

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСТЯЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ОБРАЗЦОВ¹*Карякин М. И.²*

SPECIFIC FEATURES OF THE TENSION OF NONLINEARLY ELASTIC SPECIMENS

Karyakin M. I.

For all physically admissible material parameters of the Blatz-Ko model of compressible nonlinearly elastic material, a problem about plane deformation of a rectangle specimen is considered. The above deformation is due to either uniformly distributed axial load or to onward displacement of its butt ends bounded to a rigid body. For the case of uniform deformation, the region of material constants is constructed, at which the stretch diagram is not monotonic. In the case of the specimen deformation by rigid grips, the finite-element analysis package is used to study the action of boundary conditions and specimen shape on the extension diagram.

Введение

Опыт по одноосному растяжению стержней является примером классического эксперимента для определения упругих свойств твердых тел. Целью настоящей работы является изучение ряда эффектов, проявляющихся при использовании для описания этого опыта нелинейно-упругих моделей при условии, что на деформации образца не накладывается никаких ограничений, связанных с их малостью.

Для ряда моделей несжимаемых нелинейно-упругих материалов известно, в частности, что процесс одноосного растяжения может становиться неустойчивым при достаточно больших значениях растягивающих напряжений или деформаций [1]. Как правило, этот эффект проявляется для таких моделей материалов, у которых график зависимости растягивающей силы от деформации имеет точку максимума. Для сжимаемых нелинейно-упругих тел хорошо известен один пример такой немонотонной зависимости, реализующийся при использовании упрощенного варианта модели материала Блейтца и Ко [2]. В настоящей работе будет проанализирован общий случай трехконстантной модели этого материала и определена область параметров, в которой возможна потеря устойчивости при растяжении.

Классический анализ задачи об одноосном растяжении проводится обычно в предполо-

жении однородности деформаций, что имеет место в случае деформирования образца равномерно распределенной по его торцам растягивающей нагрузкой. Использование конечно-элементного пакета FlexPDE [3] позволило провести учет влияния другого типа граничного условия — крепления торцов к жестким захватам, смещающимся друг относительно друга на заданное расстояние.

1. Однородная деформация

Ограничиваясь случаем плоской деформации, представим однородную деформацию образца прямоугольной формы, занимающего до деформации область $-d \leq x_1 \leq d$, $-h \leq x_2 \leq h$, в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 x_1; \\ X_2 &= \lambda_2 x_2; \\ X_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем считать, что деформация образца вызывается осевой нагрузкой, равномерно распределенной по его торцам $x_2 = \pm h$.

Геометрические характеристики деформации (1.1) (градиент деформации \mathbf{C} , мера деформации Коши \mathbf{G} и ее главные инварианты

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00638).

²Карякин Михаил Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории упругости Южного федерального университета.

I_k) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{G} &= \lambda_1^2 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \\ I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1, \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Определяющее соотношение модели материала Блейтца и Ко для тензора напряжений Пиолы \mathbf{D} записывается как [2]

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{\mu}{2} (\beta [\mathbf{E} - I_3^{-\alpha} \mathbf{G}^{-1}] + \\ &+ (1 - \beta) I_3^{-1} [I_1 \mathbf{E} - \mathbf{G} + \\ &+ (I_3^{\alpha+1} - I_2) \mathbf{G}^{-1}]) \mathbf{C},\end{aligned}\quad (1.3)$$

где μ , α , β — материальные константы, причем при малых деформациях модуль μ имеет смысл модуля сдвига, а параметр α связан с коэффициентом Пуассона ν соотношением

$$\alpha = \frac{\nu}{1 - 2\nu}.\quad (1.4)$$

Параметр β ($0 \leq \beta \leq 1$) в терминах материальных констант линейно-упругого тела не выражается.

Поскольку для деформации вида (1.1) тензор \mathbf{D} постоянен, он автоматически удовлетворяет уравнениям равновесия, а его компонента D_{22} тождественно совпадает с распределенной по торцам нагрузкой. Целью исследования будет построение и анализ зависимости D_{22} от коэффициента осевого удлинения λ_2 .

Для определения связи коэффициента поперечного удлинения λ_1 с осевым воспользуемся граничным условием на боковой поверхности образца

$$D_{11} = 0 \text{ при } x_1 = \pm d.\quad (1.5)$$

Подставляя (1.2) в (1.3), запишем (1.5) в виде

$$\begin{aligned}(1 - \beta) (\lambda_1^{2\alpha} \lambda_2^{2\alpha} - \lambda_1^{-2}) + \\ + \beta (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2\alpha} \lambda_2^{-2\alpha}) = 0.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Рассматривая (1.6) как квадратное уравнение относительно $\lambda_2^{2\alpha}$, для его положительного корня получаем

$$\lambda_2^{2\alpha} = \lambda_1^{-2\alpha-2},$$

откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}.\quad (1.7)$$

Представление (1.7) в случае малых деформаций полностью согласуется с выражением параметра α через коэффициент Пуассона (1.4).

С учетом (1.7) находим следующее представление:

$$\begin{aligned}\frac{2D_{22}}{\mu} &= \beta \left(\lambda_2 - \lambda_2^{-\frac{3\alpha+1}{\alpha+1}} \right) + \\ &+ (1 - \beta) \left(\lambda_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} - \lambda_2^{-3} \right).\end{aligned}\quad (1.8)$$

В частном случае упрощенной модели материала Блейтца и Ко ($\beta = 0$, $\alpha = 1/2$) выражение (1.8) преобразуется к виду

$$D_{22} = \frac{\mu}{2} \left(\lambda_2^{-\frac{1}{3}} - \lambda_2^{-3} \right).$$

Последняя зависимость является немонотонной, причем максимум достигается при $\lambda_2 = 3^{3/4} \approx 2,280$, что соответствует весьма существенному удлинению.

Для другого варианта модели материала Блейтца и Ко, названного в [2] «гипотетическим», $\beta = 1$ и зависимость D_{22} от λ_2 принимает вид

$$D_{22} = \frac{\mu}{2} \left(\lambda_2 - \lambda_2^{-\frac{3\alpha+1}{\alpha+1}} \right).\quad (1.9)$$

Разыскивая экстремальные точки зависимости (1.9), приходим к уравнению

$$(3\alpha + 1)l^2 + (\alpha + 1) = 0,$$

где $l = \lambda_2^{(-2\alpha+1)/(\alpha+1)}$, которое не имеет корней при положительных значениях параметра α (т. е. при $0 < \nu < 1/2$). Это означает, что при $\beta = 1$ зависимость растягивающей силы от удлинения будет монотонной при всех физически допустимых значениях α .

Проверка на немонотонность графика зависимости силы от удлинения в общем случае состоит в вычислении производной $\partial D_{22}/\partial \lambda_2$ по (1.8) и нахождении тех значений $\lambda_2 > 1$, при которых последняя обращается в нуль, либо в доказательстве отсутствия таковых.

Дифференцируя (1.8) по λ_2 , находим, что экстремальные значения коэффициента осевого удлинения должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)(1 - \beta)\lambda_2^{-\frac{2}{\alpha+1}} + (3\alpha + 1)\beta\lambda_2^{-\frac{4\alpha+2}{\alpha+1}} + \\ + (1 + \alpha)\beta + (1 + \alpha)(1 - \beta)\lambda_2^{-4} = 0.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Очевидно, при $\alpha \geq 1$ все слагаемые в (1.10) либо положительны, либо неотрицательны, а,

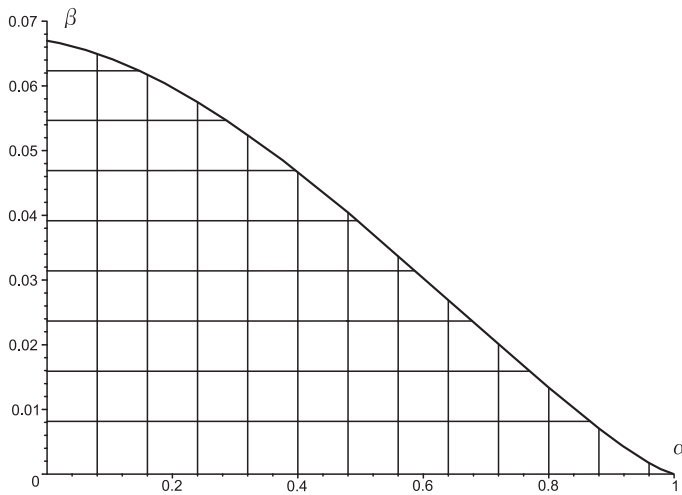


Рис. 1. Область значений материальных параметров, при которых существуют экстремальные точки на диаграмме растяжения

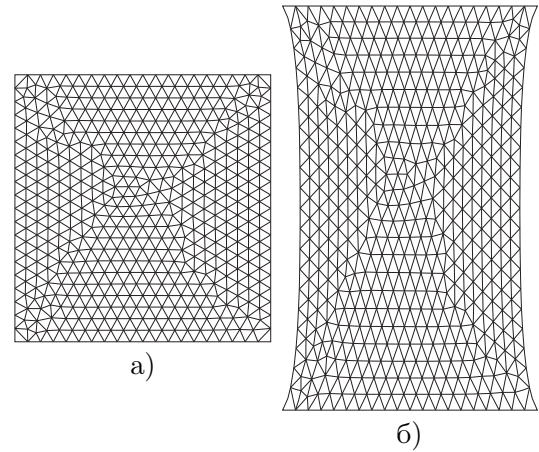


Рис. 2. Пример конечно-элементного разбиения: а) исходная сетка; б) деформированная сетка

следовательно, их сумма не может обращаться в нуль. Это означает, что экстремальные точки на графике растяжения возможны лишь при $\alpha < 1$, что соответствует значениям коэффициента Пуассона $\nu < 1/3$.

На рис. 1 приведена построенная численно область изменения параметров α и β , в которой уравнение (1.10) имеет решения, большие единицы. Именно при выборе значений параметров модели из этой области можно, по-видимому, ожидать проявления эффектов потери устойчивости при растяжении.

Следует отметить, что случай плоской деформации использовался в данной работе не для упрощения анализа рассматриваемой задачи, а для возможности сравнения с результатами описанного во второй части численного исследования задачи о растяжении жесткими захватами. Что же касается трехмерного случая однородной деформации, то все сформулированные выше результаты переносятся на нее автоматически, причем речь идет не только о качественном совпадении результатов, но и об их количественной близости.

2. Растяжение жесткими захватами

Процесс деформирования образца, жестко закрепленного между двумя абсолютно твердыми плоскостями, в рамках принятой выше гипотезы о плоской деформации описывается преобразованием отсчетной конфигурации

$-d \leq x_1 \leq d, -h \leq x_2 \leq h$ в текущую:

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi(x_1, x_2); \\ X_2 &= \eta(x_1, x_2); \\ X_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем считать нижнюю плиту неподвижной, а верхнюю — смещающейся вдоль оси x_2 на расстояние e в положительном или отрицательном направлении. Боковые грани образца по-прежнему считаем свободными от нагрузки, а граничные условия на торцевых поверхностях принимают вид

$$\begin{aligned} \xi(x_1, -h) &= x_1; & \eta(x_1, -h) &= 0; \\ \xi(x_1, h) &= x_1; & \eta(x_1, h) &= h \pm e. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Знак «плюс» перед e в (2.2) соответствует растяжению, знак «минус» — сжатию.

Постановка типа (2.1), (2.2) использовалась в [4], где приведен подробный обзор подходов и результатов, полученных для данной задачи о сжатии в рамках линейной теории упругости, а также предложены некоторые способы ее численного анализа в рамках нелинейной теории, основанные либо на аппроксимации функций $\xi(x_1, x_2)$, $\eta(x_1, x_2)$ функциями одной переменной и использовании метода Эйлера-Лагранжа, либо на аналогичных аппроксимациях компонент тензора напряжений. В настоящей работе акцент сделан на задаче растяжения, а численные результаты получены с использованием МКЭ.

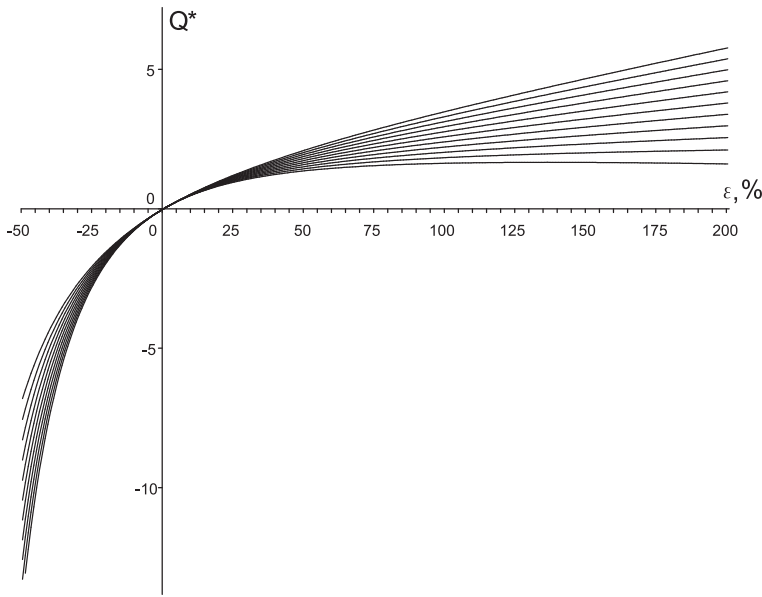


Рис. 3. Диаграммы растяжения-сжатия

Тензорные характеристики деформации (2.1) записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \xi_{x_1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \eta_{x_1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \\ &+ \xi_{x_2} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + \eta_{x_2} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{G} &= (\xi_{x_1}^2 + \eta_{x_1}^2) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \\ &+ (\xi_{x_1} \xi_{x_2} + \eta_{x_1} \eta_{x_2}) (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + \\ &+ (\xi_{x_2}^2 + \eta_{x_2}^2) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В (2.3) использованы обозначения $\xi_{x_1} = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}$ и т.д.

Уравнения равновесия $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ для тензора напряжений Пиолы сводятся в этом случае к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial D_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (2.4)$$

Как и выше, в качестве модели материала используем общий трехконстантный вариант модели Блейтца и Ко.

Выражения для компонент тензора Пиолы приобретают вид

$$\begin{aligned} D_{11} &= -\frac{\mu}{\Delta^3} [(1-\beta)(\xi_{x_1}^2 + \xi_{x_2}^2 + \eta_{y_1}^2 + \eta_{y_2}^2)\eta_{y_2} + \\ &+ (\beta\Delta^{-2\alpha} - (1-\beta)\Delta^{2\alpha})\Delta^2\eta_{y_2} - \\ &- ((1-\beta)\Delta + \beta\Delta^3)\xi_{x_1}], \end{aligned}$$

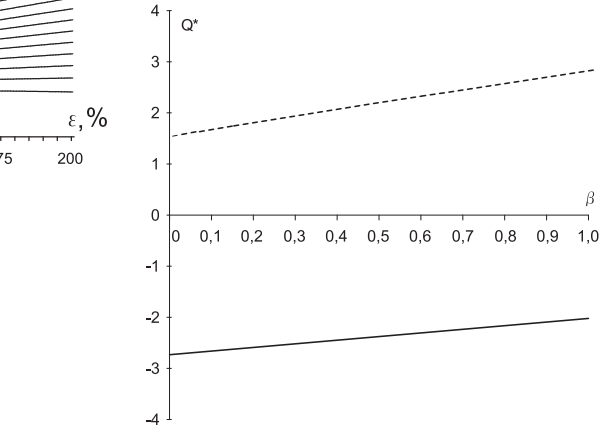


Рис. 4. Зависимость осевой силы от материальных констант

$$\begin{aligned} D_{12} &= \frac{\mu}{\Delta^3} [(1-\beta)(\xi_{x_2}^2 + \eta_{y_2}^2)\xi_{x_2} + \\ &+ (1-\beta)(\xi_{x_1}\xi_{x_2} + \eta_{y_1}\eta_{y_2})\xi_{x_1} + \\ &+ (\beta\Delta^{-2\alpha} - (1-\beta)\Delta^{2\alpha})\Delta^2\xi_{x_2} + \\ &+ \beta\Delta^3\eta_{y_1}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} D_{21} &= \frac{\mu}{\Delta^3} [(1-\beta)(\xi_{x_2}^2 + \eta_{y_2}^2)\eta_{y_1} + \\ &+ (1-\beta)(\xi_{x_1}\xi_{x_2} + \eta_{y_1}\eta_{y_2})\eta_{y_2} + \\ &+ (\beta\Delta^{-2\alpha} - (1-\beta)\Delta^{2\alpha})\Delta^2\eta_{y_1} + \\ &+ \beta\Delta^3\xi_{x_2}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{22} &= -\frac{\mu}{\Delta^3} [(1-\beta)(\xi_{x_1}^2 + \xi_{x_2}^2 + \eta_{y_1}^2 + \eta_{y_2}^2)\xi_{x_1} + \\ &+ (\beta\Delta^{-2\alpha} - (1-\beta)\Delta^{2\alpha})\Delta^2\xi_{x_1} - \\ &- ((1-\beta)\Delta + \beta\Delta^3)\eta_{y_2}], \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \xi_{x_1}\eta_{y_2} - \xi_{x_2}\eta_{y_1}.$$

При автоматическом упрощении в процессе генерирования уравнений равновесия с использованием пакета аналитических вычислений Maple 10 зависимости (2.5) удастся представить в еще более компактной форме, так что для записи уравнений (2.4) требуется около тридцати коротких (от 20 до 60 символов) строк программного кода, предназначенного для использования в рамках пакета конечно-элементного анализа FlexPDE [3]. Именно полученные при его использовании результаты

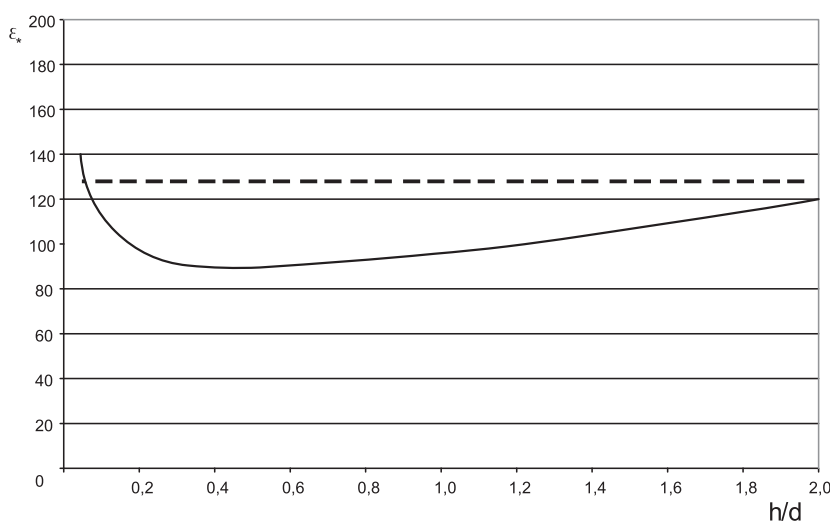


Рис. 5. Влияние высоты на критическую деформацию

и являются предметом дальнейшего обсуждения.

На рис. 2 представлена типичная сетка метода конечных элементов (в данном случае число узлов — 1969, число конечных элементов — 944). Адаптивные алгоритмы измельчения сетки приводили в ряде случаев к сеткам из восьми-десяти тысяч узлов.

На рис. 3 приведены диаграммы растяжения-сжатия образца, имевшего до деформации форму широкого прямоугольника ($h/d = 0,1$). По оси абсцисс отложена выраженная в процентах относительная деформация ε , понимаемая как отношение изменения длины образца e к его начальной длине. В рассмотренном диапазоне деформаций уточнение определений становится существенным хотя бы потому, что 50%-ная деформация сжатия на графике означает двукратное уменьшение длины образца, тогда как двукратному растяжению соответствует 100%-я деформация удлинения. По оси ординат отложено безразмерное растягивающее усилие $Q_* = Q/\mu$,

$$Q = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d D_{22} dx_1.$$

Из уравнений равновесия и краевых условий на боковых сторонах прямоугольника следует, что величина Q является константой, т. е. не зависит от x_2 . Действительно, вычисляя производную dQ/dx_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx_2} &= \int_{-d}^d \frac{dD_{22}}{dx_2} dx_1 = \\ &= - \int_{-d}^d \frac{dD_{12}}{dx_1} dx_1 = D_{12} \Big|_{-d}^d = 0. \end{aligned}$$

Все графики соответствуют одному и тому же значению параметра $\alpha = 0,5$, именно поэтому они имеют общую касательную в начале координат. Параметр β изменялся от 0 до 1 с шагом 0,1. Видно, что, как и в случае однородной деформации, кривая растяжения при достаточно малых β имеет точку максимума (в частности, при $\beta = 0$ он достигается при деформации в 136%). При $\beta \approx 1$ графики достаточно быстро возрастают, что свидетельствует, по-видимому, об отсутствии экстремальных точек.

Выбор образца столь малой высоты для построения диаграммы растяжения-сжатия связан исключительно с желанием построить эту диаграмму и для случая больших сжатий. Для более высоких образцов ($h/d \approx 1$ и больше) проведение расчетов при достаточно больших сжатиях оказалось невозможным, что, по-видимому, следует связать с процессами классической потери устойчивости при сжатии.

На рис. 4 более подробно показана зависимость осевой силы от материального параметра β : верхняя пунктирная линия соответствует деформации растяжения в 75%, нижняя — 25%-й деформации сжатия. Из графиков видно, что одна и та же деформация при увеличении β может потребовать почти двукратного увеличения растягивающей силы. Таким образом, параметр β при сверхбольших деформациях становится связан с жесткостью при растяжении.

В отличие от случая однородной деформации влияние на диаграмму растяжения-сжатия может оказывать форма образца. Существенность такого влияния демонстрирует

рис. 5, где приведены зависимости критической деформации ε_* (т.е. деформации, соответствующей точке экстремума на диаграмме растяжения), выраженной в процентах, от относительной высоты h/d образца. Если для достаточно высоких образцов ($h/d > 2$) отличие от случая однородной деформации (пунктирная прямая на рис. 5) не превышает 5%, то в диапазоне $0,2 \leq h/d \leq 1$ критическая деформация для прикрепленного стержня на 20–25% меньше, чем для свободного. Интересно отметить, что с уменьшением высоты критическая деформация резко возрастает и уже при $h/d = 0,05$ почти на 15% превосходит значения для незакрепленного образца.

Анализ проведенных расчетов показывает, что для обоих случаев моделирования эксперимента по одноосному растяжению образцов на диаграммах растяжения могут существовать точки нарушения монотонности. Если считать эти точки близкими к точкам потери устойчивости при растяжении, то нужно

отметить, что граничные условия могут также существенно влиять на потерю устойчивости сжатых стержней. В свою очередь, степень этого влияния и даже его знак могут существенно зависеть от формы образца.

Литература

1. *Зубов Л. М., Рудев А. Н.* О неустойчивости растянутого нелинейно-упругого бруса // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 786–798.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Backstrom G.* Fields of Physics by Finite Element Analysis // FlexPDE: finite element model builder for Partial Differential Equations [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.pdesolutions.com/cgi-bin/getbook50> (20 июня 2005)
4. *Haddow J. B., Ogden R. W.* Compression of bonded elastic bodies // J. Mech. Phys. Solids. 1988. Vol. 36. No. 5. P. 551–579.