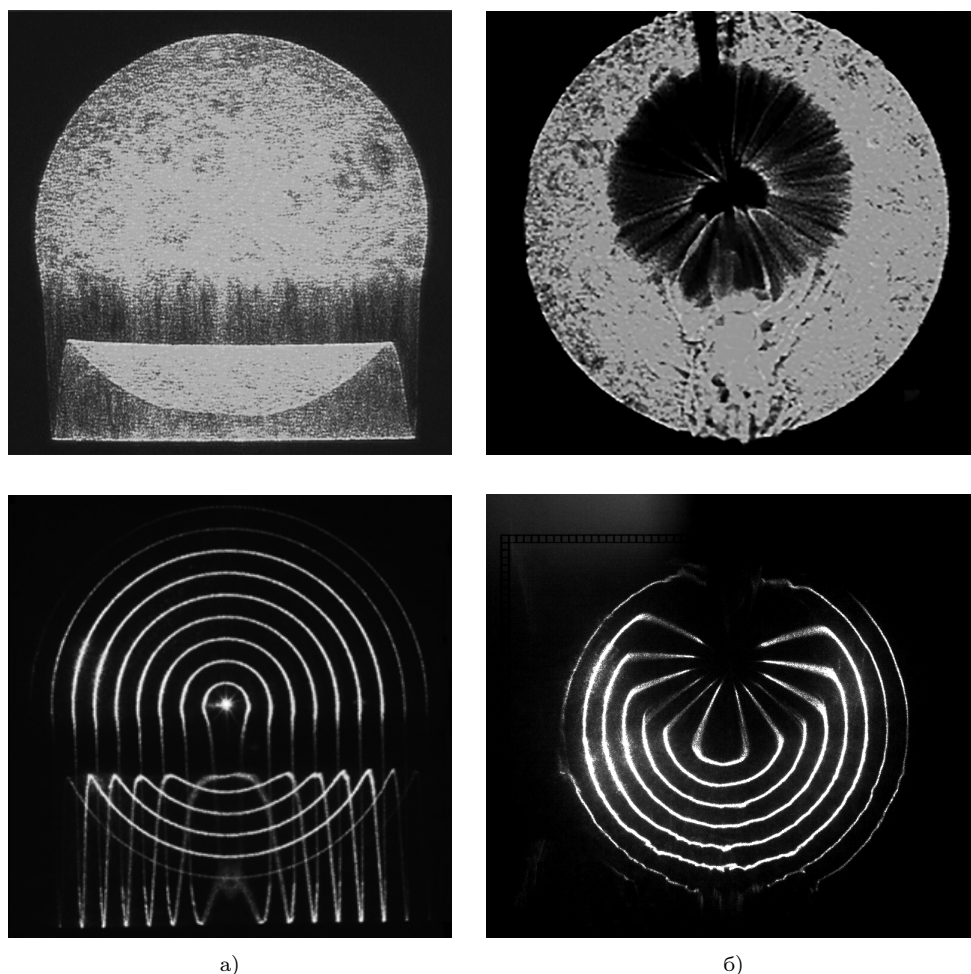


Рис. 1. Экспериментальная визуализация оптических неоднородностей с помощью широких и структурированных пучков: а) солестратифицированный водный раствор; б) пограничный слой у охлажденного шара в воде

*Fig. 1. Experimental visualization of optical inhomogeneities using wide and structured beams: а) salt-stratified aqueous solution; б) the boundary layer near a chilled ball in water*

Распространение лазерного излучения в сильно неоднородных жидких средах сопровождается изменением его характеристик: искривлением траекторий лучей, искажением формы пучков, образованием каустик. В этом случае целесообразно проводить измерения на основе зондирования среды структурированным лазерным излучением, что позволяет регистрировать не изменение интенсивности, а относительное смещение структурных элементов пучка.

## 1. Структурированные лазерные пучки

Для реализации возможности измерения смещения элементов сечения пучка в работе [24] было предложено использовать дискретизацию прямотеневого изображения, т. е. разбиение его на отдельные структурные элементы, что позволяет измерять рефракционное смещение этих элементов относительно их исходного положения. Дискретизация изображения на физическом уровне может быть осуществлена на основе использования для зондирования структурированных лазерных пучков, формируемых с помощью дифракционных оптических элементов [25–31]. На рис. 1 в верхнем ряду показаны изображения неоднородностей в жидкости в широком пучке, в нижнем ряду — визуализация таких же неоднородностей с помощью структурированных лазерных пучков.

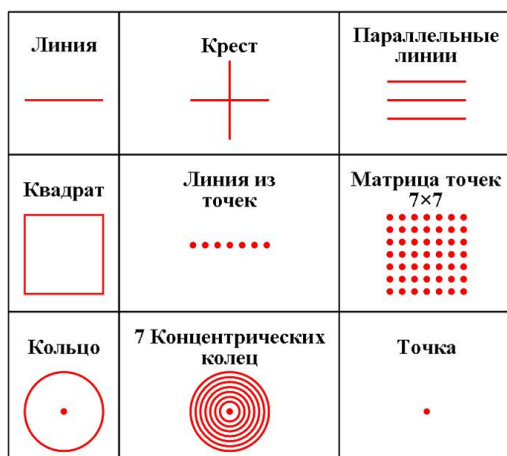


Рис. 2. Примеры сечений структурированных пучков, формируемых с помощью ДОЭ

*Fig. 2. Examples of cross sections of structured beams formed using diffractive optical elements*

Применение пучков с дискретной модуляцией интенсивности в сечении позволяет в качестве информативного параметра использовать смещение элементов структуры пучка и восстанавливать значения показателя преломления в неоднородности на основе применения строгих методов решения обратной задачи рефракции. Дискретизация изображений позволяет осуществлять как их качественный визуальный анализ, так и количественную диагностику на основе измерения смещения элементов, изменения их формы и размеров, регистрации положения особых точек и каустик. Сведение задачи измерения интенсивности прошедшего излучения в плоскости экрана к нахождению геометрических параметров дискретного изображения делает возможным решение обратной задачи восстановления поля показателя преломления.

Элементной базой преобразования гауссовского лазерного пучка в структурированный являются дифракционные оптические элементы (ДОЭ). ДОЭ представляет собой пропускающую или отражающую пластинку с фазовым микрорельефом, рассчитанным в рамках теории дифракции. Наиболее перспективными для использования при диагностике градиентных неоднородностей являются ДОЭ, фокусирующие лазерное излучение в тонкие линии или малые области пространства (рис. 2), что соответствует структурированному пучку с дискретной модуляцией интенсивности. В этом случае элементы структуры пучка непосредственно визуализируются в его сечении и рефрактограммы (рефракционные изображения) имеют контурный графический характер, удобный для измерения геометрических параметров изображения.

Использование в лазерной диагностике пучков с такой структурой существенным образом расширяет возможности традиционных лазерных градиентных методов.

## 2. Особенности распространения волновых пучков в условиях существенной рефракции

Волновое поле структурированного лазерного пучка с известным значением длины волны  $\lambda$  и соответствующим волновым числом  $k$ , прошедшего через оптическую неоднородность с заданным непрерывным изменением показателя преломления  $n = n(x, y, z)$ , может быть описано на основе интеграла Кирхгофа или с использованием спектрального подхода [32]. В работе [33] было отмечено, что в условиях сильной рефракции при расчете волновых моделей рефрактограмм (прямотеневых изображений неоднородности в прошедшем структурированном излучении) в области геометрической оптики и в области дифракции Френеля возникают проблемы, связанные с требованием значительных вычислительных ресурсов из-за наличия быстро осциллирующих функций под знаком интеграла Кирхгофа и существенного расширения

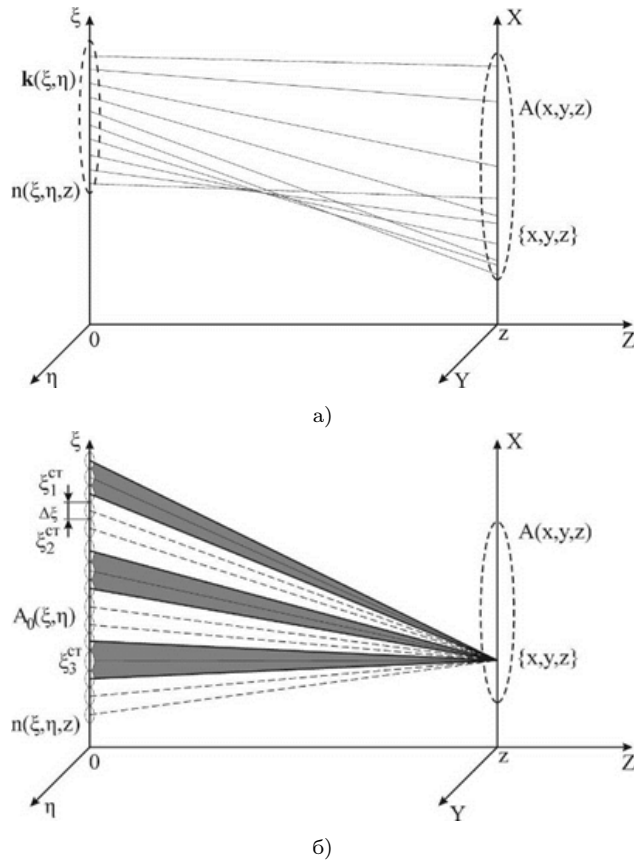


Рис. 3. Распространение пучков в условиях существенной рефракции: а) нарушение параксиальности пучка; б) появление областей многолучевости

Fig. 3. Propagation of beams under conditions of significant refraction: а) violation of beam paraxiality; б) appearance of multipath regions

пространственного спектра пучка. Физически это обусловлено быстрым изменением фазы волнового поля в сечении пучка и нарушением его параксиальности из-за сложной лучевой картины (рис. 3а), что требует модификации традиционно применяемых асимптотических методов нахождения поля волнового пучка. Указанные проблемы возникают не только для структурированных, но, вообще говоря, для любых широких пучков, характерный размер сечения которых сравним с размером неоднородности среды или превышает его.

В данной работе представлена математическая модель рефракции волновых пучков, применимая как к узким, так и к широким, в том числе структурированным пучкам, и используемая для моделирования рефрактограмм градиентных неоднородностей при решении задач диагностики жидких сред. Для структурированных пучков решена задача построения алгоритма асимптотического вычисления интеграла Кирхгофа от быстро осциллирующих функций, возникающих в условиях существенной рефракции.

### 3. Моделирование поля пучков внутри и на выходе из среды

Моделирование и экспериментальное исследование распространения структурированных пучков следует проводить на трех участках (рис. 4): в свободном пространстве от источника излучения до неоднородности, внутри неоднородности и в свободном пространстве от неоднородности до плоскости наблюдения (экрана, на котором наблюдается экспериментальное рефракционное изображение). В исходной постановке задачи будем считать, что поле *на входе в неоднородность* полностью определяется известными характеристиками пучка от источника

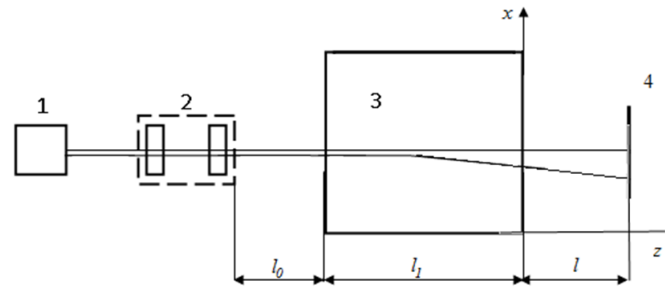


Рис. 4. Распространение зондирующего неоднородность структурированного пучка от источника до плоскости наблюдения: 1 — лазер, 2 — оптическая система формирования структурированного пучка, 3 — неоднородная среда, 4 — экран в плоскости наблюдения

Fig. 4. Probing heterogeneity structured propagation beam from the source to the observation plane: 1 — laser, 2 — optical system for forming a structured beam, 3 — inhomogeneous medium, 4 — screen in the observation plane

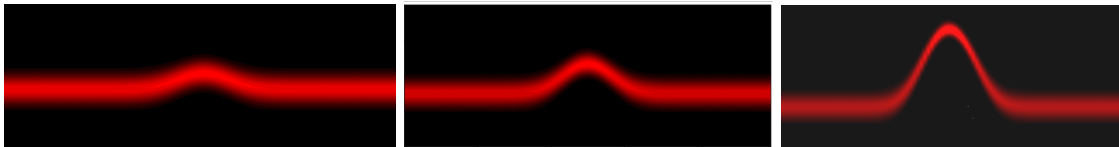


Рис. 5. Расчетные рефрактограммы внутри сферического слоя при изменении дистанции  $z$  от 2 до 12 мм

Fig. 5. Calculated refractograms inside the spherical layer when changing distances  $z$  from 2 to 12 mm

структурированного излучения. Поэтому задача сводится к рассмотрению распространения пучка непосредственно в неоднородной среде и от выхода из неоднородной среды до плоскости наблюдения.

Распространение пучка в неоднородной среде описывается уравнением Гельмгольца, которое при ряде допущений может быть сведено к параболическому [32] и решено численными методами.

Альтернативой является применение подхода, использующего одновременно принципы геометрической оптики и спектрального метода, идея которого была предложена в [34] для описания распространения лазерного пучка в среде с акустическим полем. Указанный подход может быть использован и для неоднородностей другого типа, например, для нахождения поля пучка в температурном пограничном слое у нагретого тела в воде. Рис. 5 иллюстрирует результаты моделирования рефракции астигматического гауссова пучка в зависимости от дистанции, пройденной им в сферическом слое на расстоянии 0,3 мм от нагретого шара радиусом 40 мм. Неоднородность среды задается соотношением

$$n(r, t) = n_0(1 + \delta n e^{-\frac{r}{a}}), \quad (3.1)$$

где  $r$  — радиальная координата,  $a$  — характерная толщина слоя,  $n_0 = 1,3300$ ,  $\delta n = 0,01$ ,  $a = 1$  мм.

Преимуществом подхода, предложенного в [34], является возможность получения приближенного решения в аналитической форме, единой для широких и узких пучков, что дает возможность решения обратной задачи без использования трудоемких вычислительных методов. Недостатком моделирования на основе спектрального метода внутри среды является невозможность его применения вблизи каустик в соответствии с ограничениями, изложенными в [34].

При расчете волновых моделей пучков и рефрактограмм на выходе из среды, как было сказано выше, возникают проблемы, связанные с требованием значительных вычислительных

ресурсов из-за наличия быстро осциллирующих функций под знаком интеграла

$$A(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\xi, \eta) \exp [ik_0 n(\xi, \eta)l] \frac{ze^{ik_0 R}}{R^2} d\xi d\eta, \quad (3.2)$$

используемого для моделирования прямолинейных изображений градиентных неоднородностей.

Традиционный подход, используемый для моделирования в ближней зоне (волновой параметр много меньше или порядка единицы) рефракционных изображений волновыми методами заключается в асимптотическом [32, 35] вычислении интеграла (3.2) при условии, что функция  $A(\xi, \eta) = A_0(\xi, \eta) \exp [ik_0 n(\xi, \eta)l]$ , задающая значения комплексной амплитуды поля на выходе из среды (в плоскости  $\xi, \eta$ ) с показателем преломления  $n(\xi, \eta)$  и протяженностью  $l$ , является медленно меняющейся, а функция  $e^{ik_0 R}$  — быстро осциллирующей. Однако, если среда достаточно протяженная и градиенты показателя преломления значительны, функция  $\exp [ik_0 n(\xi, \eta)l]$  оказывается тоже быстроосциллирующей, и традиционный подход в этом случае не применим. В терминах геометрической оптики эта ситуация эквивалентна сильному отклонению лучей на выходе из среды, образованию каустик и зон многолучевости, причем углы отклонения лучей могут существенно отличаться в точках сечения неоднородности, перпендикулярного направлению распространения зондирующего излучения (рис. 36). В следующем разделе для структурированных пучков решена задача построения алгоритма асимптотического вычисления интеграла Кирхгофа от быстро осциллирующих функций, возникающих в условиях сильной рефракции на выходе из среды.

#### 4. Построение модели рефракционных изображений волновых пучков на выходе из оптически неоднородной среды

Для описания зависящего от координат и времени волнового поля  $A(x, y, z, t)$  пучка, изначально распространяющегося вдоль оси  $OZ$  и прошедшего через оптическую неоднородность, будем основываться на модели прозрачной среды с заданным показателем преломления  $n = n(x, y, z, t)$ , границы которой определяются значениями  $z = 0$  и  $z = z_1$ . Положим, что на входе в неоднородность комплексная амплитуда пучка равна  $A_0(x, y)$ , длина волны лазерного излучения в свободном пространстве —  $\lambda$ , соответственно  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Заметим, что в данной постановке задачи изначально не накладываются ограничения на характер изменения поля  $A_0(x, y)$  в сечении пучка, т.е. оно может быть как дискретным, так и непрерывным.

Предположим, что поле пучка на выходе из среды при  $z = z_1$  может быть задано в виде

$$A(\xi, \eta, z_1, t) = A_1(\xi, \eta, t) \exp(i\varphi_1(\xi, \eta, t)), \quad (4.1)$$

где амплитуда  $A_1(\xi, \eta)$  и фаза  $\varphi_1(\xi, \eta)$  волнового поля в зависимости от условий рефракции определяются на основе решения уравнений переноса или параболического уравнения в неоднородной среде [32, 35]. Если протяженность неоднородности относительно невелика и не учитываются объемные эффекты в среде, то в приближении фазового экрана

$$A(\xi, \eta, z_1, t) = A_0(\xi, \eta) \exp(ikz_1 n(\xi, \eta, t)). \quad (4.2)$$

Время  $t$  будем рассматривать как параметр и учитывать его изменение только в конечном результате при подстановке заданных зависимостей  $n(\xi, \eta, t)$ , где  $\xi$  и  $\eta$  — координаты на границе среды в плоскости  $z = z_1$ .

В точке наблюдения с координатами  $x, y, z$  волновое поле пучка  $A(x, y, z)$ , распространяющегося в свободном пространстве, может быть получено как решение параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

с граничным условием, определяемым соотношением (4.1). Решение (4.3) запишем в виде

$$A(xyz) = \frac{1}{i\lambda(z-z_1)} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} A_1(\xi, \eta) \exp \left[ i\phi_1(\xi, \eta) + ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2(z-z_1)} \right] d\xi d\eta, \quad (4.4)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — эффективные размеры пучка на выходе из среды в плоскости  $z = z_1$ , соответственно по осям  $\xi$  и  $\eta$ . Обычно при исследовании нестационарных неоднородностей размеры пучка сравнимы или превышают характерный размер поперечного сечения неоднородности.

Очевидно, что при значительных поперечных градиентах показателя преломления функция  $A_1(\xi, \eta) \exp(i\phi_1(\xi, \eta))$  является быстро изменяющейся и не может быть вынесена за знак интеграла, как это обычно делается в области геометрической оптики (где, как правило, наблюдаются экспериментальные рефракционные изображения). Поэтому при непосредственном интегрировании (4.4) для достаточно больших значений  $W_1$  и  $W_2$  возникают проблемы, связанные с требованием значительных вычислительных ресурсов, что фактически не позволяет реализовать решение обратной задачи реконструкции параметров неоднородности. В терминах геометрической оптики эта ситуация эквивалентна сильному отклонению лучей на выходе из среды, образованию каустик и зон многолучевости, причем углы отклонения лучей могут существенно отличаться в точках сечения неоднородности, перпендикулярного направлению распространения зондирующего излучения. Указанные явления означают наличие существенной рефракции, которая фактически нарушает структуру пучка.

Тем не менее, использование асимптотических методов и наглядных физических представлений позволяет значительно упростить вычисления поля  $A(x, y, z)$  с сохранением информативности его волнового описания (4.4). Найдем точки стационарной фазы из условия равенства нулю частных производных по  $\xi$  и  $\eta$  показателя экспоненты в выражении (4.4)

$$\begin{cases} \xi + \frac{(z-z_1)}{k} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = x; \\ \eta + \frac{(z-z_1)}{k} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = y. \end{cases} \quad (4.5)$$

Точки стационарной фазы с координатами  $\xi_m(x, y)$  и  $\eta_m(x, y)$  являются решением системы уравнений (4.5) при заданных значениях координат  $x$  и  $y$  точки наблюдения. Целочисленный индекс  $m \leq M$ , где  $M$  — число решений системы (4.5), которое равно числу геометрических лучей, приходящих в данную точку наблюдения. Значения  $\xi_m(x, y)$  и  $\eta_m(x, y)$  в плоскости  $z = z_1$  соответствуют координатам точек выхода этих лучей.

Возвращаясь к представлению (4.4) поля  $A(x, y, z)$ , запишем его в виде

$$A(xyz) = \frac{1}{i\lambda(z-z_1)} \sum_{m=1}^M \int_{\xi_m(x,y)-\Delta_\xi}^{\xi_m(x,y)+\Delta_\xi} \int_{\eta_m(x,y)-\Delta_\eta}^{\eta_m(x,y)+\Delta_\eta} \times \\ \times A_1(\xi\eta) \exp \left[ ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2(z-z_1)} + i\phi_1(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta, \quad (4.6)$$

где величины  $\Delta_\xi$  и  $\Delta_\eta$  выбираются из условия, что изменение фазы подынтегральной функции в заданной области интегрирования не превышает некоторого значения  $\Delta\varphi$ , определяемого требуемой точностью нахождения  $A(x, y, z)$ . Таким образом, вместо интегрирования по всему сечению пучка ограничимся интегрированием по области, которая дает основной вклад в искомое поле и соответствует нескольким зонам Френеля в окрестности точки выхода каждого луча, т.е. в окрестности стационарных точек  $\{\xi_m, \eta_m\}$ .

Как следует из расчетов, такого рода ограничение области интегрирования влечет за собой некоторую погрешность расчета  $A(x, y, z)$ , как правило, не превышающую десяти процентов.



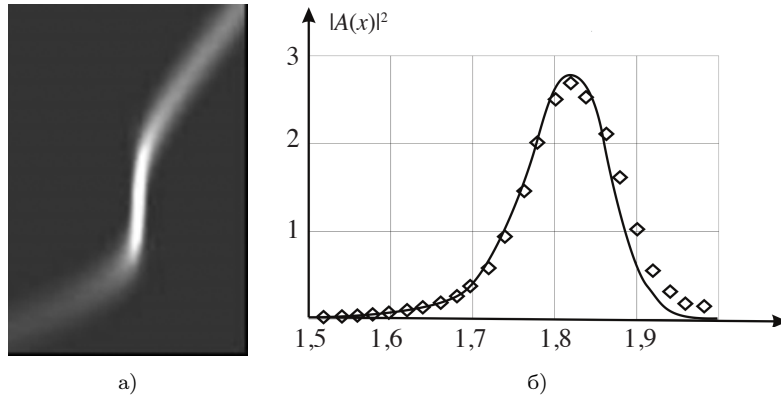


Рис. 6. Сравнение зависимостей интенсивности в окрестности каустики, рассчитанных на основе асимптотического решения (а) и интеграла Кирхгофа (б)

Fig. 6. Comparison of intensity dependences in the vicinity of the caustic, calculated on the basis of the asymptotic solution (a) and the Kirchhoff integral (b)

Но при этом, в отличие от традиционной геометрической асимптотики, предполагающей переход к бесконечным пределам интегрирования, сохраняется корректность представления поля вблизи каустик [36], интерференционного поля в области многолучевости и другие преимущества волнового описания. Таким образом, на основе (4.6) обеспечивается единое представление для поля в плоскости наблюдения, причем локализация области интегрирования  $\{\xi_m, \eta_m\}$  является функцией точки наблюдения, определяется аналитически на основе решения (4.5) и не зависит от конкретного типа пучка, а только от вида неоднородности.

На рис. 6 сравниваются зависимости интенсивности поля  $|A(x)|^2$  в окрестности каустики, возникающей при прохождении излучения через фокусирующий слой с показателем преломления  $n(x) = n_0 + \Delta n e^{-\frac{x^2}{a^2}}$ , рассчитанные на основе точного решения (4.4) и на основе асимптотического представления (4.6) при  $n_0 = 1,33$ ,  $\Delta n = 0,002$ ,  $a = 2$  мм.

Для элемента пучка с дискретной структурой (рис. 6а) при эффективном размере элемента  $\delta_j = 0,3$  мм и размерах области интегрирования  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0,3$  мм наблюдается практическое совпадение указанных зависимостей (рис. 6б).

Для описания рефракции лазерных пучков, формируемых на основе дифракционных оптических элементов, предложена модель пучка с дискретным изменением интенсивности в сечении, например для кольцевого (цилиндрического) пучка

$$I(r) = \sum_{j=0}^J I_j e^{-\frac{(r-j\Delta W)^2}{w_j^2}},$$

где  $r$  — расстояние от центра пучка,  $j$  — номер элемента структуры пучка, в данном случае номер кольца,  $w_j$ ,  $I_j$  — характерный размер (ширина) и интенсивность кольца с номером  $j$ ,  $\Delta W$  — шаг между элементами структуры, который в общем случае может быть переменным. Характерным размером сечения пучка будем считать величину  $W = J\Delta W$ , т.е. радиус последнего кольца. Пусть для всех  $j$  выполняется  $\Delta W \gg w_j$ . Тогда с незначительной погрешностью можно положить, что интенсивность равна нулю всюду за исключением областей, определяемых соотношением

$$j\Delta W - \delta_j \ll r \ll j\Delta W + \delta_j,$$

т.е. в пределах каждого элемента с эффективной шириной  $\delta_j$ , которая в данном случае может быть положена равной  $2w_j$ .

Заметим, что существенное требование, которое должно выполняться при нахождении поля (4.6), заключается в том, что области интегрирования, соответствующие разным стационарным

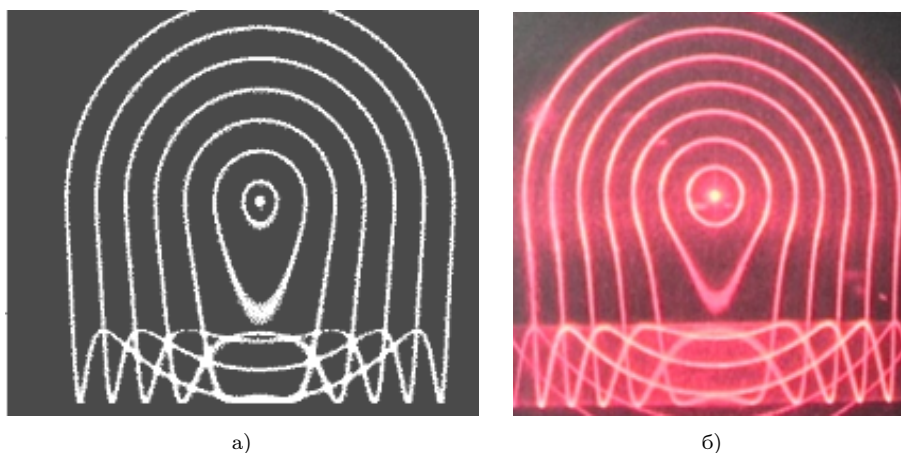


Рис. 7. Сравнение расчетных на основе (а) разработанной модели и (б) экспериментальных изображений сечения цилиндрического пучка, прошедшего через водно-солевую стратификацию  
 Fig. 7. Comparison of calculated on the basis of (a) the developed model and (b) experimental images of the cross section of a cylindrical beam that has passed through water-salt stratification

точкам (при разных  $m$ ), не должны пересекаться. Это каждый раз непосредственно должно проверяться при расчете полей пучков с непрерывным изменением интенсивности. В случае пучков с дискретной модуляцией интенсивности по сечению, это требование практически всегда выполняется, так как области с ненулевой интенсивностью достаточно разнесены между собой. Для таких пучков размеры области интегрирования  $\Delta_\xi$  и  $\Delta_\eta$  в окрестности стационарной точки целесообразно выбирать, исходя из характерных размеров  $\delta_j$  дискретного элемента пучка, например эффективной ширины кольца на рис. 1. В этом случае погрешность нахождения поля, связанная с ограничением области интегрирования, существенно снижается, т.к. значения исходного поля на границе области интегрирования фактически равны нулю.

На рис. 7 в качестве примера приведено сравнение расчетного (на основе разработанной модели) и экспериментального изображений сечения цилиндрически структурированного пучка, прошедшего через двухслойную водно-солевую стратификацию.

Как следует из приведенных результатов, расчеты на основе разработанной модели демонстрируют хорошее совпадение с результатами, полученными на основе более строгих и более общих моделей (интеграл Кирхгофа) и с экспериментальными результатами [36].

## Заключение

С использованием метода стационарной фазы получено асимптотическое представление для волнового поля пучков, прошедших через оптически неоднородную среду, справедливое в области каустик и в областях многолучевости.

На основе экспериментальных рефракционных изображений и разработанных волновых моделей может быть осуществлена реконструкция пространственных и временных характеристик теплофизических и волновых процессов в жидкости, в том числе сопровождающихся скачкообразным возмущением ее параметров. Использование волновых моделей в данном случае принципиально для описания положения каустик и существенного «расплывания» структурных элементов пучка.

## Литература [References]

1. Базылев, Н.Б., Фомин Н.А., *Количественная визуализация течений, основанная на спекл-технологиях*. Беларус. навука, Минск, 2016. [Bazylev, N.B., Fomin, N.A., *Kolichestvennaya vizualizatsiya techeniy, osnovannaya na spekl-tehnologiyakh = Quantitative visualization of flows based on speckle technologies*. Belaruskaya Navuka, Minsk, 2016. (in Russian)]

2. Дубнищев, Ю.Н., Белоусов, П.П., Белоусов, П.Я., Арбузов, В.А., *Оптические методы исследования потоков*. Сибирское университетское издательство, Новосибирск, 2003. [Dubnishchev, Yu.N., Belousov, P.P., Belousov, P.Ya., Arbuzov, V.A., *Opticheskie metody issledovaniya potokov = Optical methods of flow investigation*. Siberian University Publishing House, Novosibirsk, 2003. (in Russian)]
3. Левин, И.М., Перспективные направления развития оптических дистанционных методов исследования океана. В сб. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, № 1, 2008, с. 14–47. [Levin, I.M., Promising Directions for the Development of Optical Remote Techniques for Ocean Research. In: *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika = Fundamental and applied hydrophysics*, no. 1, 2008, pp. 14–47. (in Russian)] EDN: KNPJCF
4. Долина, И.С., Родионов, М.А., Левин, И.М., Восстановление характеристик гидрофизических полей в море из результатов гидрооптических измерений. *Морской вестник*, 2010, № 4, с. 62–64. [Dolina, I.S., Rodionov, M.A., Levin, I.M., Reconstruction of the characteristics of hydrophysical fields in the sea from the results of hydrooptical measurements. *Morskoy vestnik = Marine Bull.*, 2010, no. 4, pp. 62–64. (in Russian)] EDN: MXSISP
5. Dolina, I.S., Dolin, L.S., Levin, I.M., Rodionov, V.A., Savel'ev, V.A., Inverse problems of lidar sensing of the ocean. Current research on remote sensing, laser probing and imagery in natural water. In: *SPIE Proc.*, 2007, vol. 6615, pp. 66150C-1–66150C-10.
6. Dolin, L.S., Levin, I.M., Underwater optics. In: *The Optics Encyclopedia*. Weinheim, Wiley-VCH Publ., 2004, vol. 5, pp. 3237–3271.
7. Расковская, И.Л., Ринкевичус, Б.С., Толкачев, А.В., Диагностика конвективных процессов в пограничном слое жидкости методом лазерной рефрактографии. *Инженерно-физический журнал*, 2010, т. 83, № 6, с. 1149–1156. [Raskovskaya, I.L., Rinkevichyus, B.S., Tolkachev, A.V., Diagnostics of convective processes in the boundary layer of a liquid by the laser-refractography method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2010, vol. 83, no. 6, pp. 1218–1226.] EDN: NXXWRL DOI: 10.1007/s10891-010-0444-x
8. Znamenskaya, I., Koroteeva, E., Shagiyanova, A., Thermographic analysis of turbulent non-isothermal water boundary layer. *J. of Flow Visualization and Image Processing*, 2019, vol. 26, pp. 49–56. DOI: 10.1615/JFlowVisImageProc.2018018925
9. Знаменская, И.А., Нерсисян, Д.А., Сысоев, Н.Н., Коротеева, Е.Ю., Ширшов, Я.Н., Оптические исследования динамики развития водяной струи высокого давления. *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, 2016, № 4, с. 68–75. EDN: XWTUUF [Znamenskaya, I.A., Nersesyan, D.A., Sysoev, N.N., Koroteeva, E.Yu., Shirshov, Ya.N., An optical study of high-pressure water-jet dynamics. *Moscow University Physics Bulletin*, 2016, vol. 71, iss. 4, pp. 405–412. DOI: 10.3103/S0027134916040184]
10. Цеханович, А.И., Петросян, С.А., Цысарь, С.А., Сапожников, О.А., Шлирен-система для исследования структуры ультразвуковых полей в жидкости. *Ученые записки физического факультета московского университета*, 2020, № 5, с. 2050802-1–2050802-2. [Tsekhanovich, A.I., Petrosyan, S.A., Tsysar, S.A., Sapozhnikov, O.A., Schlieren setup for studying the structure of ultrasound fields in liquids. *Memoirs of the Faculty of Physics*, 2020, no. 5, pp. 2050802-1–2050802-2. (in Russian)] EDN: AXKHRS
11. Крайский, А.В., Миронова, Т.В., Сравнение результатов рефрактометрических измерений в процессе диффузии, полученных корреляционным фоновым методом и методом голографической интерферометрии с нестационарной опорной волной. *Квантовая электроника*, 2015, т. 45, № 8, с. 759–764. EDN: UGUZPN [Kraiskii, A.V., Mironova, T.V., Comparison of the results of refractometric measurements in the process of diffusion, obtained by means of the background-oriented schlieren method and the holographic interferometry method. *Quantum Electronics*, 2015, vol. 45, iss. 8, pp. 759–764. DOI: 10.1070/QE2015v045n08ABEH015208]
12. Chashechkin, Y.D., Mitkin, V.V., Experimental study of a fine structure of 2D waves and mixing past an obstacle in a continuously stratified fluid. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 2001, vol. 34, pp. 165–187. DOI: 10.1016/S0377-0265(01)00066-5
13. Осадчий, В.Ю., Левин, И.М., Савченко, В.В., Французов, О.Н., Лабораторно-модельная установка для исследования переноса излучения и изображения через взволнованную водную поверхность. *Океанология*, 2004, т. 44, № 1, с. 154–159. [Osadchy V.Yu., Levin I.M., Savchenko, V.V., Frantsuzov, O.N., A laboratory modeling facility for the study of radiation and image transfer through an agitated water surface. *Oceanology*, 2004, vol. 4, no. 1, pp. 143–147.] EDN: OWJSVP
14. Moisy, F., Rabaud, M., Salsac, K., A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 2009, vol. 46, iss. 6, pp. 1021–1036. DOI: 10.1007/s00348-008-0608-z

15. Dalziel, S., Carr, M., Sveen, J.K., Davies, P.A., Simultaneous synthetic schlieren and PIV measurements for internal solitary waves. *Measurement Science and Technology*, 2007, vol. 18, no. 3, pp. 533–547. DOI: [10.1088/0957-0233/18/3/001](https://doi.org/10.1088/0957-0233/18/3/001)
16. Лейкин, М.В., Молочников, Б.И., Морозов, В.Н., Шакарян, Э.С., *Отражательная рефрактометрия*. Ленинград, Машиностроение, 1983. [Leikin, M.V., Molochnikov, B.I., Morozov, V.N., Shakaryan, E.S., *Otrazhatel'naya refraktometriya = Reflecting Refractometry*. Leningrad, Mashinostroenie, 1983. (in Russian)]
17. Settles, G.S., *Schlieren and shadowgraph techniques: visualizing phenomena in transparent media*. Springer, New York, 2001.
18. Tropea, C., Yarin, A.L., Foss, J.F., *Springer handbook of experimental fluid mechanics*. Springer, Berlin, 2007.
19. Белозеров, А.Ф., *Оптические методы визуализации газовых потоков*. Издательство Казанского гос. техн. ун-та, Казань, 2007. [Belozerov, A.F., *Opticheskie metody vizualizatsii gazovykh potokov = Optical methods of visualization of gas flows*. Izdatel'stvo Kazanskogo gos. tehn. un-ta, Kazan, 2007. (in Russian)]
20. Васильев, Л.А., *Теневые методы*. Наука, Москва, 1968. [Vasil'ev, L.A., *Tenevye metody = Shadow methods*. Nauka, Moscow, 1968. (in Russian)]
21. Meier, G.E., Computerized background-oriented schlieren. *Experiments in Fluids*, 2002, vol. 33, pp. 181–187. DOI: [10.1007/s00348-002-0450-7](https://doi.org/10.1007/s00348-002-0450-7)
22. Venkatakrisnan, L., Meier, G.E., Density measurements using the background oriented Schlieren technique. *Experiments in Fluids*, 2004, vol. 37, pp. 237–247. DOI: [10.1007/s00348-004-0807-1](https://doi.org/10.1007/s00348-004-0807-1)
23. Goldhahn, E., Seume, J., The background oriented Schlieren technique: sensitivity, accuracy, resolution and application to a three-dimensional density field. *Experiments in Fluids*, 2007, vol. 43, pp. 241–249. DOI: [10.1007/s00348-007-0331-1](https://doi.org/10.1007/s00348-007-0331-1)
24. Расковская, И.Л., Ринкевичюс, Б.С., Толкачев, А.В., Лазерная рефрактография оптически неоднородных сред. *Квантовая электроника*, 2007, т. 37, № 12, с. 1176–1180. EDN: [TTESSV](https://www.edn.ru/TTESSV) [Raskovskaya, I.L., Rinkevichyus, B.S., Tolkachev, A.V., Laser refractography of optically inhomogeneous media. *Kvantovaya elektronika = Quantum Electronics*, 2007, vol. 37, no. 12, pp. 1176–1180. DOI: [10.1070/QE2007v037n12ABEH013554](https://doi.org/10.1070/QE2007v037n12ABEH013554)]
25. Соيفер, В.А., Безус, Е.А., Быков, Д.А., Досколович, Л.Л., Ковалев, А.А., и др., *Дифракционная оптика и нанофотоника*. Москва, Физматлит, 2014. [Soifer, V.A., Bezus, E.A., Bykov, D.A., Doskolovich, L.L., Kovalev A.A., et al., *Difraktsionnaya optika i nanofotonika = Diffraction optics and nanophotonics*. Moscow, Fizmatlit, 2014. (in Russian)]
26. Соифер, В.А., *Оптические преобразования*. Издательство СГАУ, Самара, 2007. [Soifer, V.A., *Opticheskie preobrazovaniya = Optical transformations*. Izdatel'stvo SGAU, Samara, 2007. (in Russian)]
27. O'Shea, D.C., Suleski, T.J., Kathman, A.D., Prather, D.W., *Diffraction optics: design, fabrication, and test*. SPIE Press, Bellingham, 2003.
28. Гончарский, А.В., Попов, В.В., Степанов, В.В., Введение в компьютерную оптику. Издательство МГУ, Москва, 1991. [Goncharskiy, A.V., Popov, V.V., Stepanov, V.V., *Vvedenie v komp'yuternuyu optiku*. Izdatel'stvo MGU, Moscow, 1991. (in Russian)]
29. Taghizadeh, M.R., Blair, P., Layet, B., Barton, I.M., Waddie, A.J., Ross, N., Design and fabrication of diffractive optical elements. *Microelectronic Engineering*, 1997, vol. 37, pp. 219–242. DOI: [10.1016/S0167-9317\(97\)00188-3](https://doi.org/10.1016/S0167-9317(97)00188-3)
30. Голуб, М.А., Казанский, Н.Л., Сисакян, И.Н., Соифер, В.А., Харитонов, С.И., Дифракционный расчет оптического элемента, фокусирующего в кольцо. *Автоматрия*, 1987, № 6, с. 8–15. [Golub, M.A., Kazanskiy, N.L., Sisakyan, I.N., Soifer, V.A., Kharitonov, S.I., Diffraction calculation for an optical element which focuses into a ring. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 7–14.] EDN: [SYXXID](https://www.edn.ru/SYXXID)
31. Soifer, V.A., Korotkova, O., Khonina, S.N., Shchepakina, E.A., Vortex beams in turbulent media: review. *Computer Optics*, 2016, vol. 40, iss. 5, pp. 605–624. DOI: [10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624](https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624)
32. Виноградова, М.Б., Руденко, О.В., Сухоруков, А.П., *Теория волн*. Наука, Москва, 1979. [Vinogradova, M.B., Rudenko, O.V., Sukhorukov, A.P., *Teoriya voln = Theory of waves*. Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
33. Расковская, И.Л., Волновая модель рефракции лазерных пучков с дискретным изменением интенсивности в сечении и их применение для диагностики протяженных нестационарных фазовых

- объектов. *Квантовая электроника*, 2015, т. 45, № 8, с. 765–770. EDN: UGUZPX [Raskovskaya, I.L., A wave model of refraction of laser beams with a discrete change in intensity in their cross section and their application for diagnostics of extended nonstationary phase objects. *Quantum Electronics*, 2015, vol. 45, no. 8, pp. 765–770. DOI: [10.1070/QE2015v045n08ABEH015602](https://doi.org/10.1070/QE2015v045n08ABEH015602)]
34. Расковская, И.Л., Распространение лазерного пучка в среде с акустической волной. *Радиотехника и электроника*, 2004, т. 49, № 11, с. 1382–1389. [Raskovskaya, I.L., Propagation of a laser beam through a medium in the presence of an acoustic wave. *Radiotekhnika i elektronika = Radio engineering and electronics*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 1382–1389. (in Russian)]
35. Кравцов, Ю.А., Орлов, Ю.И., *Геометрическая оптика неоднородных сред*. Наука, Москва, 1980. [Kravtsov, Yu.A., Orlov, Yu.I., *Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred = Geometrical optics of inhomogeneous media*. Nauka, Moscow, 1980. (in Russian)]
36. Vedyashkina, A.V., Raskovskaya, I.L., Pavlov, I.N., Formation of caustics by refraction of structured laser radiation in the diffusive layer of liquid. In: *PIERS Proc.*, Czech Republic, Prague, 2015, pp. 884–887.