

УДК 539.375:534.1

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ С СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ¹***Прякина О. Д.², Смирнова А. В.³*****DYNAMIC PROBLEMS FOR COMPOSITE PIEZOELECTRICS WITH A SYSTEM OF ELECTRODES*****Pryakhina O. D., Smirnova A. V.***

An effective analytical method is offered to study dynamic problems of electrical elasticity for semi-bounded composite medium at the presence of a system of electrodes on the surface and interfaces, the latter are arbitrary in number and combination.

Keywords: composite piezoelectrics, systems of electrodes, coupled mechanical and electrical fields.

Большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению явления пьезоэффекта, обусловлено не только потребностями фундаментальных исследований, но и широкими возможностями применения пьезоэлектриков в различных областях техники. Так, например, учет особенностей формирования акустических полей в кристаллах позволяет создавать высокоэффективные фильтры и устройства обработки сигналов, устройства управления лазерным излучением и т.д. Стремительное развитие нанотехнологий в последние годы вызвало новую волну интереса к этой проблематике, поскольку использование уникальных свойств акустических волн в пьезоэлектрических средах, в том числе и составных, открывает перспективы дальнейшей микроминиатюризации акустоэлектронных приборов с сохранением их высокой надежности. Кроме того, в современном материаловедении интенсивно ведется поиск новых активных пьезоэлектрических материалов и их композиций для реализации возможности целенаправленного управления скоростью звука. В этой связи актуальным является создание методов, позволяющих анализировать структуру и характеристики распростране-

ния волновых полей в составных пьезоэлектрических средах.

Для исследования сопряженных механических и электрических полей в слоистых электроупругих материалах с системами поверхностных и внутренних электродов необходимо уметь строить блочную матрицу-символ Грина для составной среды с разрывными граничными условиями на стыке слоев.

С этой целью в работе на примере антиплоских колебаний рассматривается динамическая задача электроупругости для полуграниченной кусочно-однородной среды при наличии системы электродов на поверхности и на границах раздела слоев. Важнейшим моментом при решении задачи является построение функционально-матричных соотношений, связывающих механические перемещения и напряжения, электрическую индукцию и потенциал, а также их скачки на границах неоднородностей, позволяющие определить динамические характеристики в произвольной точке среды. Эти соотношения являются основой построения систем интегральных уравнений смешанных задач, для решения которых можно применять метод фиктивного поглощения, метод факторизации или численные методы. Для построе-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

²Прякина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.; e-mail: dopna@kubsu.ru

³Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.; e-mail: vtppchs@kubsu.ru

ния и исследования указанных соотношений разработан высокоэффективный аналитический метод [1–3], основанный на использовании специального представления решения для одного слоя [4]. Метод позволяет аналитически исследовать структуру сопряженных полей в электроупругих средах с произвольным количеством слоёв и произвольным сочетанием непрерывных и разрывных граничных условий.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях пакета из N плоскопараллельных электроупругих слоев толщины $H = 2(h_1 + h_2 + \dots + h_N)$, занимающего объем $-H \leq y \leq 0$, $-\infty \leq x, z \leq +\infty$ (h_k — полутолщина k -го слоя). На границах смены физико-механических свойств слоев имеются включения типа внутренних электродов, расположенные в областях

$$\Omega_k : \left\{ y = -2 \sum_{j=1}^k h_j, a_k \leq x \leq b_k, -\infty < z < +\infty \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Поверхность среды электродирована (покрыта бесконечно тонким металлическим слоем) и подвергается механическому и электрическому воздействию, характеризующемуся вектором, имеющим своими компонентами составляющие вектора механического усилия и нормальную составляющую вектора электрической индукции, которые могут быть заданными, либо определяться из решения контактной задачи. Нижняя грань пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием, металлизирована и закорочена.

Будем считать, что электроупругие слои принадлежат классу $6mm$ гексагональной сингонии (пьезокерамика, поляризованная вдоль оси z). В этом случае имеем антиплоскую задачу о сдвиговых колебаниях, в которой заданные и искомые векторные величины имеют только две составляющие, не зависящие от координаты z

$$\mathbf{t}_k = \{t_k(x), d_k(x)\}e^{-i\omega t},$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\mathbf{w}_k = \{w_k(x, y), \varphi_k(x, y)\}e^{-i\omega t},$$

$$\Delta \mathbf{t}_k = \{\Delta t_k(x), \Delta d_k(x)\}e^{-i\omega t}.$$

Здесь $\mathbf{t}_k$ — векторы, характеризующие взаимодействие между слоями (t_k — сдвиговые напряжения, d_k — нормальная компонента вектора электрической индукции); $\mathbf{w}_k$ — вектор, компонентами которого являются смещения w_k точек k -го слоя и электрический потенциал φ_k ; $\Delta \mathbf{t}_k$ — вектор, компоненты которого $\Delta t_k(x)$ — скачок напряжений, $\Delta d_k(x)$ — скачок электрической индукции при переходе через включение, $\Delta \mathbf{t}_k = \mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k$; t — время, ω — частота колебаний.

На поверхности среды и на границах раздела слоев заданы смешанные условия

$$y = 0 : \quad \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x)e^{-i\omega t},$$

$$x \in \Omega_0, \quad \mathbf{t}_0 = 0, \quad x \notin \Omega_0;$$

$$y = -2 \sum_{j=1}^k h_j : \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_k(x)e^{-i\omega t}, & x \in \Omega_k, \\ \Delta \mathbf{t}_k(x) = 0, & x \notin \Omega_k, \\ k = 1, 2, \dots, N-1; \end{cases}$$

$$y = -H : \quad \mathbf{w}(x, -H) = 0, \quad -\infty < x, z < \infty.$$

Если на поверхности среды и на границах раздела слоев имеется не один, а несколько электродов, занимающих области Ω_{0l} , $l = 1, 2, \dots, M_0$ и Ω_{km} , $k = 1, 2, \dots, N-1$, $m = 1, 2, \dots, M_k$, то граничные условия на верхней грани и на стыке слоев переписываются в виде

$$y = 0 : \quad \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{0l}(x)e^{-i\omega t}, & x \in \Omega_{0l}, \\ \mathbf{t}_{0l} = 0, & x \notin \Omega_{0l}, \end{cases}$$

$$y = -2 \sum_{j=1}^k h_j : \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{km}(x)e^{-i\omega t}, & x \in \Omega_{km}, \\ \Delta \mathbf{t}_{km}(x) = 0, & x \notin \Omega_{km}, \end{cases}$$

где M_k — количество дефектов в k -ой плоскости раздела слоев.

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен и рассматриваются амплитудные значения заданных и искомых функций.

2. Построение основных матрично-функциональных соотношений

Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$x_k = x, \quad y_k = y + 2 \sum_{m=1}^{k-1} h_m + h_k,$$

$$-h_k \leq y_k \leq h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Задача сводится к определению амплитудных функций механических смещений $w_k(x, y)$ и электрического потенциала $\varphi_k t(x, y)$ в k -ом слое из системы дифференциальных уравнений размерности $2 \times N$, которая в безразмерных величинах имеет вид

$$\Delta w_k(x, y) + e_k \Delta \varphi_k(x, y) + \omega_k^2 w_k(x, y) = 0, \quad (2.1)$$

$$e_k \Delta w_k(x, y) - \varepsilon_k \Delta \varphi_k(x, y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\omega_k^2 = \frac{\rho_k \omega^2 b^2}{c_{44}^k}, \quad e_k = \frac{l e_{15}^k}{c_{44}^k}, \quad \varepsilon_k = \frac{l^2 \varepsilon_{11}^k}{c_{44}^k}$$

— безразмерные величины; c_{44}^k , e_{15}^k , ε_{11}^k , ρ_k — упругая и пьезоэлектрическая постоянные, диэлектрическая проницаемость, плотность k -го слоя соответственно; Δ — двумерный оператор Лапласа; b — характерный линейный размер; l имеет размерность электрического поля. Перемещения отнесены к b , электрический потенциал — к lb .

Для построения решения указанной системы в предположении установившихся колебаний предварительно необходимо сформулировать однородные граничные условия.

Предположим, что на поверхности среды задано динамическое воздействие, характеризуемое вектором $\mathbf{t}_0$

$$y_1 = h_1: \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_0(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

На границах раздела слоёв $y_k = -h_k$ имеют место непрерывные условия для вектора $\mathbf{w}_k$ и разрывные для вектора $\mathbf{t}_k$

$$y_k = -h_k: \quad \mathbf{w}_k(x, -h_k) = \mathbf{w}_{k+1}(x, h_{k+1}),$$

$$\mathbf{t}_{k+1}(x) = \mathbf{t}_k(x) + \Delta \mathbf{t}_k(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

На нижней грани пакета слоёв выполняются условия жёсткой заделки и металлизации

$$y_N = -h_N:$$

$$\mathbf{w}_N(x, -h_N) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Если среда представляет собой пакет слоёв, жёстко сцеплённый с электроупругим полупространством, то последнее соотношение следует заменить условием

$$\mathbf{w}_N(x, y_N - h_N) \rightarrow 0, \quad h_N \rightarrow \infty.$$

Введем оператор преобразования Фурье по переменной x

$$F\mathbf{t}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{t}(x) e^{i\alpha x} dx = \mathbf{T}(\alpha).$$

Тогда решение уравнений (2.1), (2.2) для k -го слоя будет определяться выражением (в трансформантах Фурье)

$$\mathbf{W}_k(y_k) = \frac{1}{c_k} [\mathbf{B}_+(y_k) \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{B}_-(y_k) (\mathbf{T}_k + \Delta \mathbf{T}_k)], \quad (2.3)$$

где $\mathbf{T}_0 = F\mathbf{t}_0$, $\mathbf{T}_k = F\mathbf{t}_k$, $\mathbf{W}_k = F\mathbf{w}_k$, $\Delta \mathbf{T}_k = F\Delta \mathbf{t}_k$, $c_k = c_{44}^k / c_{44}^1$. Механические напряжения отнесены к c_{44}^1 , электрическая индукция — к l/c_{44}^1 .

Так как на границах раздела слоёв имеют место непрерывные граничные условия для перемещений и электрического потенциала, то условия стыковки слоёв имеют вид

$$\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1}), \quad (2.4)$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1,$$

а условие на нижней грани пакета слоёв

$$\mathbf{W}_N(-h_N) = 0. \quad (2.5)$$

Граничные условия (2.4), (2.5), с учетом (2.3) приводят к рекуррентным формулам для определения векторов $\mathbf{T}_k$

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{G}_k \mathbf{T}_{k-1} - (\mathbf{\Lambda}_k + \Delta \mathbf{T}_k), \quad (2.6)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = g_k \mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{B}_-(h_{k+1}) \mathbf{\Lambda}_{k+1} + \mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}) \Delta \mathbf{T}_k),$$

$$\mathbf{\Lambda}_N = 0, \quad \Delta \mathbf{T}_N = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k(h_k, \dots, h_N) = \\ = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k \mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}, \dots, h_N), \\ k = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_N(h_N) = \mathbf{B}_-(-h_N), \quad g_k = \frac{c_k}{c_{k+1}}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) \equiv \mathbf{R}_{N-k+1}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N)$ — матрицы-символы Грина пакета k слоев без дефектов, определяемые по формуле [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) = \\ = \mathbf{B}_+(h_k) + \mathbf{B}_+(h_k) \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{G}_k. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Полагая в (2.6) последовательно $k = 1, 2, \dots, N$, определим вектор $\mathbf{T}_k$, действующий на k -ый слой через поверхностную нагрузку $\mathbf{T}_0$ и скачки $\Delta \mathbf{T}_k$ на берегах включения

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k = \prod_{j=k}^1 \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{G}_j \mathbf{T}_0 - \\ - \sum_{m=2}^k \prod_{j=k}^m \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{G}_j (\mathbf{\Lambda}_{m-1} + \Delta \mathbf{T}_{m-1}) - \\ - (\mathbf{\Lambda}_k + \Delta \mathbf{T}_k). \quad (2.9) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.3), определим вектор $\mathbf{W}_k$ (смещения точек и электрический потенциал в k -м слое)

$$\mathbf{W}_1(y_1) = \frac{1}{c_1} \{ \mathbf{R}_N(y_1) \mathbf{T}_0 - \mathbf{B}_-(y_1) \mathbf{\Lambda}_1 \},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k(y_k) = \\ = \frac{1}{c_k} \left\{ \mathbf{R}_{N-k+1}(y_k) \left[\prod_{j=k-1}^1 \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{G}_j \mathbf{T}_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - (\mathbf{\Lambda}_{k-1} + \Delta \mathbf{T}_{k-1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m=2}^{k-1} \prod_{j=k-1}^m \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{G}_j (\mathbf{\Lambda}_{m-1} + \Delta \mathbf{T}_{m-1}) \right] - \right. \\ \left. - \mathbf{B}_-(y_k) \mathbf{\Lambda}_k \right\}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$k = 2, \dots, N.$$

Соотношения (2.9) представимы в виде

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{Y}_{k1} \mathbf{T}_0 + \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{L}_{km}^0 \Delta \mathbf{T}_m. \quad (2.11)$$

Здесь приняты обозначения

$$\mathbf{Y}_{km} = \begin{cases} \prod_{i=k}^m (\mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{G}_i), & m \geq k, \\ \mathbf{I}, & m < k, \end{cases}$$

$$\mathbf{L}_{km}^0 = \begin{cases} \mathbf{A}_{1m}, & k = 1, \\ \mathbf{Y}_{kk} \mathbf{L}_{(k-1)m}^0, & k > m, \\ \mathbf{Y}_{kk} \mathbf{L}_{(k-1)m}^0 + \mathbf{A}_{km}, & k \leq m, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{km} = \\ = -\mathbf{S}_k^{-1} \prod_{i=k}^m \mathbf{S}_i [\mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{B}_-(-h_m) - (1 - \delta_{km}) \mathbf{I}], \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{cases} \mathbf{I}, & k = 1, \\ g_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^{-1} \mathbf{B}_-(h_k), & k = 2, \dots, N, \end{cases}$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

$\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Преобразуем решение (2.10) к виду, более удобному для построения систем интегральных уравнений (СИУ) смешанной задачи в случае большого числа включений

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k(y_k) = \frac{1}{c_k} \mathbf{R}_{N-k+1}(y_k) \times \\ \times \left[\mathbf{Y}_{(k-1)1} \mathbf{T}_0 - \mathbf{Z}_k \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{P}_{km}^0 \Delta \mathbf{T}_m \right], \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_k = \delta_{1k} \mathbf{R}_N^{-1}(y_1) + (1 - \delta_{1k}) \mathbf{I}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\mathbf{P}_{km}^0 = \begin{cases} -\mathbf{B}_-(y_1) \mathbf{A}_{1m}, & k = 1, \\ \mathbf{L}_{(k-1)m}^0 - \mathbf{B}_-(y_k) \mathbf{A}_{km}, & m > k-1, \\ \mathbf{L}_{(k-1)m}^0, & m \leq k-1. \end{cases}$$

Применяя к (2.12) обратное преобразование Фурье, получим интегральное представление решения, позволяющее определить смещения $w_k(x, y)$ и электрический потенциал $\varphi_k(x, y)$ в k -ом слое.

Соотношения (2.12) являются искомыми матрично-функциональными соотношениями при моделировании электроупругого материала пакетом N слоев с включениями на их стыках, позволяющими построить СИУ смешанной задачи (1.1) или (1.2), связывающих перемещения и электрический потенциал со скачками напряжений и электрической индукции на границах включений.

Если поверхность свободна от усилий и является непроводящей, то имеем

$$\mathbf{T}_k = \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{L}_{km}^0 \Delta \mathbf{T}_m,$$

$$\mathbf{W}_k(y_k) = -\frac{1}{c_k} \mathbf{R}_{N-k+1}(y_k) \mathbf{Z}_k \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{P}_{km}^0 \Delta \mathbf{T}_m.$$

Полагая в (2.11), (2.12) $\Delta \mathbf{T}_k = 0$, приходим к случаю идеального контакта между слоями

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{Y}_{k1} \mathbf{T}_0,$$

$$\mathbf{W}_k(y_k) = \frac{1}{c_k} \mathbf{R}_{N-k+1}(y_k) \mathbf{Y}_{(k-1)1} \mathbf{T}_0.$$

С помощью (2.11), (2.12) можно решать и другие частные задачи, например, когда одно или несколько этажно-расположенных включений внутри однородного слоя ориентированы параллельно его границам. Для этого в исходной задаче необходимо положить равными физико-механические параметры для всех слоев, на стыках которых находятся включения. В этом случае толщины $2h_k$ этих слоев определяют глубину залегания включений и расстояния между ними.

Система функционально-матричных соотношений, связывающих в трансформантах Фурье векторы $\mathbf{W}_k(h_k)$, характеризующие перемещения и электрический потенциал на верхней грани k -го слоя ($k = 1, 2, \dots, N$), векторы $\Delta \mathbf{T}_m$ ($m = 1, 2, \dots, N-1$), описывающие скачки напряжений и электрической индукции на границах включений и вектор внешнего воздействия на поверхности среды $\mathbf{T}_0$ методом работы [1] получена в форме

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{V}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N),$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{T}_0, \Delta \mathbf{T}_1, \Delta \mathbf{T}_2, \dots, \Delta \mathbf{T}_{N-1}).$$

Здесь $\mathbf{W}_k = \{W_k, \Phi_k\}$, $\mathbf{T}_0 = \{T_0, D_0\}$, $\Delta \mathbf{T}_k = \{\Delta T_k, \Delta D_k\}$ — трансформанты Фурье векторов $\mathbf{w}_k = \{w_k, \varphi_k\}$, $\mathbf{t}_0 = \{t_0, d_0\}$, $\Delta \mathbf{t}_k = \{\Delta t_k, \Delta d_k\}$.

Элементами блочной матрицы $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{km})$, $k, m = 1, 2, \dots, N$ являются матрицы-функции

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_N(h_1) \equiv \mathbf{R}_N(h_1, \dots, h_N),$$

$$\mathbf{K}_{1m} = \mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{P}_{2m} \mathbf{L}_{m-1},$$

$$\mathbf{K}_{k1} = \mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) \mathbf{D}_{k1},$$

$$\mathbf{K}_{km} = \left(\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) \prod_{s=2}^k \mathbf{D}_{ks} \mathbf{P}_{sm} + \right. \\ \left. + \mathbf{B}_-(h_k) \mathbf{P}_{(k+1)m} \right) \mathbf{L}_{m-1}, \quad k < m, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{K}_{km} = \mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) \times \\ \times \left(\prod_{s=2}^m \mathbf{D}_{ks} \mathbf{P}_{sm} \mathbf{L}_{m-1} + \mathbf{D}_{km} \right), \quad (2.15)$$

$$k \geq m,$$

при этом

$$\mathbf{D}_{km} = \begin{cases} \prod_{i=k-1}^m \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{G}_i, & k > m, \\ \mathbf{I}, & k = m, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}_{km} = \prod_{i=k}^{m-1} g_{i-1} \mathbf{F}_{i-1}^{-1} \mathbf{B}_-(h_i),$$

$$\mathbf{L}_m = g_m \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{R}_{N-m}(h_{m+1}).$$

Матрицы $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{G}_k$, $\mathbf{R}_k$ даются формулами (2.7), (2.8).

Базовые матрицы $\mathbf{B}_{\pm}(h_k)$, через которые выражаются все остальные матрицы, входящие в матрично-функциональные соотношения (2.13), (2.14), имеют структуру

$$\mathbf{B}_{\pm}(h_k) = \begin{pmatrix} n_1^{\pm}(h_k) & \frac{e_k}{\varepsilon_k} n_1^{\pm}(h_k) \\ \frac{e_k}{\varepsilon_k} n_1^{\pm}(h_k) & \frac{e_k^2}{\varepsilon_k^2} n_1^{\pm}(h_k) - \frac{1}{\varepsilon_k} n_2^{\pm}(h_k) \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц $\mathbf{B}_{\pm}$ зависят от параметра α преобразования Фурье по переменной x , частоты колебаний ω и физико-механических параметров среды.

Функции $n_j^{\pm}(h_k)$ представимы в виде отношения целых функций

$$n_1^{\pm}(h_k) = \frac{n_{10}^{\pm}(h_k)}{\Delta_{10}(h_k)}, \quad n_2^{\pm}(h_k) = \frac{n_{20}^{\pm}(h_k)}{\Delta_{20}(h_k)},$$

$$n_{10}^{+} = \text{ch}(2h_k \sigma_k), \quad n_{10}^{-} = -1,$$

$$n_{20}^{+} = \text{ch}(2\alpha h_k), \quad n_{20}^{-} = -1,$$

$$\Delta_{10} = \sigma_k (1 + \kappa_{0k}^2) \text{sh}(2\sigma h_k),$$

$$\Delta_{20} = \alpha \text{sh}(2\alpha h_k).$$

Здесь

$$\sigma_k^2 = \alpha^2 - \frac{\omega_k^2}{1 + \kappa_{0k}^2}, \quad \kappa_{0k}^2 = \frac{e_k^2}{\varepsilon_k},$$

Переход к слоистому полупространству осуществляется аналогично изложенному в [2].

3. Переход к смешанной задаче

Если на поверхности среды и на стыках слоев имеют место смешанные граничные условия (1.2), записанные в локальных координатах

$$y_1 = h_1 :$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_{0l}(x), \quad x \in \Omega_{0l}; \quad \mathbf{t}_{0l} = 0, \quad x \notin \Omega_{0l},$$

$$y_k = -h_k :$$

$$\mathbf{w}_{km}(x) = \mathbf{w}_{(k+1)m}(x), \quad x \in \Omega_{km}; \\ \Delta \mathbf{t}_{km} = 0, \quad x \notin \Omega_{km},$$

$$y_N = -h_N : \quad \mathbf{w}_N = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

то на основе соотношений (2.13), (2.14) легко выписываются СИУ динамической смешанной задачи относительно неизвестных векторов скачков напряжений, электрической индукции на границах включений и контактных напряжений, плотности распределения зарядов на поверхности среды.

Введем интегральные матричные операторы

$$\tilde{\mathbf{K}}(\Omega) \mathbf{t} = \int_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi) \mathbf{t}(\xi) d\xi,$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} \mathbf{K}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$\mathbf{L}_q(\mathbf{t}_{0l}, \Delta \mathbf{t}_{km}) = \sum_{l=1}^{M_0} \tilde{\mathbf{K}}_{q1}(\Omega_{0l}) \mathbf{t}_{0l} + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \tilde{\mathbf{K}}_{q(k+1)}(\Omega_{km}) \Delta \mathbf{t}_{km}, \\ q = 1, 2, \dots, N.$$

Выбор контура δ диктуется принципом излучения [5]. Блочную матрицу $\mathbf{K}(\alpha)$ с элементами-матрицами $\mathbf{K}_{km}(\alpha)$ (2.14) будем называть матрицей-символом построенной СИУ.

В принятых обозначениях СИУ, имеющая размерность $M + M_0$ ($M = M_1 + M_2 + \dots + M_{N-1}$ — общее количество включений в среде, M_0 — количество электродов на поверхности), запишется в виде

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{t}_{0l}, \Delta \mathbf{t}_{km}) = \mathbf{w}_{0s}(x),$$

$$x \in \Omega_{0s}, \quad s = 1, 2, \dots, M_0;$$

$$\mathbf{L}_{p+1}(\mathbf{t}_{0l}, \Delta \mathbf{t}_{km}) = \mathbf{w}_{pn}(x),$$

$$x \in \Omega_{pn}, \quad n = 1, 2, \dots, M_p,$$

$$p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Здесь Ω_{0s} — области контакта штампов-электродов с поверхностью среды, Ω_{pn} — области, занимаемые электродами-включениями в плоскостях $y_p = -h_p$; $\mathbf{w}_{0s}$, $\mathbf{w}_{pn}$ — заданные амплитудные векторы, имеющие своими компонентами сдвиговые перемещения и электрический потенциал.

Полученные уравнения позволяют исследовать разные аспекты динамики слоистого пьезоэлектрического материала с учетом связанности электрических и механических полей.

Полагая $\Delta \mathbf{t}_{km} = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, N - 1$, приходим к задаче для многослойного материала без дефектов и известному матричному ИУ свертки [4]

$$\sum_{l=1}^{M_0} \tilde{\mathbf{K}}_{11}(\Omega_{0l}) \mathbf{t}_{0l} = \mathbf{w}_{0s}(x), \quad (3.1)$$

$$x \in \Omega_{0s}, \quad s = 1, 2, \dots, M_0.$$

Если принять $\mathbf{t}_{0l} = 0$, получим динамическую задачу о колебаниях слоистой электроупругой среды, вызванных вибрацией только включений и соответствующую ей систему матричных ИУ

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \tilde{\mathbf{K}}_{(p+1)(k+1)}(\Omega_{km}) \Delta \mathbf{t}_{km} = \\ = \mathbf{w}_{pn}(x), \quad x \in \Omega_{pn}, \quad (3.2)$$

$$n = 1, 2, \dots, M_p, \quad p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

В случае расположения на границах раздела слоев по одному включению СИУ (3.2) упрощается и принимает вид

$$\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{K}}_{(p+1)(k+1)}(\Omega_k) \Delta \mathbf{t}_k = \mathbf{w}_p(x),$$

$$x \in \Omega_p, \quad p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Решение ИУ вида (3.1), построено методом фиктивного поглощения в [4].

Литература

1. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.
3. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 330–333.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
5. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

Ключевые слова: составные пьезоэлектрики, системы электродов, связанные механические и электрические поля.

Статья поступила 11 марта 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Пряхина О. Д., Смирнова А. В., 2009