

ISSN 1729-5459

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ
ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal

ECOLOGICAL BULLETIN
OF RESEARCH CENTERS
OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)

2022 · Том 19 · № 3

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52730 от 8 февраля 2013 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Основан в 2003 году. Выходит 4 раза в год. Подписной индекс по каталогу «АРЗИ» Э46477.

Возрастное ограничение: для лиц, старше 12 лет

Главный редактор, председатель редколлегии

В. А. Бабешко, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия.

Редакционная коллегия

Н. М. Богатов, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **А. О. Ватulyян**, проф., д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Россия; **С. А. Вызулин**, проф., д-р физ.-мат. наук, Краснодарское высшее военное училище им. генерала армии С.М. Штеменко, Россия; **Е. А. Демёхин**, профессор, д-р физ.-мат. наук, Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Россия; **О. В. Евдокимова**, доцент, д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **М. В. Зарецкая**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **В. А. Исаев**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **Е. Н. Калайдин**, проф., д-р физ.-мат. наук, Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Россия; **В. В. Калинин**, член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **В. И. Колесников**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия (*зам. главного редактора*); **Е. А. Левашов**, проф., д-р техн. наук, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Россия; **Л. С. Лунин**, проф., д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **В. И. Минкин**, акад. РАН, д-р хим. наук, Южный федеральный университет, Россия; **А. В. Павлова**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **Е. Н. Тумаев**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **В. Б. Широков**, проф., д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Россия; **Н. А. Яковенко**, проф., д-р техн. наук, Кубанский государственный университет, Россия.

Редакционный совет

А. Е. Алоян, проф., д-р физ.-мат. наук, Институт вычислительной математики РАН, Россия; **А. К. Беляев**, член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого, Россия; **Ю. Каплунов**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кильский Университет, Великобритания; **Е. В. Кириллова**, проф., Вест-Баденский университет, Германия; **Д. М. Климов**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем механики РАН, Россия; **Г. Ф. Копытов**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **В. П. Матвеев**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Россия; **М. Ф. Мехтиев**, акад. НАН Азербайджана, д-р физ.-мат. наук, Бакинский государственный университет, Азербайджан; **Н. Ф. Морозов**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия; **А. Солянин**, профессор, Университет Техас Тек, США; **М. Х. Уртенев**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **Е. А. Щербаков**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия.

Ответственный редактор: **Д. А. Хрипков**. Научный редактор: **А. В. Павлова**. Технический редактор: **Е. М. Горшкова**.

Учредители

Адыгейский государственный университет, Республика Адыгея, Майкоп, Россия; **Дагестанский государственный университет**, Республика Дагестан, Махачкала, Россия; **Дагестанский государственный технический университет**, Республика Дагестан, Махачкала, Россия; **Институт прикладной механики РАН**, Москва, Россия; **Кабардино-Балкарский государственный университет**, Республика Кабардино-Балкария, Нальчик, Россия; **Кубанский государственный университет**, Краснодар, Россия; **Ростовский государственный университет путей сообщения**, Ростов-на-Дону, Россия; **Южный федеральный университет**, Ростов-на-Дону, Россия.

Издатель

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия.

Адрес издателя

Кубанский государственный университет, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Адрес редакции

Редакция журнала «Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества», Кубанский государственный университет, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Сайт: vestnik.kubsu.ru. E-mail: vestnik@kubsu.ru. Тел.: +7 (918) 0886651

Содержание

МАТЕМАТИКА

- Численно-аналитический метод решения краевых задач для системы уравнений
Нернста-Планка и Пуассона 6
Коваленко А. В., Чубырь Н. О., Узденова А. М., Уртенев М. Х.
- Аналитические решения для нестационарной модели ветровых течений 17
Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н.
- Функционал гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля с краем .. 25
Щербаков М. Е., Щербаков Е. А.

МЕХАНИКА

- Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных
блочных элементов, имитирующих наночастицы 38
Бабешко В. А., Хрипков Д. А., Евдокимов В. С., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.
- Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний
ортотропных пластин и оболочек 47
Великанов П. Г., Артюхин Ю. П.
- Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн,
генерируемых движущимися возмущениями 55
Ярошенко А. А., Маленко Ж. В., Маркина Е. В., Костюкова Л. О., Бабиков И. И.
- Информация об авторах 63
- К сведению авторов 65

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal

ECOLOGICAL BULLETIN OF RESEARCH CENTERS OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)

Certificate of registration III №ФC77-52730 d/d Feb 8 2013

by Federal Agency of Supervision in Sphere of Association, Information Technology and Mass Communications.
Founded in 2003. Published 4 times a year. Subscription index Э46477 in the ARZI catalogue.

Editor-in-Chief, Editorial Board Chairman

prof. **V. A. Babeshko**, acad., Kuban State University, Russia.

Editorial Board

prof. **N. M. Bogatov**, Kuban State University, Russia; prof. **A. O. Vatulyan**, South Federal University, Russia; prof. **S. A. Vyzulin**, Krasnodar Higher Military School named after Army General S.M. Shtemenko, Russia; prof. **E. A. Demekhin**, Krasnodar branch of Financial University under Government of the Russian Federation, Russia; **O. V. Evdokimova**, South Scientific Center, Russian Academy of Science, Russia; prof. **M. V. Zaretskaya**, Kuban State University, Russia; prof. **V. A. Isaev**, Kuban State University, Russia; prof. **E. N. Kalaydin**, Krasnodar branch of Financial University under Government of the Russian Federation, Russia; prof. **V. V. Kalinchuk**, corresp. member of RAS, South Federal University, Russia; prof. **V. I. Kolesnikov**, acad., Rostov State Transport University, Russia (*Deputy Editors-in-Chief*); prof. **E. A. Levashov**, National Research Technological University "Moscow Institute of Steel and Alloys", Russia; prof. **L. S. Lunin**, South Scientific Center, Russian Academy of Science, Russia; prof. **V. I. Minkin**, acad., South Federal University, Russia; prof. **A. V. Pavlova**, Kuban State University, Russia; prof. **E. N. Tumaev**, Kuban State University, Russia; prof. **V. B. Shirokov**, South Federal University, Russia; prof. **N. A. Yakovenko**, Kuban State University, Russia.

Editorial Council

prof. **A. E. Aloyan**, Institute of Computational Mathematics of Russian Academy of Sciences, Russia; prof. **A. K. Belyaev**, corresp. member of RAS, Peter Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia; prof. **J. Kaplunov**, Member of European Academy of Sciences prof., Keele University, United Kingdom; prof. **E. V. Kirillova**, RheinMain University of Applied Sciences, Germany; prof. **D. M. Klimov**, acad., Institute of the Problems in Mechanics, Russia; prof. **G. F. Kopitov**, Kuban State University, Russia; prof. **V. P. Matveenko**, acad., Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Russia; prof. **M. F. Mekhtiev**, acad., Baku State University, Azerbaijan; prof. **N. F. Morozov**, acad., St. Petersburg State University, Russia; prof. **A. Solynin**, Texas Tech University, USA; prof. **M. H. Urtenov**, Kuban State University, Russia; prof. **E. A. Shcherbakov**, Kuban State University, Russia.

Executive Editor: **D. A. Khripkov**. Science Editor: **A. V. Pavlova**. Editorial Assistant: **E. M. Gorshkova**

Founders

Adygeya State University, Maykop, Adygeya Republic, Russia; **Dagestan State University**, Makhachkala, Dagestan Republic, Russia; **Dagestan State Technical University**, Makhachkala, Dagestan Republic, Russia; **Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences**, Moscow, Russia; **Kabardino-Balkarian State University**, Nalchik, Kabardino-Balkarskaya Republic, Russia; **Kuban State University**, Krasnodar, Russia; **South Federal University**, Rostov-on-Don, Russia; **Rostov State Transport University**, Rostov-on-Don, Russia

Publisher

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Publisher address

Kuban State University, 149 Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040

Editorial address

Kuban State University, 149 Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040

Journal "Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation"

web: vestnik.kubsu.ru, e-mail: vestnik@kubsu.ru, tel.: +7 918 0886651

Table of Content

MATHEMATICS

Numerical-Analytical Method for Solving Boundary Value Problems for the System of Nernst-Planck and Poisson Equations	6
<i>by Kovalenko A. V., Chubyr N. O., Uzdenova A. M., Urtenov M. A. Kh.</i>	
Analytical Solutions for a Non-Stationary Model of Wind Currents	17
<i>by Kochergin V. S., Kochergin S. V., Sklyar S. N.</i>	
Gaussian Curvature Functional in the Class of Convex Liouville Surfaces with Boundary ...	25
<i>by Shcherbakov M. E., Shcherbakov E. A.</i>	

MECHANICS

Construction of a Discrete Topological Self-Assembly Space for Packed Block Elements Simulating Nanoparticles	38
<i>by Babeshko V. A., Khripkov D. A., Evdokimov V. S., Babeshko O. M., Evdokimova O. V.</i>	
Mathematical Analogies in Solving Problems of Strength, Stability and Vibrations of Orthotropic Plates and Shells	47
<i>by Velikanov P. G., Artyukhin Yu. P.</i>	
The Effect of Compressive Forces on the Development of Bending-Gravitational Waves Generated by Moving Perturbations	55
<i>by Yaroshenko A. A., Malenko Zh. V., Markina E. V., Kostyukova L. O., Babikov I. I.</i>	
Author's Information	63
Author's Guide	68

УДК 544.638.2:001.891.573

DOI 10.31429/vestnik-19-3-6-16

Численно-аналитический метод решения краевых задач для системы уравнений Нернста-Планка и Пуассона

А. В. Коваленко¹, Н. О. Чубырь¹✉, А. М. Узденова², М. Х. Уртенев¹

¹ Кубанский государственный университет, 149, ул. Ставропольская, Краснодар, 350000, Россия

² Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, 29, ул. Ленина, Карачаевск, 369202, Карачаево-Черкесская республика

✉ Чубырь Наталья Олеговна; e-mail: chubyr-natalja@mail.ru

Аннотация. Электромембранные системы обессоливания, в том числе электродиализные аппараты, используются для обессоливания при концентрациях раствора электролита в пределах от 1 до 100 моль/м³. Для их теоретического исследования с целью повышения эффективности процесса используются математические модели в виде краевых задач для системы уравнений Нернста–Планка и Пуассона, которая относится к «жестким» задачам, плохо поддающимся численному решению. Это вызвано появлением малого параметра у производной в уравнении Пуассона в безразмерном виде, и, соответственно, погранслоя у ионообменных мембран, где концентрации и другие характеристики процесса обессоливания меняются экспоненциально. Именно по этой причине численное решение краевых задач в настоящее время получено для начальных концентраций порядка 0,01 моль/м³. В работе предлагается новый численно-аналитический метод решения краевых задач для системы уравнений Нернста–Планка и Пуассона для реальных начальных концентраций, исследовано явление пробоя пространственного заряда в сечении канала обессоливания.

Ключевые слова: система уравнений Нернста–Планка–Пуассона, электромембранные системы, численное решение, сечение канала обессоливания.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-58-12018 ННИО_а «Исследование влияния электроконвекции, диссоциации воды и геометрии спейсеров на электродиализное обессоливание в интенсивных токовых режимах».

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Концепция работы (Коваленко А.В., Уртенев М.Х.); проведение вычислений, расчетов, анализ данных (Коваленко А.В., Узденова А.М.); написание статьи (Уртенев М.Х., Чубырь Н.О.); аналитические расчеты (Уртенев М.Х., Чубырь Н.О.); внесение правок (Узденова А.М.); утверждение окончательного варианта (Коваленко А.В., Чубырь Н.О., Узденова А.М., Уртенев М.Х.)

Цитирование: Коваленко А. В., Чубырь Н. О., Узденова А. М., Уртенев М. Х. Численно-аналитический метод решения краевых задач для системы уравнений Нернста–Планка и Пуассона // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 6–16. DOI 10.31429/vestnik-19-3-6-16

Поступила 2 октября 2022 г. После доработки 10 октября 2022 г. Принято 10 октября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Numerical-Analytical Method for Solving Boundary Value Problems for the System of Nernst-Planck and Poisson Equations

A. V. Kovalenko¹, N. O. Chubyr¹✉, A. M. Uzdenova¹, M. A. Kh. Urtenov¹

¹ Kuban State University, 149, Stavropolskaya str., Krasnodar, 350000, Russian Federation

² Karachay-Cherkess State University named after U.D. Alieva, 29, Lenin str., Karachayevsk, 369202

✉ Natalia O. Chubyr; e-mail: chubyr-natalja@mail.ru

Abstract. Electromembrane systems, are used for desalination at electrolyte solution concentrations ranging from 1 to 100 mol/m³. In a theoretical study of increasing the efficiency of the desalination process, mathematical modeling is used in the form of a boundary value problem for the system of Nernst-Planck and Poisson (NPP) equations, which refers to “hard” problems that are difficult to solve numerically. This is caused by the appearance of a small parameter at the derivative in the Poisson equation in a dimensionless form, and, correspondingly, a boundary layer in ion-exchange membranes, where concentrations and other characteristics of the desalination process change exponentially. It is for this reason that the numerical study of the boundary value problem is currently obtained for initial concentrations of the order of 0.01 mol/m³.

The paper proposes a new numerical-analytical method for solving boundary value problems for the system of NPP equations for real initial concentrations, using which the phenomenon of space charge breakdown (SCB) is studied.

Keywords: system of Nernst-Planck-Poisson equations, electromembrane systems, numerical methods, desalination channel.

Funding. This reported study was funded by RFBR and DFG according to the research project no. 20-58-12018 NNIO_a.

The authors contributed equally. The concept of work (Kovalenko A.V., Urtenov M.Kh.); performing calculations, calculations, data analysis (Kovalenko A.V., Uzdenova A.M.); writing an article (Urtenov M.Kh., Chubyr N.O.); analytical calculations (Urtenov M.Kh., Chubyr N.O.); making edits (Kovalenko A.V., Uzdenova A.M.); approval of the final version (Kovalenko A.V., Chubyr N.O., Uzdenova A.M., Urtenov M.Kh.)

Cite as: Kovalenko A. V., Chubyr N. O., Uzdenova A. M., Urtenov M. A. Kh. Numerical-analytical method for solving boundary value problems for the system of Nernst-Planck and Poisson equations. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 6–16. DOI 10.31429/vestnik-19-3-6-16

Received 2 October 2022. Revised 10 October 2022. Accepted 10 October 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

В работах [1–7] показано, что применение сверхпределных токов в электродиализных аппаратах обессоливания является эффективным. При сверхпределных токах строение области пространственного слоя усложняется. Впервые строение диффузионного слоя в стационарном случае исследовано в [8] и в дальнейшем в работах многих авторов [9].

Нестационарные задачи исследовались в [10–13]. Во всех этих работах численное решение получено при начальных концентрациях намного меньших, чем в реальных электродиализных аппаратах обессоливания. Это связано с тем, что краевые задачи математических моделей являются жесткими задачами, причем жесткость усиливается с увеличением начальной концентрации. Причиной является наличие малого параметра при производной в уравнении Пуассона при переходе к безразмерному виду с использованием характерных параметров, т.е. краевые задачи становятся сингулярно возмущенными, что означает появление узких пограничных слоев, где искомые функции концентраций, напряженности электрического поля и т.д. меняются экспоненциально. Причем, чем больше начальная концентрация, тем меньше малый параметр, и тем труднее ее численно решать. Поэтому основные численные результаты получены при начальных концентрациях порядка 0,01 моль/м³, в то время как реальная начальная концентрация имеет порядок 10 моль/м³ и более.

В работе предлагается новый численно-аналитический метод решения краевых задач для системы уравнений Нернста–Планка и Пуассона, являющийся обобщением как работ [14], так и моделей [15]. Этот новый метод позволил исследовать нестационарное явление пробоя пространственного заряда [16] в сечении канала обессоливания при реальных начальных концентрациях, используемых в электродиализных аппаратах обессоливания, и установить в этих условиях основные закономерности взаимодействия волн заряда, вплоть до их разрушения (пробоя). А в статье [15] рассматриваемый метод был применен для исследования пробоя при больших концентрациях в гальваностатическом режиме.

1. Базовая математическая модель

Базовая математическая модель одномерного нестационарного переноса ионов соли в сечении канала обессоливания, образованного анионообменной и катионообменной мембранами, в потенциодинамическом режиме в размерном виде определяется краевой задачей, сформулированной ниже.

Система уравнений:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\frac{\partial j_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial t} = -\frac{\partial j_2}{\partial x},$$

$$j_1 = -\frac{F}{RT}D_1C_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} - D_1\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad j_2 = \frac{F}{RT}D_2C_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - D_2\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{F}{\varepsilon_\alpha}(C_1 - C_2),$$

где j_1, j_2, C_1, C_2 — потоки и концентрации ионов водорода и гидроксила в растворе, соответственно, D_1, D_2 — коэффициенты диффузии катионов и анионов, φ — потенциал электрического поля, ε_α — абсолютная диэлектрическая проницаемость раствора, F — постоянная Фарадея, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, t — время.

Краевые условия:

$$\left(-\frac{F}{RT}D_1C_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} - D_1\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad C_1(t, H) = C_{1K},$$

$$C_2(t, 0) = C_{2A}, \quad \left(\frac{F}{RT}D_2C_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - D_2\frac{\partial C_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=H} = 0,$$

$$\varphi(t, 0) = d_1 + d_2t, \quad \varphi(t, H) = 0,$$

$$C_1(0, x) = C_{10}, \quad C_2(0, x) = C_{20}, \quad \varphi(0, x) = 0.$$

где H — ширина сечения канала, d_1 — начальное значение потенциала, d_2 — скорость развертки потенциала.

Краевая задача зависит от следующих изменяемых входных параметров: $H, C_{10}, C_{20}, C_{1K}, C_{2A}, d_1$ и d_2 . Для того чтобы численные результаты были более обозримыми, положим $C_{10} = C_{20} = C_{1K} = C_{2A} = C_0$, где C_0 — начальная концентрация раствора, $d_1 = 0$. Использование предлагаемого ниже метода позволяет при этом не терять общность постановки.

2. Характерные величины и переход к безразмерному виду

Перейдем к безразмерным величинам, используя следующие формулы, где (u) — индекс безразмерной величины, а нижний индекс (0) указывает на характерные величины:

$$x^{(u)} = \frac{x}{H}, \quad t^{(u)} = \frac{t}{t_0}, \quad C_i^{(u)} = \frac{C_i}{C_0}, \quad j_i^{(u)} = \frac{j_i}{j_0}, \quad D_i^{(u)} = \frac{D_i}{D_0},$$

$$\varphi^{(u)} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \varepsilon^{(u)} = \frac{\varepsilon_\alpha}{b_0}, \quad I^{(u)} = \frac{I}{I_0}, \quad d_1^{(u)} = \frac{d_1}{\varphi_0}, \quad d_2^{(u)} = \frac{d_2}{d_0}.$$

Две характерные величины очевидны — это начальная концентрация раствора C_0 , которая реально меняется от 10^{-2} моль/м³ до 10^2 моль/м³ и ширина канала $H = 1$ мм, остальные характерные величины необходимо выбрать так, чтобы краевая задача имела наиболее простой вид.

Примем в качестве $D_0 = \frac{2D_1D_2}{z_1D_1 - z_2D_2}$ — коэффициент диффузии электролита, φ_0 — тепловой потенциал, $I_0 = \frac{2FD_0C_0}{H}$ — предельный диффузионный ток, $j_0 = \frac{2D_0C_0}{H}$ — поток ионов,

соответствующий предельному току, $t_0 = \frac{C_0H}{j_0}$ — время диффузии ионов через сечение канала,

$d_0 = \frac{\varphi_0}{t_0} = \frac{\varphi_0D_0}{H^2}$ — характерное значение скорости развертки потенциала, $b_0 = \frac{H^2FC_0}{\varphi_0}$ — характерная величина, имеющая размерность электрической постоянной. Физический смысл

величины b_0 можно прояснить, например, переписав формулу $\frac{\varepsilon_\alpha}{b_0}$ в виде

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{b_0} = \frac{\varepsilon_\alpha S}{H} : \frac{b_0 S}{H} = \frac{C_k}{C_T},$$

где C_k — емкость плоского конденсатора с площадью обкладок S и толщиной диэлектрика H , а $C_T = \frac{b_0 S}{H} = \frac{HFC_0 S}{\varphi_0}$ — емкость канала обессоливания раствора электролита шириной H , с площадью мембран S и с концентрацией C_0 , рассматриваемого как ионистор (суперконденсатор). Другая физическая интерпретация малого параметра $\varepsilon^{(u)}$ определена в [5] как квадрат отношения Дебаевской длины к характерному линейному размеру, в данном случае к ширине канала. Краевая задача в безразмерном виде зависит лишь от трех параметров $\varepsilon^{(u)}$, $d_1^{(u)}$, $d_2^{(u)}$. При этом $\varepsilon^{(u)}$ можно рассматривать как малый параметр, т.к. $1,859 \times 10^{-12} \leq \varepsilon^{(u)} \leq 1,859 \times 10^{-8}$.

3. Базовая математическая модель в безразмерном виде

С учетом нетривиальных критериев подобия безразмерная краевая задача запишется в виде (индекс « u » для простоты опущен)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial j_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2; \quad (3.1)$$

$$j_i = -z_i C_i D_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D_i \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2; \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(C_1 - C_2); \quad (3.3)$$

$$\left(-C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\right)(t, 0) = 0; \quad \left(C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial C_2}{\partial x}\right)(t, 1) = 0;$$

$$C_1(t, 1) = C_{1k} = 1; \quad C_2(t, 0) = C_{2a} = 1;$$

$$\varphi(t, 0) = d_1 + d_2 t; \quad \varphi(t, 1) = 0;$$

$$C_i(0, x) = C_i(x) = 1, \quad i = 1, 2;$$

$$\varphi(0, x) = 0.$$

4. Численно-аналитический метод решения краевых задач для системы уравнений Нернста-Планка и Пуассона

4.1. Образование и свойства квазиравновесного слоя (КРС) (модель QEL (Quasi-Equilibrium Layer))

В [13] рассмотрен процесс появления области пространственного заряда в потенциодинамическом режиме в диффузионном слое у катионообменной мембраны, предполагая, что скачок потенциала линейно увеличивается с ростом времени, начиная с нулевого значения.

Как видно из рис. 1а, большую часть диффузионного слоя занимает область электронейтральности (ОЭН) — $I(t, x)$, при которой $C_1 = C_2$ или $\varepsilon = 0$.

Из рис. 1 следует, что образование квазиравновесной области пространственного заряда (111), примыкающей к ионообменной мембране, начинается в начальный момент времени, ее толщина нелинейно возрастает с течением времени (рис. 1б) и в некоторый момент практически перестает меняться (рис. 1а). Перенос ионов соли в этой области почти не зависит от времени, соответственно, и от скачка потенциала, следовательно, не зависит от плотности тока. Поэтому эта область пространственного заряда (111) называется квазиравновесной областью или слоем (КРС). Причиной образования КРС является тот факт, что на небольших временных интервалах миграционный поток вблизи мембраны немного больше диффузионного, а сами потоки направлены противоположно, в то время как в области электронейтральности электромиграционный и диффузионный потоки в точности равны, вследствие чего происходит накопление противоионов у мембраны. С увеличением времени преобладание электромиграционного потока над диффузионным увеличивается. Это приводит к тому, что при дальнейшем увеличении времени (при некотором $t_{пр}$), когда скачок потенциала станет достаточно большим и соответствующий ему ток станет больше предельного диффузионного

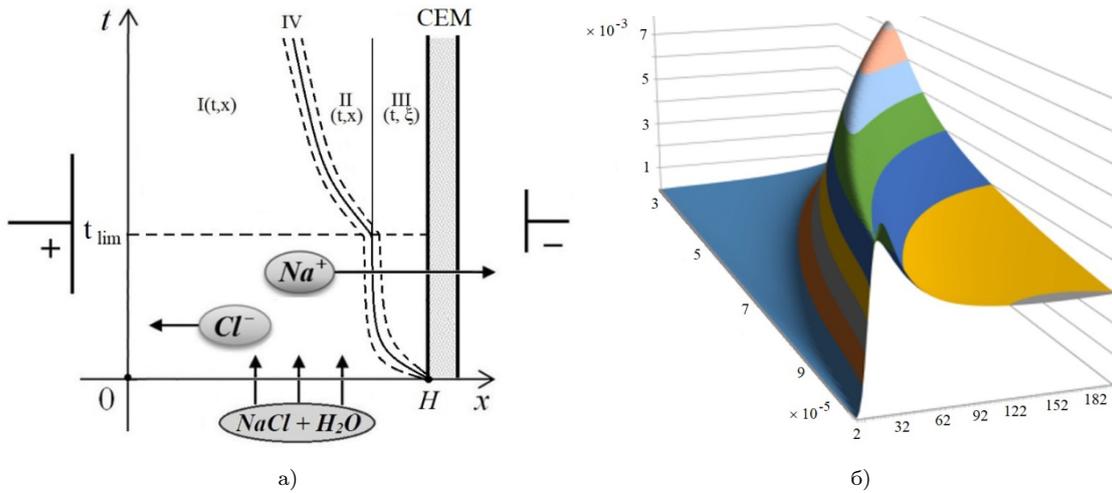


Рис. 1. Образование и строение области пространственного заряда у катионообменной мембраны (КОМ) а) схема диффузионного слоя (масштаб не соблюден): I(t, x) — область электронейтральности, II(t, x) — расширенная область пространственного заряда, III(t, x) — квазиравновесная область пространственного заряда, IV(t, x) — промежуточная область, б) график функции $1/F\rho(t, x) = C_1(t, x) - C_2(t, x)$

тока, противоионы начинают скапливаться на границе между областью электронейтральности и КРС, поскольку диффузия не успевает размыть их накопление (т.к. диффузионный поток меньше электромиграционного потока). Таким образом, появляется расширенная область пространственного заряда (11). Толщина КРС, начиная с некоторого момента, практически не зависит от времени, т.е. квазиравновесный слой является одновременно и квазистационарным. В сечении канала обессоливания, образованного анионообменной и катионообменной мембранами, квазиравновесные слои появляются у каждой из мембран, они также являются квазистационарными [17].

4.2. Аналитическое решение краевой задачи в квазиравновесных слоях в сечении канала обессоливания

Найдем сначала решение на отрезке $[0, x_1]$, то есть в квазиравновесном погранслое около анионообменной мембраны (АОМ).

Положим

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad E(t, x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{E}(t, \xi, \varepsilon),$$

$$C_1(t, x, \varepsilon) = C_1(t, \xi, \varepsilon), \quad C_2(t, x, \varepsilon) = C_2(t, \xi, \varepsilon), \quad j_1(t, x, \varepsilon) = j_1(t, \xi, \varepsilon), \quad j_2(t, x, \varepsilon) = j_2(t, \xi, \varepsilon)$$

и подставим в уравнения, тогда после ряда преобразований около анионообменной мембраны в первом приближении получим уравнения

$$j_i(t, \xi, \varepsilon) = j_i(t), \quad \frac{\partial C_i(t, \xi, \varepsilon)}{\partial x} = z_i C_i \tilde{E}(t, \xi, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial \tilde{E}(t, \xi, \varepsilon)}{\partial \xi} = C_1 - C_2 \quad (4.1)$$

со следующими граничными условиями:

$$j_1(t, 0, \varepsilon) = \left(C_1 \tilde{E} - \frac{\partial C_1}{\partial \xi} \right) (t, 0) = 0, \quad C_2(t, 0, \varepsilon) = C_{2a} = 1, \quad \varphi(t, 0) = d_2 t.$$

Необходимо также выполнение условия сращивания с решением внутри сечения канала $E(t, \infty, \varepsilon) = 0$.

Система уравнений (4.1) имеет первый интеграл $C_1 + C_2 = 1/2\tilde{E}^2 - \alpha$, где $\alpha \approx -C_1(t, x_1, \varepsilon) - C_2(t, x_1, \varepsilon) < 0$. Используя последний, можно получить уравнение для напряженности электрического поля, не содержащее концентраций [4]

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \tilde{E}^3 - \alpha \tilde{E}.$$

Откуда получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{E} = -\frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{E})^4 - 4\alpha(\tilde{E})^2},$$

соответственно

$$\tilde{E} = \frac{4\sqrt{\beta}e^{-\sqrt{-\alpha}\xi}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha}\xi}} (\sqrt{-\alpha}).$$

Условие сращивания с решением в ОЭН $\tilde{E} \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow +\infty$ очевидно выполняется. Более того, можно определить левую границу ОЭН в виде $x_1 = k\sqrt{\varepsilon}|\ln \varepsilon|$, где $k > 0$ — произвольная постоянная. Таким образом,

$$E(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta}e^{-\sqrt{-\alpha}\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha}\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}} (\sqrt{-\alpha}), \quad (4.2)$$

β — некоторое положительное число, определяемое из граничного условия. Зная $E(x, \varepsilon)$, с учетом соотношений

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \tilde{E}^2 - \alpha, \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} = C_1 - C_2$$

несложно рассчитать C_1 и C_2 . Аналогично рассчитывается решение и на отрезке $[x_1, 1]$, то есть в квазиравновесном слое около катионообменной мембраны с необходимыми изменениями, а именно, замена имеет вид

$$\xi = \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad E = \frac{\tilde{E}(\xi, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$\xi \rightarrow -\infty$, при $\varepsilon \rightarrow +0$. Эта замена приводит к решению

$$E(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta}e^{-\sqrt{-\alpha}\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha}\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}} (\sqrt{-\alpha}),$$

где

$$\alpha \approx -C_1(t, x_2, \varepsilon) - C_2(t, x_2, \varepsilon) < 0. \quad (4.3)$$

Как видно из решений в квазиравновесных слоях, в первом приближении они не зависят от времени, то есть квазиравновесный слой является еще и квазистационарным.

4.3. Формулировка модели wQEL (without Quasi-Equilibrium boundary Layer)

Итак, в начальном приближении величина плотности тока не влияет на распределение потенциала и концентраций квазиравновесной области пространственного заряда. Это влияние сказывается только в следующем приближении. В связи с этим в начальном приближении можно не учитывать эту область и составить упрощенную модель, причем условной границей между квазиравновесной областью пространственного заряда и расширенной областью можно считать точку, в которой концентрация противоионов достигает своего минимального значения у ионообменных мембран, а пространственный заряд достигает минимума у КОМ и максимального значения — у АОМ. Поскольку в окрестности этих точек значения концентрации противоионов значительно выше концентрации коионов, то пространственный заряд в этих областях определяется концентрацией противоионов. Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} \approx \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx 0$$

на границе расширенной области и квазиравновесной области у катионообменной мембраны и

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} \approx \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx 0$$

на границе расширенной области и квазиравновесной области у анионообменной мембраны. Поскольку ширина квазиравновесной области достаточно мала, то для упрощения базовой модели можно принять следующие краевые условия:

$$\frac{\partial C_2(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C_1(t, H)}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

Добавляя к условиям (4.4), как и в базовой задаче, условие непроницаемости, получим для системы уравнений Нернста–Планка–Пуассона новую краевую задачу, которая и определяет математическую модель переноса ионов соли без квазиравновесного слоя (wQEL). В ряде работ авторами была исследована эта модель переноса ионов соли в диффузионном слое, показано, что она дает распределение концентрации, потенциала, пространственного заряда с хорошей точностью всюду, за исключением квазиравновесной области пространственного заряда.

Как показывают расчеты, проведенные в данной статье, модель wQEL позволяет численно исследовать явление переноса в сечении канала обессоливания для раствора электролита с большими концентрациями, чем базовая модель, например, для начальных концентраций $C_0 = 10$ моль/м³.

5. Алгоритм численно-аналитического метода решения

Алгоритм решения задачи состоит в следующем:

- 1) Численно решаем краевую задачу (3.1)–(3.3) с соответствующими краевыми условиями модели wQEL, и находим, в том числе, $C_1(t, x_2, \varepsilon)$, $C_2(t, x_1, \varepsilon)$.
- 2) Находим скачок потенциала для базовой модели. Для этого используем соотношение

$$\varphi_0 = \int_0^1 E(x, \varepsilon) dx = \int_0^{x_1} E(x, \varepsilon) dx + \int_{x_1}^{x_2} E(x, \varepsilon) dx + \int_{x_2}^1 E(x, \varepsilon) dx,$$

$$\varphi_0 = \int_0^1 E(t, x, \varepsilon) dx = - \int_0^{x_1} \frac{dC_2}{C_2} + \int_{x_1}^{x_2} E(t, x, \varepsilon) dx + \int_{x_2}^1 \frac{dC_1}{C_1} = \ln \frac{C_{2A} C_{1K}}{C_2(t, x_1, \varepsilon) C_1(t, x_2, \varepsilon)} + \int_{x_1}^{x_2} E(t, x, \varepsilon) dx.$$

С учетом того, что $x_1 \approx 0$, $x_2 \approx 1$, получаем

$$\varphi_0 \approx \ln \frac{C_{2A} C_{1K}}{C_2(t, x_1, \varepsilon) C_1(t, x_2, \varepsilon)} + \int_0^1 E(t, x, \varepsilon) dx,$$

$$\varphi_0 = \varphi_{\text{QEL}} + \varphi_{\text{wQEL}}.$$

Здесь, первое слагаемое φ_{QEL} — скачок потенциала в квазиравновесных слоях у АОМ и КОМ, а второе, — скачок потенциала φ_{wQEL} , рассчитанный с использованием модели wQEL.

Произведем оценку скачка потенциала φ_{QEL} , предполагая, что, минимальное значение концентрации уменьшилось в 100 и 10⁵ раз. Тогда в первом случае получаем

$$\frac{C_{2A}}{C_2(t, x_1, \varepsilon)} = \frac{C_{1K}}{C_1(t, x_2, \varepsilon)} = 10^2,$$

а во втором —

$$\frac{C_{2A}}{C_2(t, x_1, \varepsilon)} = \frac{C_{1K}}{C_1(t, x_2, \varepsilon)} = 10^5.$$

При этом безразмерные скачки составят

$$\varphi_{\text{QEL}} = \ln \frac{C_{2A}C_{1K}}{C_2(t, x_1, \varepsilon)C_1(t, x_2, \varepsilon)} \approx 9,2 \text{ и } \varphi_{\text{QEL}} = \ln \frac{C_{2A}C_{1K}}{C_2(t, x_1, \varepsilon)C_1(t, x_2, \varepsilon)} \approx 23.$$

С учетом того, что $\varphi_0 = 0,02566$ В, приходим к выводу, что в размерном виде суммарный скачок потенциала в квазиравновесных слоях примерно равен 0,24 В и 0,6 В. С учетом того, что в камере обессоливания скачок потенциала может достигать 1–3 В, скачок потенциала в квазиравновесных слоях может вносить существенный вклад с увеличением степени обессоливания.

- 3) Находим аналитическое решение в квазиравновесных слоях по формулам (4.2)–(4.3).
- 4) Используя 1) и 3), получаем решение базовой задачи.

Замечание. Асимптотическое решение с увеличением C_0 становится точнее, поскольку уменьшается ε и повышается точность аналитических формул, а толщина квазиравновесного слоя уменьшается.

6. Численная верификация модели wQEL

Для верификации расчетов были проведены численные эксперименты с сетками с различным числом элементов 200 000, 330 000 и 400 000. Результаты расчетов в первых двух случаях отличались, хотя и незначительно. Результаты расчетов при сетках 400 000 и 330 000 совпадают в пределах точности расчётов. Поэтому расчеты с сеткой 400 000 можно считать достаточно точными.

6.1. Сопоставление результатов расчетов базовой модели и модели wQEL

При небольших начальных концентрациях для расчетов можно использовать одновременно базовую модель и модель wQEL. Ниже проведено такое сравнение для $C_0 = 0,01$ моль/м³ при одинаковых скачках потенциала.

Как видно из рис. 2, распределение пространственного заряда, рассчитанное по модели wQEL, достаточно точно совпадает всюду, за исключением квазиравновесной области пространственного заряда. Исключение этой области приводит к некоторому запаздыванию значения пространственного заряда, рассчитанного по упрощенной модели в сравнении с базовой. Это запаздывание зависит от скачка потенциала в квазиравновесной области пространственного заряда, который, в свою очередь, зависит от начальной концентрации. Например, для концентрации $C_0 = 0,01$ моль/м³ запаздывание составляет 15 с или $(15 \text{ с}) \times (0,005 \text{ В/с}) = 0,075 \text{ В}$. Если учесть такой сдвиг, результаты совпадают с погрешностью менее 1 %.

Из первых двух шагов алгоритма пункта 5 следует, что модель wQEL в сочетании с аналитическим решением в квазиравновесной области и учетом скачка в этой области можно использовать для расчета переноса ионов в сечении канала обессоливания, в том числе явления пробоя пространственного заряда при реальных начальных концентрациях раствора, используемых для обессоливания в электродиализных аппаратах.

7. Закономерности пробоя пространственного заряда при больших начальных концентрациях

Понятие пробоя пространственного заряда и основные закономерности пробоя в нестационарных мембранных системах при фиксированных скачках потенциала, соответствующих сверхпредельной плотности тока, исследованы в работе [18] при небольших значениях начальной концентрации порядка $C_0 = 0,01$ моль/м³, что связано, как отмечалось выше, с плохой обусловленностью сингулярно возмещенной задачи (3.1)–(3.3) из-за малого параметра ε . При этом с увеличением C_0 величина ε уменьшается. Ниже исследуется явление пробоя и его закономерности для потенциодинамического режима с использованием модели WDL в сечении канала обессоливания для $C_0 = 10$ моль/м³. С увеличением времени в сечении канала

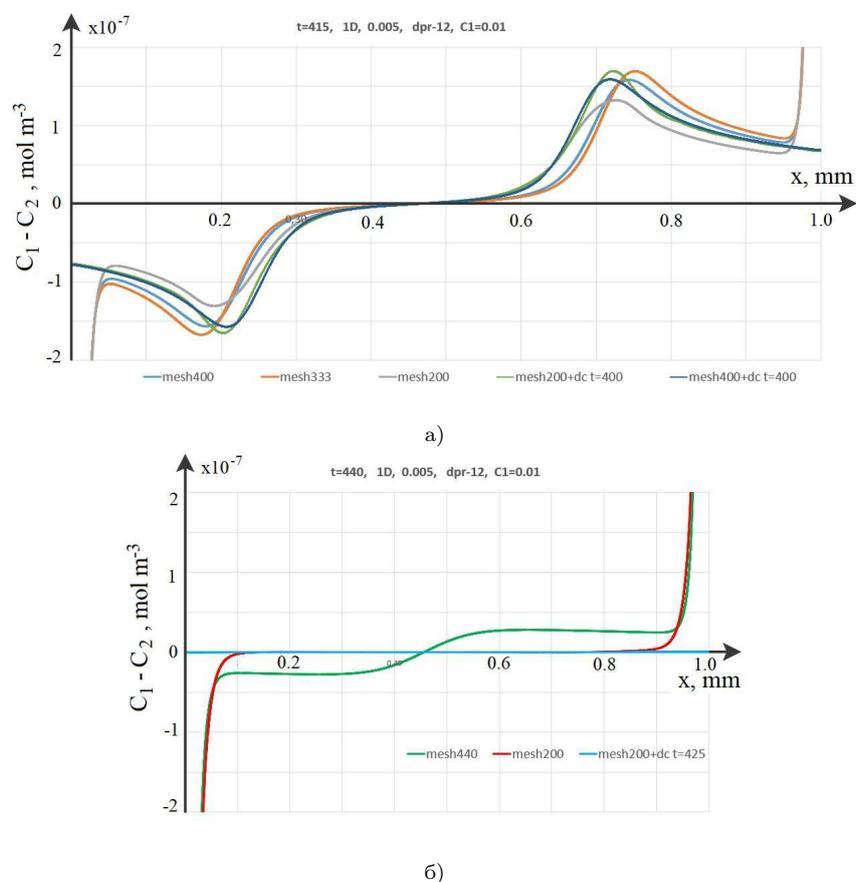


Рис. 2. Расчеты с различными сетками в различные промежутки времени: а) до пробоя; б) накануне и после пробоя

образуются две волны положительного (у КОМ) и отрицательного (у АОМ) пространственного заряда, которые движутся навстречу друг другу (рис. 2а). Как показывают вычисления, вначале эти волны движутся практически с постоянной скоростью и не взаимодействуют. Со временем они приближаются друг к другу и начинают притягиваться, скорость движения постепенно увеличивается. В некоторый момент (рис. 2б) волны отрицательного и положительного пространственного заряда соприкасаются и начинается процесс разрядки, когда величины и отрицательного и положительного заряда достаточно быстро уменьшаются и со временем пространственный заряд в средней части канала практически исчезает, то есть процесс пробоя завершается.

Как видно из рис. 3, пробой происходит при 700–720 с. Так как скорость развертки скачка потенциала составляет $d = 0,005 \text{ В/с}$, то пробой происходит при 3,5–3,6 В.

Заключение

В работе предложена новая математическая модель переноса ионов соли в сечении канала обессоливания, за исключением квазиравновесных слоев у ионообменных мембран, названная моделью wQEL. Найдены асимптотические решения в квазиравновесных слоях у ионообменных мембран. Используя сочетание аналитического решения и численного решения модели wQEL, разработан численно-аналитический метод решения для базовой модели, с использованием которого теоретически исследовано явление пробоя в сечении канала обессоливания при реальных концентрациях исходного раствора электролита. Определены основные закономерности

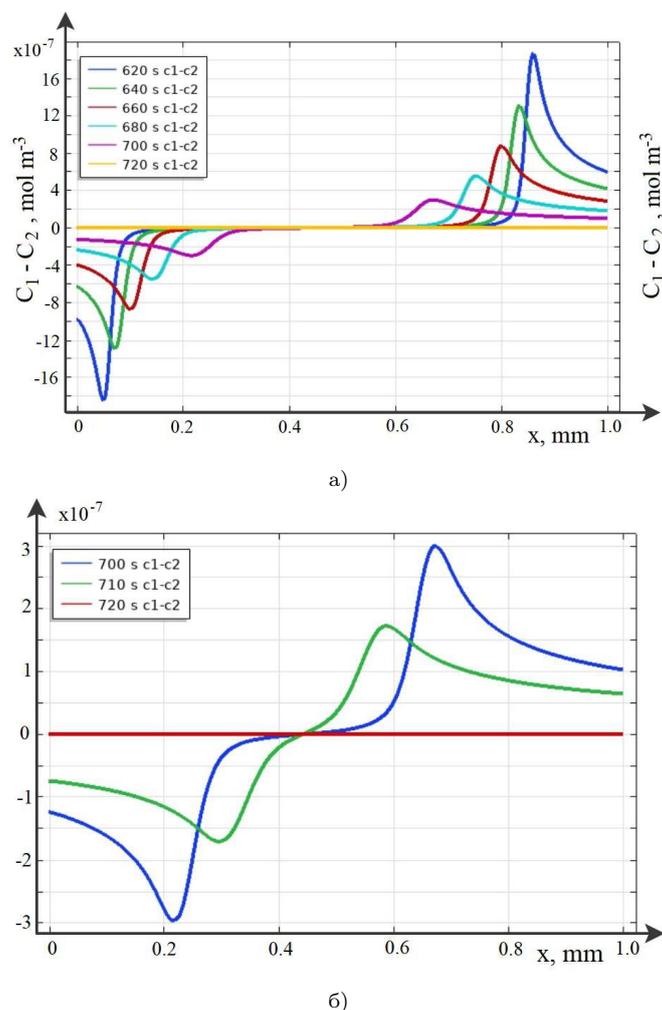


Рис. 3. Графики плотности заряда, нормированные на число Фарадея для раствора KCl с начальной концентрацией $C_0 = 10$ моль/ м^3 при разных временах (а) и накануне и после пробоя (б)

пробоя, которые можно использовать для выбора эффективных технологических параметров работы электродиализного аппарата обессоливания.

Литература [References]

1. Rajeshwar, K., Ibanez, J.G., Swain, G.M., Electrochemistry and the environment. *Journal of Applied Electrochemistry*, 1994, vol. 24, iss. 11, pp. 1077–1091.
2. Bazinet, L., Doyen, A., Antioxidants, mechanisms, and recovery by membrane processes. *Crit. Rev. Food Sci. Nutr.*, 2017, vol. 57, pp. 677–700. DOI 10.1080/10408398.2014.912609
3. Xu, H., Ji, X., Wang, L., Huang, J., Han, J., Wang, Y., Performance study on a small-scale photovoltaic electro dialysis system for desalination. *Renewable Energy*, 2020, vol. 154, pp. 1008–1013. DOI 10.1016/j.renene.2020.03.066
4. Ortiz, J.M., Expósito, E., Gallud, F., García-García, V., Montiel, V., Aldaz, A., Electro dialysis of brackish water powered by photovoltaic energy without batteries: direct connection behaviour. *Desalination*, 2007, vol. 208, iss. 1–3, pp. 89–100. DOI 10.1016/j.desal.2006.05.026
5. Рубинштейн, И., Зальцман, Б., Прец, И., Линдер, К., Экспериментальная проверка электроосмотического механизма формирования «запредельного» тока в системе с катионообменной электро диализной мембраной. *Электрохимия*, 2002, т. 38, № 8, с. 956. [Rubinstein, I., Saltzman, B., Prets,

- I., Linder, K., Experimentalnai proverka electroosmoticheskogo mehanizma formerovania zapredelnogo toka v sisteme s cationoobmennoi electrodiyalisnoi membranoi. *Electrochimia = Electrochemistry*, 2002, vol. 38, iss. 8, p. 956. (in Russian)]
6. Nikonenko, V.V., Kovalenko, A.V., Urtenov, M.K., Pismenskaya, N.D., Han, J., Sistat, P., Pourcelly, G., Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives, *Desalination*, 2014, vol. 342, pp. 85–106. DOI 10.1016/j.desal.2014.01.008
 7. Ran, J., Wu, L., He, Y., Yang, Zh., Wang, Y., Jiang, Ch., Ge, L., Bakangura, E., Xu, T., Ion exchange membranes: New developments and applications. *J. Membr. Sci.*, 2017, vol. 522, pp. 267–291. DOI 10.1016/j.memsci.2016.09.033
 8. Rubinstein, I., Shtilman, L., Voltage against current curves of cation exchange membranes. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.*, 1979, vol. 75, pp. 231–246. DOI 10.1039/F29797500231
 9. Demekhin, E.A., Shelistov, V.S., Polyanskikh, S.V., Linear and nonlinear evolution and diffusion layer selection in electrokinetic instability. *Phys. Rev. E.*, 2011, vol. 84, p. 036318. DOI 10.1103/PhysRevE.84.036318
 10. Uzdanova, A.M., Kovalenko, A.V., Urtenov, M.K., Nikonenko, V.V., 1D mathematical modelling of non-stationary ion transfer in the diffusion layer adjacent to an ion-exchange membrane in galvanostatic model. *Membranes*, 2018, vol. 8, iss. 3, p. 84; DOI 10.3390/membranes8030084
 11. Mishchuk, N.A., Concentration polarization of interface and non-linear electrokinetic phenomena. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2010, vol. 160, iss. 1–2, pp. 16–39. DOI 10.1016/j.cis.2010.07.001
 12. Чубырь, Н.О., Коваленко, А.В., Уртенов, М.А.Х., Численные и асимптотические методы анализа переноса 1:1 электролита в мембранных системах. Краснодар, КубГУ, 2018. [Chubyr, N.O., Kovalenko, A.V., Urtenov, M.A.Kh., *Chislennyye i asimptoticheskie metody analiza perenosa 1:1 elektrolita v membrannykh sistemakh = Numerical and asymptotic methods for the analysis of electrolyte transfer 1:1 in membrane systems*. Krasnodar, KubGU, 2018. (in Russian)]
 13. Gudza, V.A., Chubyr, N.O., Kirillova, E.V., Urtenov, M.Kh., Numerical and asymptotic study of non-stationary mass transport of binary salt ions in the diffusion layer near the cation exchange membrane at prelimiting currents. *Appl. Math. Inf. Sci.*, vol. 15, iss. 4, pp. 411–422. DOI 10.18576/amis/150402
 14. Хромых, А.А., Чубырь, Н.О. Алгоритм численного решения одной краевой задачи с условием КРЗ. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2010615502. Заявка № 2010613989 от 05.07.2010. [Khromykh, A.A., Chubyr, N.O. *Algoritm chislennogo resheniya odnoy kraevoy zadachi s usloviem KRZ = Algorithm for the numerical solution of one boundary value problem with the CPD condition*. Certificate of registration of the computer program RU 2010615502. Application No. 2010613989 dated 05.07.2010. (in Russian)]
 15. Uzdanova, A., Urtenov, M., Mathematical modeling of the phenomenon of space-charge breakdown in the galvanostatic mode in the section of the electromembrane desalination channel. *Membranes (Basel)*, 2021, vol. 11, p. 873. DOI 10.3390/membranes11110873
 16. Urtenov, M., Chubyr, N., Gudza, V., Reasons for the formation and properties of soliton-like charge waves in membrane systems when using overlimiting current modes. *Membranes (Basel)*, 2020, vol. 10, iss. 8, p. 189. DOI 10.3390/membranes10080189
 17. Чубырь, Н.О., Коваленко, А.В., Уртенов, М.Х., Гудза, И.В., Математическая модель стационарного переноса ионов соли в сечении канала при равновесии. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*, 2022, vol. 10, no. 3. [Chubyr, N.O., Kovalenko, A.V., Urtenov, M.Kh., Gudza, I.V., Mathematical model of stationary transfer of salt ions in the channel section at equilibrium. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, optimization and information technology*, 2022, vol. 10, no. 3. (in Russian)] DOI 10.26102/2310-6018/2022.38.3.009
 18. Gudza, V., Urtenov, M.A.Kh., Chubyr, N.O., Shkorkina, I., Mathematical modelling of space charge breakdown in membrane systems taking into account the non-catalytic dissociation/ recombination reaction of water molecules. В: *E3S Web of Conferences. Series “Topical Problems of Agriculture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2020”*, 2020, p. 02009.

УДК 51.7

DOI 10.31429/vestnik-19-3-17-24

Аналитические решения для нестационарной модели ветровых течений

В.С. Кочергин¹✉, С.В. Кочергин¹, С.Н. Скляр²

¹ Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

² Американский Университет в Центральной Азии (AUCA), ул. Аалы Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизстан

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; e-mail: vskochoer@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается упрощенная трехмерная математическая модель ветровых течений в водоеме, полученная в результате анализа модели, основанной на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики, записанных в традиционных приближениях. Найдено аналитическое решение для интегральных составляющих горизонтальных компонент скорости нестационарной модели ветровых течений. В данной работе компоненты касательного напряжения трения ветра задаются по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации, а аналитическое решение получено для нестационарной задачи.

Ключевые слова: безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение, функция тока, интегральная скорость.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Аналитические решения для нестационарной модели ветровых течений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 17–24. DOI 10.31429/vestnik-19-3-17-24

Поступила 31 мая 2022 г. После доработки 13 августа 2022 г. Принято 15 августа 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Analytical Solutions for a Non-Stationary Model of Wind Currents

V.S. Kochergin¹✉, S.V. Kochergin¹, S.N. Sklyar²

¹ Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

² American University of Central Asia, Aaly Tokombaev str., 7/6, Bishkek, 720060, Kirgizstan

✉ Vladimir S. Kochergin; e-mail: vskochoer@gmail.com

Abstract. The paper considers a simplified three-dimensional mathematical model of wind currents in a reservoir obtained by analyzing a model based on a system of complete nonlinear equations of hydrothermodynamics written in traditional approximations. An analytical solution has been found for the integral components of the horizontal velocity components of a non-stationary wind flow model. In this paper, the components of the tangential wind friction stress are set according to a special law that allows describing complex wind situations, and an analytical solution is obtained for a non-stationary problem.

Keywords: dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution, current function, integral velocity.

Funding. The work was carried out for the state assignment on the topic 0555-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal studies”).

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

Cite as: Kochergin V.S., Kochergin S.V., Sklyar S.N. Analytical solutions for a non-stationary model of wind currents. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 17–24. DOI 10.31429/vestnik-19-3-17-24

Received 31 May 2022. Revised 13 August 2022. Accepted 15 August 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

В данной работе рассматривается упрощенная трехмерная математическая модель ветровых течений в водоеме, полученная в результате анализа модели, основанной на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики, записанных в традиционных приближениях [1]. Анализ проведен на основе процедуры обезразмеривания модели с последующим исключением из системы уравнений членов, описывающих адвекцию и горизонтальную диффузию. Дополнительные ограничения состоят в рассмотрении задачи в прямоугольной области и задании компонент касательного напряжения трения ветра по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации. В рамках вышеуказанных ограничений найдено аналитическое решение для интегральных составляющих горизонтальных компонент скорости модели ветровых течений [2–4]. Отметим, что принятые ограничения являются достаточно мягкими и позволяют сохранить в модели наиболее важные свойства моделируемых объектов. Это дает возможность при выборе основных параметров в модели, отражающих специфику водоема, получить некоторые свойства течений в этом водоеме «в первом приближении». Подобные задачи ранее реализованы в [5, 6] при помощи метода обращения динамического оператора при тестировании используемых разностных схем специального вида для вычисления полей скорости, а в работах [7–10] исследуется модель с переменными скоростями в трехмерном пространстве, что позволяет анализировать точность вычисления не только ее горизонтальных компонент, но и вертикальной составляющей. В данной работе компоненты касательного напряжения трения ветра задаются по специальному закону, позволяющему описать сложные ветровые ситуации, а аналитическое решение получено для нестационарной задачи.

1. Задача в безразмерном виде

Будем считать, что поверхность (зеркало) рассматриваемого водоема в плоскости xOy имеет форму прямоугольника

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q],$$

глубина его $H > 0$ — постоянна. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом: Ox — на восток, Oy — на север, Oz — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\}$$

рассмотрим следующую модель ветровых течений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \ell u = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$t > 0, \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega},$$

— с краевыми условиями

$$\left\{ z = 0, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\} : \quad k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \quad (1.2)$$

$$\left\{ z = H, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\} : \quad k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \quad (1.3)$$

$$\{0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial \Omega_0\} : \quad Un_x + Vn_y = 0. \quad (1.4)$$

В (1.4) используются интегральные скорости

$$U(x, y) = \int_0^H u(x, y, z) dz, \quad V(x, y) = \int_0^H v(x, y, z) dz,$$

а в (1.3) принимается следующий вариант параметризации придонного трения:

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \quad (1.5)$$

Пусть в соответствии с [2–4]

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const}. \quad (1.6)$$

Компоненты ветрового воздействия зададим в следующем виде:

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y). \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь приняты обозначения:

$$r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q};$$

$$l, s = 0, 1, 2, \dots; \quad m, p = 1, 2, \dots$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных (F_1, F_2, G_1, G_2) и четыре целых (l, m, s, p) числовых параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Например, при $F_1 = \frac{Fq}{\pi}, F_2 = G_1 = G_2 = 0, l = 0, m = 1$ имеем

$$\tau_x = \frac{Fq}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \quad (1.8)$$

а при

$$F_1 = \frac{Fq}{\pi}, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -\frac{Fq}{\pi}, \quad G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1 \quad (1.9)$$

имеем циклон над акваторией.

2. Аналитическое решение

В работе [11] получено аналитическое решение для уравнения функции тока в стационарном случае. Основные формулы для стационарной модели имеют вид

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y),$$

где

$$\Psi_1(x, y) = [C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y),$$

$$D_1 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_1 + \beta r_l F_2}{\mu^2(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m, \quad D_2 = \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_2 - \beta r_l F_1}{\mu^2(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2} q_m,$$

$$C_1 = D_1 \frac{e^{Br} - (-1)^l}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_2 = D_1 \frac{(-1)^l - e^{Ar}}{e^{Ar} - e^{Br}},$$

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}, \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_m)^2}.$$

Аналогично для второй составляющей решения имеем

$$\Psi_2(x, y) = [\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y),$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\beta r_s G_1 - \mu(r_s^2 + q_p^2)G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s, \quad \bar{D}_2 = \frac{\mu(r_s^2 + q_p^2)G_1 + \beta r_s G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2} r_s,$$

$$\bar{C}_1 = \bar{D}_1 \frac{e^{\bar{B}r} - (-1)^s}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}, \quad \bar{C}_2 = \bar{D}_1 \frac{(-1)^s - e^{\bar{A}r}}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}$$

$$\bar{A} = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}, \quad \bar{B} = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + (q_p)^2}.$$

Интегральные составляющие вектора горизонтальной скорости можно определить дифференцированием, по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

В итоге получим

$$U(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [\Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y)] = q_m [C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_l x) + D_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y) + q_p [\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \cos(q_p y); \quad (2.1)$$

$$V(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} [\Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y)] = -[AC_1 e^{Ax} + BC_2 e^{Bx} - r_l D_1 \sin(r_l x) + r_l D_2 \cos(r_l x)] \sin(q_m y) - [\bar{A}\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{B}\bar{C}_2 e^{\bar{B}x} - r_s \bar{D}_1 \sin(r_s x) + r_s \bar{D}_2 \cos(r_s x)] \sin(q_p y). \quad (2.2)$$

3. Эволюционная модель

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) в полном объеме, не предполагая ее стационарности. Задача для интегральных скоростей, как и ранее, получается, если уравнения системы (1.1) проинтегрировать по z от 0 до H , учитывая краевые условия (1.2), (1.3), (1.6), а затем перекрестным дифференцированием исключить давление P^s

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial(\ell V)}{\partial y} - \frac{\partial(\ell U)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ Un_x + Vn_y = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

В (3.1) и далее отсутствуют начальные условия, поскольку наша цель — найти широкий класс решений задачи, а начальные условия будут определяться выбором нужного решения. Как и ранее, введем функцию тока $\Phi(x, y, t)$ по формулам (обозначения изменены, чтобы учесть стационарный случай)

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Подставив эти величины в первое уравнение из (3.1), получим

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \Phi = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решения задачи (3.3) будем искать в виде

$$\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y) + \Phi_0(x, y, t),$$

где $\Psi(x, y)$ — решение стационарной неоднородной задачи

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \Psi = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0; \end{cases} \quad (3.4)$$

а $\Phi_0(x, y, t)$ — решение нестационарной однородной задачи

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = 0, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \quad t > 0; \\ \Phi_0 = 0, & (x, y) \in \partial \Omega_0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Решение стационарной задачи представлено в предыдущем разделе. Решение задачи (3.5) будем искать в виде

$$\Phi_0(x, y, t) = \varphi(x, y)\theta(t). \quad (3.6)$$

Подставим (3.6) в уравнение (3.5) и разделим переменные

$$\begin{cases} \theta'(t) = (\beta\rho - \mu)\theta(t), & t > 0; \\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \varphi(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial \Omega_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

В (3.7) и (3.8) ρ — параметр метода разделения переменных, вообще говоря, комплекснозначный. Наша цель — найти нетривиальные решения задач (3.7) и (3.8), а также соответствующие значения параметра ρ , при которых эти решения существуют. Из (3.7) получаем

$$\theta(t) = \theta_0 e^{(\beta\rho - \mu)t}, \quad t > 0. \quad (3.9)$$

Решение задачи (3.8) будем искать в виде

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.10)$$

Подставим (3.10) в уравнение (3.8) и разделим переменные

$$\begin{cases} Y''(y) + \sigma Y(y) = 0, & 0 < y < q; \\ Y(0) = Y(q) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \frac{1}{\rho} X'(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < r, \\ X(0) = X(r) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Решение спектральной задачи (3.11) имеет вид

$$Y(y) = C \sin(q_n y), \quad \sigma = q_n^2, \quad q_n = \pi n/q, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Рассмотрим спектральную задачу (3.12). Определим функцию $X(x)$ и соответствующий спектральный параметр ρ . Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{1}{\rho} \lambda - \sigma = 0, \quad (3.14)$$

тогда $X(x)$ может быть найдена в виде

$$X(x) = S e^{\lambda_1 x} + P e^{\lambda_2 x}. \quad (3.15)$$

Удовлетворяя краевым условиям из (3.12), приходим к выводу

$$P = -S, \quad \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2, \quad \operatorname{Im} \lambda_1 - \operatorname{Im} \lambda_2 = 2r_k, \quad r_k = \pi k/r \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Из (3.14) и теоремы Виета следует

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1/\rho, \\ \lambda_1 \lambda_2 = -q_n^2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Второе из соотношений (3.17) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_1 \operatorname{Re} \lambda_2 - \operatorname{Im} \lambda_1 \operatorname{Im} \lambda_2 = -q_n^2, \\ \operatorname{Re} \lambda_1 \operatorname{Im} \lambda_2 + \operatorname{Im} \lambda_1 \operatorname{Re} \lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Далее второе из соотношений (3.16) и (3.18) дает

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \lambda_1 \operatorname{Im} \lambda_2 = q_n^2 + \operatorname{Re}^2 \lambda_1, \\ \operatorname{Re} \lambda_1 (\operatorname{Im} \lambda_2 + \operatorname{Im} \lambda_1) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Вариант $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0$ невозможен, так как приводит к противоречию: $-\operatorname{Im}^2 \lambda_1 = q_n^2 + \operatorname{Re}^2 \lambda_1$, что следует из (3.19). Таким образом, доказано, что $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$, и из соотношений (3.16) и (3.19) получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \lambda_1 - \operatorname{Im} \lambda_2 = 2r_k, \\ \operatorname{Im} \lambda_1 \operatorname{Im} \lambda_2 = q_n^2. \end{cases}$$

Из последних уравнений и первого соотношения (3.17) получаем две пары параметров

$$\operatorname{Im} \lambda_1 = \alpha_k^n + r_k, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 = \alpha_k^n - r_k, \quad \rho = i/2\alpha_k^n, \quad \alpha_k^n = \sqrt{r_k^2 + q_n^2}; \quad (3.20)$$

$$\operatorname{Im} \lambda_1 = r_m - \alpha_m^n, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 = -r_m - \alpha_m^n, \quad \rho = -i/2\alpha_m^n, \quad \alpha_m^n = \sqrt{r_m^2 + q_n^2}. \quad (3.21)$$

Сопоставляя (3.6), (3.9), (3.10), (3.13) и (3.15), находим решение задачи (3.5)

$$\varphi(x, y)\theta(t) = \sin(q_n y) S(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) e^{(\beta\rho - \mu)t}. \quad (3.22)$$

Функция (3.22), вообще говоря, комплекснозначная, нас же интересуют вещественные значения решения задачи (3.5). Очевидно, что такие решения мы сможем найти, рассматривая вещественную или мнимую части функции (3.22)

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y, t) = \operatorname{Re} [\varphi(x, y)\theta(t)] &= \sin(q_n y) \sin\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda_1 - \operatorname{Im} \lambda_2}{2} x\right) e^{-\mu t} \times \\ &\times \left[S_1 \sin\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda_1 + \operatorname{Im} \lambda_2}{2} x + \beta \operatorname{Im} \rho t\right) + S_2 \cos\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda_1 + \operatorname{Im} \lambda_2}{2} x + \beta \operatorname{Im} \rho t\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Последняя формула получена путем несложных преобразований, в ней S_1, S_2 — произвольные вещественные числа. Рассмотрим вариант (3.20), из формулы (3.23) получим

$$\Phi_0(x, y, t) = \sin(r_k x) \sin(q_n y) e^{-\mu t} \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) \right]. \quad (3.24)$$

Рассматривая второй вариант выбора параметров (3.21), получаем

$$\Phi_0(x, y, t) = \sin(r_k x) \sin(q_n y) e^{-\mu t} \left[-S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Это говорит о том, что при произвольных вещественных параметрах S_1, S_2 множества решений (3.24) и (3.25) совпадают, поэтому ограничимся множеством решений вида (3.24). Если вместо вещественной части функции (3.22) рассматривать ее мнимую часть, то также получим

множество решений вида (3.24), это несложно проверить. Теперь можно выписать множество решений задачи (3.3)

$$\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y) + \Phi_0(x, y, t) = \Psi(x, y) + \sin(r_k x) \sin(q_n y) e^{-\mu t} \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) \right]. \quad (3.26)$$

Выбор конкретного решения из множества (3.26) определяется выбором параметров S_1 , S_2 , k , n . В соответствии с (3.2) интегральные скорости находим по формулам

$$U(x, y, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + q_n \sin(r_k x) \cos(q_n y) \times \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) \right] e^{-\mu t}, \quad (3.27)$$

$$V(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - r_k \cos(r_k x) \sin(q_n y) \times \left[S_1 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) \right] e^{-\mu t} - \alpha_k^n \sin(r_k x) \sin(q_n y) \left[S_1 \cos\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) - S_2 \sin\left(\alpha_k^n x + \frac{\beta t}{2\alpha_k^n}\right) \right] e^{-\mu t}. \quad (3.28)$$

Напомним, что первые слагаемые в формулах (3.27) и (3.28) являются стационарными интегральными скоростями, их значения вычисляются по формулам, найденным в предыдущем разделе.

Заключение

Для нестационарной задачи ветровой циркуляции Экмановского типа получено аналитическое решение при переменном по пространству ветровом воздействии. Полученные решения могут быть использованы в качестве эталонных для тестирования различных разностных схем. Результаты могут быть использованы при построении численных моделей динамики океана и различных водоемов.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана*. Наука, Москва, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie cirkulyacii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation*. Nauka, Moskva, 1988. (in Russian)]
2. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
3. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description*. University of California Press, 1965.
4. Стоммел, Г., *Гольфстрим*. Москва, ИЛ, 1965. [Stommel, G., *Gulfstream = Gulfstream*. Moscow, Inostrannaya Literatura, 1965. (in Russian)]
5. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, ЭкоСи-Гидрофизика, 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins*. Sevastopol, Ekosi-Gidrofizika, 2002. (in Russian)]
6. Kochergin, V.P., Dunets, T.V., Computational algorithm of the evaluations of inclinations of the level in the problems of the dynamics of basins. *Physical oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232.

7. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical Test Problem of Wind Currents. In: Chaplina T.O (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume I*. Springer Geology. Springer, Cham., 2020, pp. 17–25. DOI 10.1007/978-3-030-38177-6_3
8. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the test three-dimensional problem of wind flows. In: Chaplina T.O. (ed.) *Processes in GeoMedia. Volume II*. Springer Geology. Springer, 2021, pp. 65–71. DOI 10.1007/978-3-030-53521-6_9
9. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*. 2019. № 2. С. 193–198. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Processes in geoenvironments*, 2019, no. 2, pp. 193–198. (in Russian)]
10. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическое решение тестовой задачи ветровых течений при постоянном ветре. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2021. Т. 18, № 1. С. 32–35. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the test problem of wind currents at constant wind. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 1, pp. 32–35. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-18-1-32-35
11. Кочергин, В.С., Кочергин, В.С., Скляр, С.Н., Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 16–25. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical solution of the equation for the stream function in the model of flows with spatially variable wind action. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 19, no. 1, pp. 16–25. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-19-1-16-24

УДК 519.7

DOI 10.31429/vestnik-19-3-25-37

Функционал гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля с краем

М. Е. Щербаков¹, Е. А. Щербаков[✉]

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Щербаков Евгений Александрович; e-mail: ko4ep@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается класс допустимых гладких выпуклых поверхностей Лиувилля с краем. В ней выводится нелинейное уравнение Бельтрами, решения которого определяют переход от произвольной изотермической параметризации к полугеодезической. С использованием теоремы о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера устанавливается возможность варьирования допустимых поверхностей с сохранением принадлежности классу допустимых поверхностей. На классе допустимых поверхностей по аналогии с осесимметрическим случаем определяется функционал гауссовой кривизны и доказывается, что его первая вариация определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

Ключевые слова: выпуклая поверхность Лиувилля с краем, изотермическая параметризация, глобальная полугеодезическая параметризация, локальная полугеодезическая параметризация, уравнение Бельтрами, квазиконформные отображения, задача Дирихле, уравнение Монжа-Ампера, гауссова кривизна, функционал гауссовой кривизны.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Щербаков М. Е., Щербаков Е. А. Функционал гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля с краем // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 25–37. DOI 10.31429/vestnik-19-3-25-37

Поступила 20 сентября 2022 г. После доработки 10 октября 2022 г. Принято 11 октября 2022 г.

Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Gaussian Curvature Functional in the Class of Convex Liouville Surfaces with Boundary

М. Е. Shcherbakov, Е. А. Shcherbakov[✉]

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Eugeny A. Shcherbakov; e-mail: ko4ep@mail.ru

Abstract. In the paper, a class of regular convex and bordered Liouville surfaces is considered. We deduce the non-linear Beltrami equation whose solutions permit to transform arbitrary isothermal parameterization into semi-geodesic one. Using the well-known representations of geodesic lines of Liouville surfaces, we prove that Beltrami equation turns to be linear one. Using geodesic lines of the surface, we construct also topological mapping on the set defined by the distribution of geodesic lines. We prove that this mapping is a solution of the Beltrami equation realizing passing from isothermal parameterization to the semi-geodesic one. Applying the theorem of solvability of Dirichlet problem for Monge-Ampere equation, we prove that the admissible surfaces admit non-trivial variations leading to admissible ones. As in the case of axisymmetrical surfaces we define functional of Gauss curvature on the class of admissible surfaces and prove that its first variation for some special variations of the admissible surface is determined by its Gauss curvature.

Keywords: convex Liouville bordered surface, isothermal parameterization, global semi-geodesic parameterization, local semi-geodesic parameterization, Beltrami equation, quasiconformal mapping, Dirichlet problem, Monge-Ampere equation, Gauss curvature, functional of Gauss curvature.

Funding. The study did not have sponsorship.

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

Cite as: Shcherbakov M. E., Shcherbakov E. A. Gaussian curvature functional in the class of convex Liouville surfaces with boundary. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 25–37. DOI 10.31429/vestnik-19-3-25-37

Received 20 September 2022. Revised 10 October 2022. Accepted 11 October 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

1. Постановка задачи

В работах [1–3] были определены функционалы гауссовой кривизны, заданные на осесимметрических поверхностях. С их помощью были сформулированы вариационные задачи, решения которых определяют различные равновесные формы висящих жидких капель в трёхфазной модели равновесия, в которой учитывается наличие промежуточного слоя. Такого рода подход позволяет обобщить теорию капиллярных явлений, математическое обоснование которой изложено в работе [4], на тот случай, когда, по крайней мере, один из радиусов кривизны равновесной поверхности представляет собой достаточно большую величину (этом случае классическая формула Лапласа неприменима).

Как известно, осесимметрические поверхности принадлежат к более широкому классу поверхностей, так называемых поверхностей Лиувилля.

Поверхности Лиувилля характеризуются тем, что их первая квадратичная форма при изотермической параметризации поверхности имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v)) (du^2 + dv^2).$$

При конструировании функционала гауссовой кривизны в классе осесимметрических поверхностей был использован тот факт, что эти поверхности допускают глобальную полугеодезическую параметризацию.

В работах [1–3], в которых было использовано локальное преобразование осесимметрической поверхности, переводящее геодезические линии в геодезические, было установлено, что сконструированные в них функционалы являются функционалами гауссовой кривизны.

Поскольку для поверхностей Лиувилля существует координатная запись геодезических линий в явном виде, то представляется возможным обобщить полученные там результаты на случай поверхностей Лиувилля.

Реализации этой программы посвящены следующие разделы работы.

2. Квазиконформные отображения и полугеодезическая параметризация поверхностей Лиувилля

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D_\Lambda$ — поверхность Λ Лиувилля с краем. Здесь D_Λ — единичный диск с центром в начале координат. Будем считать, что параметризация рассматриваемой поверхности выбрана таким образом, что её первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v)) (du^2 + dv^2). \quad (2.1)$$

Относительно функций $\varphi\psi$ будем предполагать, что они являются непрерывно дифференцируемыми на интервале $(-1, 1)$ и непрерывными на отрезке $[-1, 1]$ положительными функциями.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Допустим, что существует глобальная полугеодезическая параметризация $r^* : D_\Lambda^* \rightarrow \Lambda$ рассматриваемой поверхности Лиувилля и τ, t — полугеодезические координаты. Будем считать, что $r^* (\{t = \text{const}\})$ представляют собой геодезические линии поверхности.

Пусть

$$\theta = \theta(w), \quad w = u + iv, \quad w \in D_\Lambda, \quad \theta = \tau + it$$

топологическое отображение круга D_Λ на область D_Λ^* , осуществляющее переход от изометрической параметризации к полугеодезической параметризации.

Тогда функция θ является решением сопряжённого уравнения Бельтрами

$$\theta_{\bar{w}}(w) = \frac{(\varphi(u) + \psi(v)) - J_\theta(w)}{(\varphi(u) + \psi(v)) + J_\theta(w)} \bar{\theta}_w(w). \quad (2.2)$$

Здесь $J_w(u, v)$ — якобиан преобразования $\theta = \theta(u, v)$

$$J_\theta(w) = |\theta_w|^2 - |\theta_{\bar{w}}|^2.$$

Доказательство. Пусть

$$ds^2 = d\tau^2 + G(\tau, t)dt^2, \tag{2.3}$$

представление первой квадратичной формы (2.1) в полугеодезических координатах τt .

Из очевидного равенства

$$\begin{aligned} \left[(\varphi(u) + \psi(v)) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + \left[(\varphi(u) + \psi(v)) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 - 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} dudv = \\ = G(\tau(u, v), t(u, v)) \left(\frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv \right)^2 \end{aligned}$$

получаем,

$$(\varphi(u) + \psi(v)) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 = 0.$$

Предположим, что существует функция ω , такая, что имеют место равенства

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = (\cos \omega) \sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = (\sin \omega) \sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом получаем

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\sin \omega \frac{\sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}}{\sqrt{G}}, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \cos \omega \frac{\sqrt{\varphi(u) + \psi(v)}}{\sqrt{G}}. \tag{2.5}$$

Исключая из (2.4), (2.5) $\sin \omega$, $\cos \omega$, получим

$$\frac{\partial \tau}{\partial u}(u, v) = \sqrt{G(\tau(u, v), t(u, v))} \frac{\partial t}{\partial v}(u, v), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial v}(u, v) = -\sqrt{G(\tau(u, v), t(u, v))} \frac{\partial t}{\partial u}(u, v). \tag{2.7}$$

Пусть

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Используя определённые таким образом дифференциальные операторы, перепишем систему уравнений (2.6), (2.7) в комплексной форме

$$\theta_{\bar{w}}(w) = \frac{\sqrt{G(\tau(u, v), t(u, v))} - 1}{\sqrt{G(\tau(u, v), t(u, v))} + 1} \bar{\theta}_w(w). \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.4), (2.5) получаем, что функция $\sqrt{G(\tau(u, v), t(u, v))}$ представима в следующем виде:

$$\sqrt{G(\tau(u, v), t(u, v))} = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{J_\theta(u, v)}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.8), получим нелинейное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\theta = \theta(u, v)$, реализующая переход от изотермической параметризации поверхности к полугеодезической

$$\theta_{\bar{w}}(w) = \frac{(\varphi(u) + \psi(v)) - J_\theta(w)}{(\varphi(u) + \psi(v)) + J_\theta(w)} \bar{\theta}_w(w). \tag{2.10}$$

Лемма доказана. \square

Построим теперь в явном виде топологическое отображение $\theta = \theta(u, v)$. С этой целью заметим, что геодезические линии поверхности Лиувилля имеют вид

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} \pm \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t, \quad t, c \in R. \quad (2.11)$$

Рассмотрим семейство геодезических, накрывающих рассматриваемую поверхность, следующего вида

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} - \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t, \quad t, c \in R. \quad (2.12)$$

Рассмотрим также семейство ортогональных линий

$$\int_0^u \sqrt{\varphi(x) + c} dx + \int_0^v \sqrt{\psi(y) - c} dy = \tau. \quad (2.13)$$

Теорема 2.2. Пусть

$$C = C(u, v) = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} - \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}}, \quad (2.14)$$

$$B = B(u, v) = \int_0^u \sqrt{\varphi(x) + c} dx + \int_0^v \sqrt{\psi(y) - c} dy. \quad (2.15)$$

Предположим, что функции $\varphi(u) + \psi(v)$, $\sqrt{\varphi(u) + c}\sqrt{\psi(v) - c}$ не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в D_Δ . Тогда преобразование

$$\Omega := B + iC$$

осуществляет топологическое отображение круга D_Δ на область D_Δ^* , осуществляющее переход от изотермической параметризации к геодезической.

Доказательство. Заметим прежде всего, что из условий

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x) + c}}, \quad C_v = \frac{1}{\sqrt{\psi(y) - c}}$$

и из условий теоремы следует, что геодезические линии локально представляют собой графики дифференцируемых монотонных функций. Последнее означает также, что геодезические линии не имеют самопересечений.

Далее заметим, что рассматриваемые геодезические линии, соответствующие различным значениям t_1, t_2 , не пересекаются между собой.

Действительно, из условия пересечения геодезических линий в точке (u_0, v_0)

$$\int_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} - \int_0^{v_0} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t_1 = \int_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} - \int_0^{v_0} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t_2$$

следует, что $t_1 = t_2$. Противоречие.

Аналогичным образом доказывается, что линии $B(u, v) = \tau$ не имеют самопересечений и не пересекаются между собой.

Остаётся установить, что линии $\{C(u, v) = t\}$, $\{B(u, v) = \tau\}$ пересекаются лишь в одной точке. В противном случае мы имеем

$$\int_0^{u_1} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} - \int_0^{v_1} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = \int_0^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) + c}} - \int_0^{v_2} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t, \tag{2.16}$$

$$\int_0^{u_1} \sqrt{\varphi(x) + c} dx + \int_0^{v_1} \sqrt{\psi(y) - c} dy = \int_0^{u_2} \sqrt{\varphi(x) + c} dx + \int_0^{v_2} \sqrt{\psi(y) - c} dy = \tau. \tag{2.17}$$

Из условия

$$u_1 < u_2 \tag{2.18}$$

в силу уравнения (2.17) следует, что

$$v_2 < v_1. \tag{2.19}$$

Однако при соблюдении неравенств (2.18), (2.19) равенство (2.16) не соблюдается. Аналогичным образом доказывается невозможность неравенства $u_2 < u_1$.

Следовательно, получаем

$$u_1 = u_2, \quad v_2 = v_1.$$

Итак, установлено, что линии $\{C(u, v) = t\}$, $\{B(u, v) = \tau\}$ определяют ортогональную сеть на рассматриваемой поверхности, а функция Ω осуществляет топологическое отображение круга D_Λ на область D_Λ^* .

Для доказательства второй части теоремы с помощью непосредственных вычислений убеждаемся в том, что функция Ω является решением уравнения (2.10).

Обратная к функции Ω функция $u(\tau, t) + iv(\tau, t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{J_\Omega(u, v)} u_\tau &= v_t; \\ -\frac{\varphi(u) + \psi(v)}{J_\Omega(u, v)} v_\tau &= u_t. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Пусть $R(\tau, t) := r(u(\tau, t), v(\tau, t))$ — новая параметризация рассматриваемой поверхности. Используя (2.20), приходим равенству

$$R_\tau^2(\tau, t) = 1, \quad (\tau, t) \in D_\Lambda^*. \tag{2.21}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle R_t, R_\tau \rangle &= \langle r_u u_t + r_v v_t, r_u u_\tau + r_v v_\tau \rangle = (\varphi(u) + \psi(v)) (u_t u_\tau + v_t v_\tau) = \\ &= -\frac{\varphi(u) + \psi(v)}{J_\Omega(u, v)} v_\tau \frac{J_\Omega(u, v)}{\varphi(u) + \psi(v)} v_t + v_t v_\tau = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Соотношения (2.21), (2.22) показывают, что функция Ω осуществляет переход от изотермической к полугеодезической параметризации. Используя представление

$$J_\Omega(u, v) = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c} \sqrt{\psi(v) - c}},$$

теперь получим, что

$$G(\tau, t) = R_t^2(\tau, t) = (\varphi(u(\tau, t)) + c) (\psi(v(\tau, t)) - c). \tag{2.23}$$

Из (2.21), (2.23) получаем следующее представление для первой квадратичной формы поверхности Лиувилля в полугеодезических координатах

$$ds^2 = d\tau^2 + (\varphi(u(\tau, t)) + c) (\psi(v(\tau, t)) - c) dt^2.$$

Теорема доказана. \square

3. Класс допустимых поверхностей Лиувилля

Обозначим через L класс поверхностей Лиувилля, допускающих параметризацию, в которой первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v)) (du^2 + dv^2). \quad (3.1)$$

Здесь $\varphi(u), \psi(v)$ – дифференцируемые на отрезке $[-1, 1]$ функции, принадлежащие классу $C^{4+\alpha}([-1, 1])$, $\alpha \in (0, 1)$.

Будем предполагать, что $\sqrt{\varphi(u) + c\sqrt{\psi(v) - c}}$ не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в круге $D_\Delta = \{w = u + iv, |w| < 1\}$. Константу c , для простоты, будем считать одной и той же для всех поверхностей из L .

Положим также, что рассматриваемые поверхности являются графиками функций $z = u + iv$, $w \in D_\Delta$.

Будем считать поверхности выпуклыми, а также для простоты, будем считать выполненным следующее условие

$$\left| \left[\left(\sqrt{\psi(v) - c} \right)' - \left(\sqrt{\varphi(u) + c} \right)' \right] \frac{\sqrt{\psi(v) - c} \sqrt{\varphi(u) + c}}{\varphi(u) + \psi(v)} \right| \leq 1. \quad (3.2)$$

Поверхности Лиувилля, удовлетворяющие поставленным условиям будем называть допустимыми поверхностями.

Теорема 3.1. Класс поверхностей, определяемых описанными свойствами, не пуст.

Доказательство. В силу предположений относительно функций φ, ψ функция $K = K(u, v)$ определяемая по формуле гауссовой кривизны по коэффициентам φ, ψ , принадлежит пространству $C^{2+\alpha}(\bar{G})$. Воспользуемся теперь следующей теоремой [5], которую в силу её значения мы приводим в тексте нашей работы.

Пусть G – строго выпуклая область класса $C^{k+2,\alpha}$. Пусть $f \in C^{k,\alpha}(\bar{G})$ и $f \geq c_0 > 0$. Тогда существует единственное решение $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{G})$ задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \det D^2 u(w) &= f, \quad w \in G, \\ u(w) &= 0, \quad w \in \partial G. \end{aligned}$$

Из этой теоремы следует существование поверхности с заданной кривизной $K = K(u, v)$, определяемой коэффициентами φ, ψ в окрестности произвольной точки (u_0, v_0) из G . Пусть первая квадратичная форма построенной поверхности в полугеодезической параметризации имеет вид

$$dt^2 + G^*(t, \tau) d\tau^2.$$

В таком случае в силу инвариантности гауссовой кривизны при диффеоморфизмах мы получаем, что в окрестности точки $t = 0$ функция G соответствующая первой квадратичной форме, определяемой функциями φ, ψ , при приведении её к полугеодезической параметризации, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция G^* на каждой линии $\{\tau = \text{const}\}$.

В силу единственности решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial t^2} + K \sqrt{G} = 0$$

получаем, что функции G, G^* совпадают между собой. Функция G связана с функциями φ, ψ с помощью преобразования, определяемого функцией Ω , осуществляющей переход от изометрической к полугеодезической параметризации.

Осуществляя обратный переход, получим, что первая квадратичная форма поверхности, построенная как решение уравнения Монжа – Ампера, определяет поверхность Лиувилля.

Теорема доказана. \square

4. Построение функционала гауссовой кривизны в классе выпуклых поверхностей Лиувилля

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — произвольная параметрическая поверхность из множества L допустимых поверхностей. Пусть

$$\theta = \tau + it, \quad t = t(u, v), \quad \tau = \tau(u, v)$$

— её полугеодезическая параметризация и

$$ds^2 = d\tau^2 + G(\bar{r}; \tau, t) dt^2$$

— представление её первой квадратичной формы в этих координатах. На множестве L рассмотрим функционал $K(\bar{r})$ следующего вида:

$$K(\bar{r}) = \int_{\text{pr}_t \Omega(D_\Lambda)} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\bar{r}, \tau, t)) d\tau. \quad (4.1)$$

Здесь $\Gamma_t - t$ — сечение области $D_\Lambda^* := \Omega(D_\Lambda)$, $\text{pr}_t \theta(D_\Lambda)$ — её проекция на ось τ

$$g(\bar{r}, \tau, t) = \left(\sqrt{G(\bar{r}, \tau, t)} \right)_\tau \quad (4.2)$$

а функция $f = f(\sigma)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\sigma^2} \sqrt{1 - \sigma^2} - \frac{df}{d\sigma} \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} + f \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = -1.$$

Напомним здесь, что в случае поверхностей Лиувилля, представляющих собой осесимметрические поверхности, ранее были построены вариации этих поверхностей, на которых первая вариация функционала Ξ представляла собой линейную комбинацию гауссовой и средней кривизны.

Варьирование поверхностей при этом осуществлялось за счёт варьирования их образующих, представляющих собой их геодезические линии.

Для установления подобного результата относительно варьирования функционала Ξ в случае общих поверхностей Лиувилля поступим аналогичным образом. Построим вариацию поверхности Лиувилля в окрестности точки (u_0, v_0) с помощью вариации функций φ, ψ .

Рассмотрим функции φ^*, ψ^* следующего вида:

$$\varphi^*(u) = \varphi(u) + \varepsilon R(u), \quad \psi^*(v) = \psi(v). \quad (4.3)$$

Здесь $R(u)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в

$$\{(u, v) : u_0 - \delta < u < u_0 + \delta\}.$$

Рассмотрим поверхности Лиувилля, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = (\varphi^*(u) + \psi^*(v)) (du^2 + dv^2). \quad (4.4)$$

Из Теоремы 3.1 следует, что класс таких поверхностей при достаточно малых $\varepsilon > 0$ не пуст.

Пусть

$$\gamma_t := \Omega^{-1}(\Gamma_t).$$

Геодезическую линию γ_t^* , соответствующую поверхности, определяемой функциями φ^*, ψ^* , и отличающуюся от геодезической линии γ_t лишь в

$$\{(u, v) : u_0 - \delta < u < u_0 + \delta\}$$

будем разыскивать в виде

$$\int_0^{u+\varepsilon P(u)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^*(x) + c}} - \int_0^{v+\varepsilon Q(u)} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t. \tag{4.5}$$

Здесь $P(u), Q(v)$ — финитные функции, равные нулю во внешности отрезка

$$[u_0 - \delta, u_0 + \delta].$$

Нашей целью является нахождение таких функций P, Q, R что первая вариация функционала Ξ на геодезических вариациях вида (2.9) определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

Теорема 4.1. Пусть S — допустимая поверхность. Предположим дополнительно, что

$$\left(\sqrt{G}\right)_\tau \neq 1$$

в окрестности точки (u_0, v_0)

Тогда для произвольной бесконечно дифференцируемой финитной функции ζ

$$\text{supp } \zeta \subset \{(u, v) \in D_\Lambda \mid u_0 - \delta < u < u_0 + \delta\},$$

существуют финитные непрерывно дифференцируемые функции $P(u), Q(v), R(u)$, носители которых содержатся в $\text{supp } \zeta$, такие что первая вариация функционала K , определяемая вариациями геодезических заданной поверхности преобразованиями вида (2.9), имеет следующее представление

$$\delta K(\bar{r})(\bar{r}) = \varepsilon \int_{pr_t \theta(D_\Lambda)} dt \int_{\Gamma_t} (K(u(\tau, t), v(\tau, t))) \zeta(u(\tau, t), v(\tau, t)) d\tau. \tag{4.6}$$

Доказательство. Построим прежде всего полугеодезическую параметризацию провариированной поверхности Λ^* . С этой целью определим семейство кривых на поверхности, ортогональных семейству кривых, определяемых формулой (4.5). Пусть τ^* — число, определяемое условием

$$\int_0^{u+\varepsilon P(t, \tau)} \sqrt{\varphi^*(x) + c} dx + \int_0^{v+\varepsilon Q(t, \tau)} \sqrt{\psi(y) - c} dy = \tau^*. \tag{4.7}$$

При фиксированном значении t параметр τ является естественным параметром кривой Γ_t , а параметр τ^* — кривой Γ_t^* в п. 1, формулами (2.12), (2.13), было установлено топологическое соответствие между параметрами (u, v) и (τ, t) , устанавливающее взаимно однозначное соответствие между u и τ при фиксированном значении t . Аналогичным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между u^*, τ^* .

Ясно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ при любой дифференцируемой функции P между u, u^* устанавливается дифференцируемый гомеоморфизм.

Лемма 4.2. Пусть

$$\varphi^*(u) + c = \varphi(u) + c + \varepsilon \sqrt{\frac{\varphi(u) + c}{\psi(v) - c}} R(\tau). \tag{4.8}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(u, v) = \frac{\sqrt{\varphi(u) + c}}{\varphi(u) + \psi(v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}(u, v) = \frac{\sqrt{\psi(v) - c}}{\varphi(u) + \psi(v)}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau^*}(u, v) = \frac{\sqrt{\varphi^*(u) + c}}{(\varphi^*(u) + \psi(v))}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} = \frac{\sqrt{\varphi^*(u) + c}}{(\varphi^*(u) + \psi(v))} \left(\frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} - \varepsilon \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.11)$$

$$d\tau^* = d\tau + \varepsilon \left[-\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} + \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} + \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right] d\tau + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Доказательство. Для вычисления

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}(u, v)$$

продифференцируем (2.16), (2.17) по τ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\sqrt{\varphi(u) + c} \frac{\partial u}{\partial \tau}(u, v) + \sqrt{\psi(v) - c} \frac{\partial v}{\partial \tau}(u, v) = 1, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial u}{\partial \tau}(u, v) - \frac{1}{\sqrt{\psi(v) - c}} \frac{\partial v}{\partial \tau}(u, v) = 0.$$

Из ограничений, накладываемых на функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$, получаем, что определитель системы (4.13) отличен от нуля. Разрешая эту систему, получаем (4.9).

Аналогичным образом устанавливается (4.10).

Далее

$$\frac{\sqrt{\varphi^*(u) + c}}{(\varphi^*(u) + \psi^*(v))} = \frac{\partial u^*}{\partial \tau^*} = \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} = \left(\frac{\sqrt{\varphi(u) + c}}{\varphi(u) + \psi(v)} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial \tau^*}. \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует (4.11), (4.12).

Лемма доказана. \square

Лемма 4.3. В принятых нами обозначениях вариации функции $\sqrt{G(\tau, t)}$ и дифференциальных форм

$$\sqrt{G((\tau, t))}d\tau, \quad g(\tau, t)d\tau$$

имеют вид

$$\sqrt{G^*(\tau^*(\tau), t)} - \sqrt{G(\tau, t)} = \frac{\varepsilon}{2} (R(\tau) + S(\tau)) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

$$g^*(\tau^*, t) - g(\tau, t) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial \tau} \right) d\tau + g(\tau, t) \varepsilon \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right] d\tau + o(\varepsilon). \quad (4.16)$$

Доказательство. Следует из определения $g(\tau, t)$, $g^*(\tau^*, t)$ и (4.11).

Лемма доказана. \square

Лемма 4.4. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — параметризация поверхности Λ а $\bar{r}^* = \bar{r}^*(u, v)$ — поверхности Λ^* . Тогда вариация функционала K имеет вид

$$\begin{aligned} K(\bar{r}^*) - K(\bar{r}) &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int_{\Gamma_t} f_g(\tau, t) \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} \right) d\tau + \\ &+ \varepsilon \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f_g(\tau, t) g \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right] d\tau + \\ &+ \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right] d\tau + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Доказательство. В соответствии с определением функционала K получаем

$$\begin{aligned} K(\bar{r}^*) - K(\bar{r}) &= \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\bar{r}^*; \tau^*, t)) d\tau^* - \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\bar{r}; \tau, t)) d\tau = \\ &= \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int_{\Gamma_t} f(g^*(\tau^*, t)) d\tau^* - \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) d\tau = \\ &= \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int_{\Gamma_t} [f(g^*(\tau^*, t)) - f(g(\tau, t))] d\tau^* + \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) [d\tau^* - d\tau] = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda^*})} dt \int_{\Gamma_t} f_g(\tau, t) \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} \right) d\tau + \\ &+ \varepsilon \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f_g(\tau, t) g \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right] d\tau + \\ &+ \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} f(g(\tau, t)) \left[\frac{R}{2(\varphi(u) + c)} - \frac{R}{\varphi(u) + \psi(v)} - \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right] d\tau + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Для вывода уравнений для определения функций R, S заметим, что их следует подобрать таким образом, чтобы коэффициенты при функциях f, f_g , были равны коэффициентам уравнения, которому удовлетворяет функция f .

Это уравнение может быть записано в следующем виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[(1 - t^2) \frac{df}{dt} \right] + ft \right\} = -\sqrt{1 - t^2}. \quad (4.18)$$

Пусть $\zeta = \zeta(\tau, t)$ — финитная функция, заданная в окрестности точки (τ_0, t_0) . В таком случае функция f удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} \dot{g}(\tau, t) \zeta(\tau, t) d\tau &= - \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} \left\{ \left[(1 - g^2) \frac{df}{dg} \right] + fg \right\} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - g^2}} \zeta(\tau, t) \right) d\tau = \\ &= - \int_{pr_t\theta(D_{\Lambda})} dt \int_{\Gamma_t} \left\{ \left[(1 - g^2) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}} \right) \frac{df}{dg} \right] + fg \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}} \right) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Принимая во внимание (4.18) и (4.19), подберём коэффициенты P , Q , R так, чтобы они представляли решение следующей системы уравнений

$$\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\psi(v) - c}{\varphi(u) + c}} R(\tau, t) \right]_{\tau} - g \left[\frac{[R + P + Q](\tau(u, v), t(u, v))}{2(\varphi(u) + \psi(v))} + \sqrt{\varphi(u) + c} \frac{\partial P}{\partial \tau}(u, v) + \sqrt{\psi(v) - c} \frac{\partial Q}{\partial \tau}(u, v) \right] = (1 - g^2) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}} \right); \quad (4.20)$$

$$\left[\frac{(R + P + Q)(\tau(u, v), t(u, v))}{2(\varphi(u) + \psi(v))} + \sqrt{\varphi(u) + c} \frac{\partial P}{\partial \tau}(u, v) + \sqrt{\psi(v) - c} \frac{\partial Q}{\partial \tau}(u, v) \right] = g \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}} \right), \quad (4.21)$$

$$\int_0^{u+\varepsilon P(\tau, t)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^*(x) + c}} - \int_0^{v+\varepsilon Q(\tau, t)} \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - c}} = t. \quad (4.22)$$

Система (4.20)–(4.22) представляет собой систему интегро-дифференциальных функциональных уравнений для трёх неизвестных функций P , Q , R .

Из уравнений (4.20)–(4.22) получаем

$$\sqrt{\frac{\psi(v) - c}{\varphi(u) + c}} R(\tau, t) = \frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}}. \quad (4.23)$$

$$\frac{P(\tau, t)}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} - \frac{Q(\tau, t)}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} = \int_0^{u(\tau, t)} \frac{R^*(x) dx}{2(\sqrt{\varphi(x) + c})^3}.$$

Дифференцируя обе части уравнения (4.22) по τ , получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) \frac{1}{\sqrt{\varphi^*(u) + c}} - \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \tau} \right) \frac{1}{\sqrt{\psi^*(v) - c}} = 0,$$

в котором равенство выполняется с точностью до $o(\varepsilon)$. Учитывая сказанное относительно коэффициентов P , Q , R , заменим $o(\varepsilon)$ нулём. Учитывая равенство

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} - \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\varphi(u) + c}} - \frac{\partial Q}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\psi(v) - c}} = \\ & = -\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^*(u) + c}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(u) + c}} \right) - \frac{\partial v}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi^*(v) - c}} - \frac{1}{\sqrt{\psi(v) - c}} \right) \right] = \\ & = \frac{R}{2(\varphi(u) + c)(\varphi(u) + \psi(v))}. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Аналогичным образом из (4.22) получим равенство

$$\frac{P(\tau, t)}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} - \frac{Q(\tau, t)}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} = \int_0^{u(\tau, t)} \frac{R^*(x) dx}{2(\sqrt{\varphi(x) + c})^3}. \quad (4.25)$$

Здесь $R^*(x) = R(\tau(x, v), t(x, v))$.

В силу условий теоремы функция $o(\varepsilon)$ является дифференцируемой функцией. Дифференцируя (4.25) по τ , найдём

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}(u, v) - \frac{1}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} \frac{\partial Q}{\partial \tau}(u, v) - \\ & - \frac{P(\tau, t)}{2(\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c})^3} \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q(\tau, t)}{2(\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c})^3} \frac{d\psi}{dv} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}(u, v) - \frac{1}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} \frac{\partial Q}{\partial \tau}(u, v) - \\ & - \frac{P(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)} \frac{d\varphi}{du} + \frac{Q(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\psi(v) - c)} \frac{d\psi}{dv} = \\ & = \frac{R(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)}. \quad (4.26) \end{aligned}$$

Из (4.26) получаем ещё одно уравнение, связывающее неизвестные функции

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} \frac{\partial P}{\partial \tau}(u, v) - \frac{1}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} \frac{\partial Q}{\partial \tau}(u, v) - \\ & - \frac{P(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)} \frac{d\varphi}{du} + \frac{Q(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\psi(v) - c)} \frac{d\psi}{dv} = \\ & = \frac{R(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)}. \quad (4.27) \end{aligned}$$

Из (4.26), (4.27) следует

$$\begin{aligned} & \frac{R(\tau, t)}{2(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)} - \\ & + \frac{P(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)} \frac{d\varphi}{du} - \frac{Q(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\psi(v) - c)} \frac{d\psi}{dv} = 0. \quad (4.28) \end{aligned}$$

В результате получаем систему из трёх уравнений для трёх неизвестных функций

$$\sqrt{\frac{\psi(v) - c}{\varphi(u) + c}} R(\tau, t) = \frac{\zeta(\tau, t)}{\sqrt{1 - g^2}}; \quad (I)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R(\tau, t)}{2(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)} + \\ & + \frac{P(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\varphi(u) + c)} \frac{d\varphi}{du} - \frac{Q(\tau, t)}{(\varphi(u) + \psi(v))(\psi(v) - c)} \frac{d\psi}{dv} = 0; \quad (II) \end{aligned}$$

$$\frac{P(\tau, t)}{\sqrt{\varphi(u(\tau, t)) + c}} - \frac{Q(\tau, t)}{\sqrt{\psi(v(\tau, t)) - c}} = \int_0^{u(\tau, t)} \frac{R^*(x) dx}{2(\sqrt{\varphi(x) + c})^3} + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (III)$$

Разрешая полученную систему (I)–(III), эквивалентную (4.20)–(4.22), найдём функции P , Q , R , для которых первая вариация функционала K имеет вид (4.6).

Теорема доказана. \square

Литература [References]

1. Shcherbakov, E., Equilibrium state of a pendant drop with inter-phase layer. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2012, vol. 31, с. 1–15. DOI 10.4171/ZAA
2. Shcherbakov, E., Shcherbakov, M., On equilibrium of the pendant drop taking into account the flexural rigidity of intermediate layer. *Doklady Physics*, 2012, vol. 53, iss. 6, pp. 243–244.
3. Shcherbakov, E.A., Shcherbakov, M.E., On equilibrium of pendant drop its flexural rigidity of intermediate layer being accounted for. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 3, pp. 87–94.
4. Финн, Р., *Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория*. Москва, Мир, 1989. [Finn, R., *Equilibrium capillary surfaces*. New York, Springer, 1986.]
5. Figalli, A., *The Monge-Ampere equation and its applications. Zurich Lectures in Advanced Mathematics*. European Mathematical Society, Zurich, 2017.

УДК 539.3

DOI 10.31429/vestnik-19-3-38-46

Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных блочных элементов, имитирующих наночастицы

В. А. Бабешко^{1,2✉}, Д. А. Хрипков¹, В. С. Евдокимов², О. М. Бабешко¹, О. В. Евдокимова²

¹ Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

² Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

✉ Бабешко Владимир Андреевич; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. Теория блочных элементов граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных нашла ряд приложений в сейсмологии, теории прочности и разрушения, материаловедении. Теория фракталов, разработанная Б. Мандельбротом, является еще одной областью, в которой блочные элементы могли бы выступить в качестве имитаторов наночастиц — самоподобных деформируемых объектов. В ранее опубликованных работах приводится модель самоорганизации наночастиц на основе блочных элементов. В настоящей работе рассматривается вопрос самосборки наночастиц, которые, объединяясь, формируют объекты больших размеров. В основе этого исследования лежит ранее установленное свойство блочных элементов формировать дискретное топологическое пространство. Также используется свойство, присущее деформируемым штампам, генерировать резонансы колебаний в касательной к границе слоистой среды плоскости. Перечисленные свойства позволяют моделировать самосборку наночастиц.

Ключевые слова: наночастицы, самосборка, высокочастотные резонансы, дискретный спектр, блочные элементы.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00128). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Бабешко В. А., Хрипков Д. А., Евдокимов В. С., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных блочных элементов, имитирующих наночастицы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 38–46. DOI 10.31429/vestnik-19-3-38-46

Поступила 27 августа 2022 г. После доработки 11 сентября 2022 г. Принято 17 сентября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Construction of a Discrete Topological Self-Assembly Space for Packed Block Elements Simulating Nanoparticles

V. A. Babeshko^{1,2✉}, D. A. Khripkov¹, V. S. Evdokimov², O. M. Babeshko¹, O. V. Evdokimova²

¹ Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

² Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

✉ Vladimir A. Babeshko; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The theory of block elements of boundary value problems for partial differential equations has found a number of applications in seismology, strength and fracture theory, and materials science. The theory of fractals developed by B. Mandelbrot is another area in which block elements could act as simulators of nanoparticles – self-similar deformable objects. Previously published papers present a model of self-organization of nanoparticles based on block elements. In this paper, we consider the issue of self-assembly nanoparticles, which combine to form large objects. This study is based on the previously established property of block elements to form a discrete topological space. The property inherent in deformable stamps is also used to generate resonances of vibrations in a plane tangent to the boundary of the layered medium. These properties make it possible to simulate the self-assembly of nanoparticles.

Keywords: nanoparticles, self-assembly, high-frequency resonances, discrete spectrum, block elements.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00128).

The author(s) declare no competing interests. The author(s) contributed equally.

Cite as: Babeshko V. A., Khripkov D. A., Evdokimov V. S., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. Construction of a discrete topological self-assembly space for packed block elements simulating nanoparticles. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 38–46. DOI 10.31429/vestnik-19-3-38-46

Received 27 August 2022. Revised 11 September 2022. Accepted 17 September 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

В работе [1] предложена модель самоорганизации наночастиц, возникающей в связи с проявлениями высокочастотных резонансов объектов, расположенных на поверхности слоистой среды. В процессе исследования рассматривались вертикальные гармонические колебания такой блочной структуры. В то же время, по причинам сложных физико-механических процессов в микромире, существуют также и горизонтальные составляющие гармонических процессов. Косвенным свидетельством этого является возникновение броуновского движение в жидкости, состоящее в горизонтальных воздействиях на плавающие частицы, осуществляемых некоторыми микрообъектами молекулярного уровня. Допуская существование горизонтальных гармонических колебаний для деформируемых частиц, вызываемых в твердом теле тепловыми колебаниями атомных кристаллических решеток, можно таким же образом, как и в случае вертикальных колебаний, уже в системе интегральных уравнений также получить высокочастотный резонанс. Это следует из появления дискретного спектра оператора, поскольку за счет деформируемой частицы слоистая среда оказывается рельефной. Этот результат для рельефной полосы впервые был получен И.И. Ворovichem [2, 3] и подтвержден рядом примеров. В одной из последних работ, связанных с теорией деформируемых штампов [4], найдены аналитические уравнения для определения дискретных спектров.

В [5, 6] приведены примеры возникновения резонанса в слоистой среде при наличии на поверхности деформируемого блочного элемента. В работах по развитию механических методов прогноза землетрясений, где в качестве деформируемых штампов принимались пластины Кирхгофа, также описаны ситуации, когда встречаются дискретные спектры в задачах о горизонтальном движении литосферных плит [7]. В работах [8, 9] численными методами изучались полубесконечные и конечные пластины, авторами обнаружено явление резонанса на границе пластины, названное краевым резонансом.

Таким образом, с помощью подхода, основанного на свойствах контактных задач с деформируемым штампом, удастся выявить возникновение дискретного собственного числа в контактной задаче при горизонтальных смещениях деформируемых штампов.

1. О дискретном спектре деформируемого объекта на слое

Впервые вопрос возникновения дискретного спектра оператора теории упругости в неоднородной полосе был рассмотрен академиком И.И. Ворovichem в работах [2, 3]. Была исследована полоса с прямолинейными границами, имеющая в ограниченной области неоднородность в виде рельефности.

В дальнейшем в монографии [10] рассматривались модели деформируемого штампа на слое в виде пружины, соединяющей два абсолютно жестких штампа. В работах [5, 6] рассмотрен случай антиплоского колебания на слое прямоугольного деформируемого штампа. Исследован тот случай, когда в штампе относительно больших размеров возбуждается резонанс на частотах, на которых тонкий упругий слой заперт для возбуждаемых волн. Этот случай представляет интерес в связи с возможными приложениями. Опуская детали и рассматривая представление уравнений теории упругости в форме потенциальной и вихревой составляющих, имеем

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0.$$

Функция ϕ дает потенциальную составляющую решения, а компоненты ψ_n , $n = 1, 2, 3$ вектора ψ — вихревую.

Исходное уравнение будет удовлетворяться, если функции находятся из уравнений

$$\Delta\phi + k_1^2\phi = 0, \quad \Delta\psi_n + k_2^2\psi_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Параметры k_1 и k_2 характеризуют фазовые скорости ωk_1^{-1} и ωk_2^{-1} продольных и поперечных волн в упругой среде.

Были построены блочные элементы для более общих, чем (1.1), уравнений, включающих также уравнения вида

$$[A_{11}\partial^2x_1 + A_{22}\partial^2x_2 + A_{33}\partial^2x_3 + A] \phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1.2)$$

в областях, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда и различного вида пирамид. На границах областей ставятся условия Дирихле или Неймана.

Решения граничных задач отыскиваются в пространствах медленно растущих обобщенных функций. Рассмотрен случай, когда ставится граничная задача для упругого неограниченного слоя толщины h с рельефной верхней границей. Рельефность описываем упругим прямоугольным параллелепипедом, лежащим на верхней границе слоя и жестко соединенным с ним. Очевидно, такая конструкция, рассеченная по верхней границе слоя, распадается на два блока — прямоугольный параллелепипед (шестигранный блок) и слой (простейший двугранный блок). С позиции дифференциального метода факторизации такая структура — не более, чем двухслойный объект, только с большим количеством граней.

Функциональные уравнения для блока представимы в виде

$$\begin{aligned} K_1\Phi_1 = & \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\phi'_{13} - i\alpha_3^1\phi_1) \exp i [\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ & + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\phi'_{22} + i\alpha_1^1\phi_2) \exp i [-\alpha_1^1a + \alpha_2^1x_2^2 + \alpha_3^1(x_1^2 - b)] dx_1^2 dx_2^2 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\phi'_{33} + i\alpha_3^1\phi_3) \exp i [-\alpha_1^1x_1^3 + \alpha_2^1x_2^3 - \alpha_3^12b] dx_1^3 dx_2^3 - \\ & - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\phi'_{43} - i\alpha_1^1\phi_4) \exp i [\alpha_1^1a + \alpha_2^1x_2^4 - \alpha_3^1(x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\phi'_{53} + i\alpha_2^1\phi_5) \exp i [\alpha_1^1x_1^5 - \alpha_2^1c + \alpha_3^1(x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\phi'_{63} - i\alpha_2^1\phi_6) \exp i [-\alpha_1^1x_1^6 + \alpha_2^1c + \alpha_3^1(x_2^6 - b)] dx_1^6 dx_2^6. \quad (1.3) \end{aligned}$$

В случае слоя имеем

$$\begin{aligned}
 K_1 \Phi_1 = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{33} (\phi'_{130} - i\alpha_3^1 \phi_{10}) \exp i [\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{33} (\phi'_{330} + i\alpha_3^1 \phi_{30}) \exp i [-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 h] dx_1^3 dx_2^3. \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Здесь ϕ'_{m3} означает производную в локальной системе координат x_1^m, x_2^m, x_3^m по переменной x_3^m , ϕ_{m3} — значение функции в системе x_1^m, x_2^m, x_3^m .

Функциональные уравнения дают эквивалентную формулировку граничных задач, но уже в терминах интегральных преобразований. Они же выявляют подлежащие факторизации функции или матрицы-функции. Введя операторы преобразования Фурье, имеем

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k) \phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1^k, x_2^k) \exp(i(\boldsymbol{\alpha}^k, \mathbf{x}^k)) dx_1^k dx_2^k,$$

$$[\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k) \Phi] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k) \exp(-i(\boldsymbol{\alpha}^k, \mathbf{x}^k)) d\alpha_1^k d\alpha_2^k, \quad (\boldsymbol{\alpha}^k, \mathbf{x}^k) = \alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k,$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k) \phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1^k, x_2^k, x_3^k) \exp(i(\boldsymbol{\alpha}^k, \mathbf{x}^k)) dx_1^k dx_2^k dx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k) \Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k) \exp(-i(\boldsymbol{\alpha}^k, \mathbf{x}^k)) d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k, \quad k = 1, 2, \dots, 6,$$

$$(\boldsymbol{\alpha}^k, \mathbf{x}^k) = \alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k.$$

Псевдодифференциальные уравнения, являющиеся результатом вычисления формы-вычета Лере, описывают все возможные виды граничных условий, которые можно сформулировать для данной системы дифференциальных уравнений граничной задачи. После выбора граничных условий осуществляется переход к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениями для решения граничной задачи. В рассматриваемом случае имеем псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) \{ \dots \} = 0, \quad |x_1^1| \leq a, \quad |x_2^1| \leq c \quad \text{для блока,}$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) \{ \dots \} = 0, \quad -\infty \leq x_1^1, x_2^1 \leq \infty \quad \text{для слоя.}$$

Многоточие в этих формулах означает выражения, стоящие в правых частях формул (1.3) и (1.4) соответственно, при замене α_3^1 на α_{3-}^1 .

Подлежащие факторизации функции в левой части функциональных уравнений дают характеристические уравнения в локальных системах координат. Они имеют вид

$$K_1(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = \xi_{12} + A_{33}(\alpha_3^n)^2, \quad n = 1, 3;$$

$$K_2(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = \xi_{23} + A_{11}(\alpha_3^n)^2, \quad n = 2, 4;$$

$$K_3(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = \xi_{31} + A_{22}(\alpha_3^n)^2, \quad n = 5, 6,$$

$$\xi_{ij} = A_{ii}(\alpha_1^n)^2 + A_{jj}(\alpha_2^n)^2 - A.$$

Представляющие интерес корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_{33}^{-1}\xi_{12}}, \quad n = 1, 3;$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_{11}^{-1}\xi_{23}}, \quad n = 2, 4;$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_{22}^{-1}\xi_{31}}, \quad n = 5, 6.$$

Берутся те ветви аналитических функций, которые обеспечивают принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье. Находятся представления решения в каждой из введенных локальных систем координат, т.е. представление блочных элементов. Имеем

$$\phi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\mathbf{K}_1^{-1}\{\dots\}$$

для блока.

В случае слоя имеем

$$\phi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\mathbf{K}_1^{-1}\{\dots\}.$$

Представленные соотношения дают описание блочной структуры, отвечающей всем граничным задачам, возможным для рассматриваемой дифференциальной формы (1.2). Функции, не заданные на границе, но также входящие в псевдодифференциальные уравнения, рассматриваются как неизвестные. Для их определения псевдодифференциальные уравнения сводятся к интегральным или интегро-дифференциальным. На поверхности контакта двух блоков, в зависимости от условий контакта — жесткое сцепление, частичное сцепление, наличие трещины или включения, ставятся соответствующие граничные условия. Например, в случае жесткого сцепления блока со слоем, во всей группе уравнений блока надо принять $\phi_3 = \phi_{10}$, $\phi'_{33} = \phi'_{130}$. Система уравнений относительно неизвестных становится замкнутой.

Вопрос сопряжения принятых граничных условий с граничными условиями напряженно-деформированного состояния блочной структуры, оценки поведения решений в окрестности ребер, угловых точек и на бесконечности решается дополнительным исследованием, в ряде случаев достаточно простым.

Этапы исследования включают в себя сопряжение блоков в блочную структуру путем замены граничных условий слоя граничными условиями для блока, приближенное решение возникающего интегрального уравнения и определение из полученных соотношений параметров, обеспечивающих существование корректного решения при нулевых граничных условиях. В результате при малой относительной толщине слоя ($h \ll a$), получаются дискретные частоты блочной структуры; они описываются неравенством вида

$$k_2 \approx \pi\sqrt{(n+1/2)^2a^{-2} + (s+1/2)^2(b+h)^{-2}} < \frac{\pi}{2h}, \quad n, s = 0, 1, 2, \dots$$

Видно, что при любых числах n и s всегда найдутся такие ширина a и высота b блока, при которых слой с рельефной границей будет иметь конечное число дискретных резонансных частот. Этой особенностью колебания указанной структуры отличаются от колебания ограниченного тела, имеющего счетный спектр частот.

2. О высокочастотном резонансе деформируемого штампа на слое

Рассматривается многослойная среда, на ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1 , ox_2 лежат в касательной плоскости [4]. Предполагается, что в области $\Omega(A \leq x_1 \leq B, |x_2| \leq \infty)$ действует штамп.

Например, для среды, описываемой системой уравнений Ламе, предполагается, что в зоне контакта действует жесткий штамп без трения, т. е. в зоне контакта действуют только

нормальные напряжения. Вне штампа напряжения отсутствуют. Методом, описанным в [4], смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_A^B k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2), \quad A \leq x_1 \leq B, |x_2| \leq \infty,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ — контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения. Задача состоит в рассмотрении случая деформируемого штампа. Ранее указанные задачи решались только численным методом. В результате вне исследования оставались некоторые особенности решений в динамических задачах. Кроме этого, численные методы оказывались либо малоэффективными, либо несостоятельными в случаях, когда границы постановки граничных задач уходят на бесконечность или оказываются очень больших размеров. Именно для таких задач оказывается эффективным предложенный в настоящей работе метод. Он демонстрирует значительные различия, как в методе решения задачи, так и в получаемом результате в сравнении со случаем жесткого штампа. Разработанный авторами подход [4] открыл возможность использовать «фракталы», то есть упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред.

Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации фракталов. С учетом этой возможности, в качестве деформируемого штампа принимаются фракталы — решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца.

Рассматриваются два случая. Полоса вырождается в полуплоскость, случай A , и полоса имеет большую относительную ширину, случай B .

Таким образом, необходимо построить в областях $\Omega_1(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ и $\Omega_2(-B \leq x_1 \leq B, |x_2| \leq \infty)$, $B \gg 1$ упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы. Ниже рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \phi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2). \quad (2.1)$$

Здесь $\phi(x_1, x_2)$ — вертикальное перемещение в зоне контакта, $q(x_1, x_2)$ — контактные напряжений, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t(x_1, x_2)$ — заданные внешние воздействия сверху на объект. Кроме этого, задаются граничные условия, имеющие для задачи A в области $\Omega_1(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ вид

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

Для задачи B в области $\Omega_2(- \leq x_1 \leq B)$ граничные условия следующие

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(-B, x_2), \quad x_1 \rightarrow -B; \quad \phi(x_1, x_2) = \phi(B, x_2), \quad x_1 \rightarrow B.$$

Для обеих задач необходимо построить упакованные блочные элементы. Одна из проблем, с которой здесь приходится столкнуться, сводится к вычислению появившегося в уравнении функционала от неизвестной функции.

В работе доказана возможность их определения, чем обосновывается корректность поставленной задачи. В случае первой задачи оказывается возможным аналитически точно построить решение, которое содержит в знаменателе функции, обращающиеся в ноль при некоторых значениях параметров в случае динамической контактной задачи.

Решение принимает вид [4]

$$Q_A(\alpha_1) = [1 - N_1(k)]^{-1} N_2(k) N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1). \quad (2.2)$$

Здесь

$$N_1(k) = 2k P_{0+}(k) R_+^{-1}(k) \{P_{0-}(\alpha_1) R_-^{-1}(\alpha_1) (\alpha_1 + k)^{-1} e^{i(\alpha_1 - k)A}\}_k^+,$$

k — параметр, зависящий от частоты гармонических колебаний блочной структуры. В том случае, когда имеет место $1 - N_1(k) = 0$, возникает высокочастотный резонанс в блочной структуре.

3. Высокочастотный резонанс в сейсмологии

В работе [7] рассмотрен случай горизонтального взаимодействия литосферных плит при их горизонтальном движении.

Постановка задачи предполагает встречное движение по границе Конрада гранитных литосферных плит, моделируемых пластинами Кирхгофа, лежащими на базальтовом основании. В процессе решения функциональных уравнений

$$\mathbf{X}_2^+ + \{\mathbf{N}_+(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{D}_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-2i\alpha_2\theta} \mathbf{X}_1^-\}_{\alpha_2}^+ = \{\mathbf{N}_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{F}_2^+(\alpha_1, \alpha_2)\}_{\alpha_2}^+,$$

$$\mathbf{X}_1^- + \{\mathbf{D}_-(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{N}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{2i\alpha_2\theta} \mathbf{X}_2^+\}_{\alpha_2}^- = \{\mathbf{D}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{F}_1^-(\alpha_1, \alpha_2)\}_{\alpha_2}^-,$$

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{D}_+(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{D}_-(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}_-(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{N}_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

В этой задаче, как и в работе [4], возникает проблема определения функционалов решения. При их определении из алгебраической системы уравнений формируются соотношения, подобные (2.1), (2.2), приводящие к образованию функций в знаменателе. Их нули служат для определения значений резонансных частот, подобно изложенному в [4]. Таким образом, и в случае горизонтальных колебаний в контактных задачах с деформируемым штампом также возникают резонансные явления касательного направления движения. Именно они инициируют самосборку наноматериалов, происходящую в результате многократного перемешивания горизонтально двигающихся объектов, пока на горизонтальном резонансе не произойдет взаимная состыковка границами.

4. О математической стыковке блочных элементов, как объектов наночастиц

Вспользуемся результатами работы [11], в которой показано, что блочные элементы, занимающие четыре квадранта декартовой системы координат, представляют дискретное топологическое пространство и любое их объединение также объект этого пространства. Показано, что их объединения по границам приводит к более крупным частицам, удовлетворяющим тем же уравнениям, то есть тех же свойств.

В работе [11] получены четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте. Они имеют вид

$$\phi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_n(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle,$$

$$\omega_2 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}} \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_3 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}} \right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}} \right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_4 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}} \right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактор-топологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. Названными объединениями являются следующие объекты

$$\phi_1(x_1, x_2) \cup \phi_2(x_1, x_2), \quad \phi_2(x_1, x_2) \cup \phi_3(x_1, x_2), \quad \phi_3(x_1, x_2) \cup \phi_4(x_1, x_2), \quad \phi_4(x_1, x_2) \cup \phi_1(x_1, x_2).$$

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полупространства. Имеем

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2) \cup \phi_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2) + \omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle + \\ &+ \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}} \right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle. \end{aligned}$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}, \quad \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, т. е. обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль всплывает при вычислении обращений преобразований Фурье при получении значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат.

Поэтому при исчезновении границы между блочными элементами, и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах, ими следует пренебрегать, так как граница исчезает. Остаются те из них, которые сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая ненужные члены, имеем

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \langle Q_{1+}(\alpha_1) \rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \langle Q_{1-}(\alpha_1) \rangle = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \langle Q_{1+}(\alpha_1) + Q_{1-}(\alpha_1) \rangle = \\ &= \frac{\alpha_2 - \alpha_{21+}}{\alpha_{21+}} Q_1(\alpha_1). \end{aligned}$$

Это же показывается и в остальных случаях.

Вывод

Таким образом, механико-математический подход дает возможность описать явления самоорганизации и самосборки наноматериалов.

Литература [References]

1. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Об одной механической модели самоорганизации наночастиц. *МТТ*, 2022, № 6, с. 12–18. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On one mechanical model of self-organization of nanoparticles. *Mehanika tverdogo tela = Solid mechanics*, 2022, no. 6, p. 12–18. (in Russian)] DOI 10.31857/S0572329922060034
2. Ворович, И.И., Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *ДАН СССР*, 1979, т. 245, № 4, с. 817–820. [Vorovich, I.I., Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous strip. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)]
3. Ворович, И.И., Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *ДАН СССР*, 1979, т. 245, № 5, с. 1076–1079. [Vorovich I.I. Resonance properties of an elastic inhomogeneous band. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)]
4. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84, №1. С. 25–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On contact problems with a deformable stamp. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and plasticity*, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. (in Russian)] DOI 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34
5. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей. *Doklady akademii nauk = Proc. of the Academy of Sciences*, 2010, т. 435, №1, с. 29–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On block elements in layered media with a relief boundary. 2010, vol.435, no. 1, pp. 29–34. (in Russian)]
6. Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., О слоистых упругих средах с рельефной границей. *Известия РАН. Прикладная математика и механика*, 2010, № 6, С. 890–894. [Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., On layered elastic media with a relief boundary. *Izvestiya RAN. Prikladnaya matematika i mekhanika = Proc. of the Russian Academy of Sciences. Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, no. 6, pp. 890–894. (in Russian)]
7. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 11, pp. 4727–4739. DOI 10.1007/s00707-018-2255-7
8. Гринченко, В.Т., Улитко, А.Ф., *Равновесие упругих тел канонической формы*. Киев, Наукова Думка, 1985. [Grinchenko, V.T., Ulitko, A.F., *Ravnovesie uprugikh tel kanonicheskoy formy = Equilibrium of elastic bodies of canonical form*. Kyiv, Naukova Dumka, 1985. (in Russian)]
9. Головчан, В.Т., Кубенко, В.Д., Шульга, Н.А., Гузь, А.Н., Гринченко, В.Т., *Динамика упругих тел*. Киев, Наукова Думка, 1986. [Golovchan, V.T., Kubenko, V.D., Shulga, N.A., Guz, A.N., Grinchenko, V.T., *Dinamika uprugikh tel = Dynamics of elastic bodies*. Kyiv, Naukova Dumka, 1986. (in Russian)]
10. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах*. Москва, Научный мир, 1999. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemyykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media*. Moscow, Scientific world, 1999. (in Russian)]
11. Бабешко, В.А., Кириллова, Е.В., Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., Хрипков, Д.А., Евдокимов, В.С., Зарецкий, А.Г., О дискретизации топологических пространств блочных элементов с разными граничными условиями для трещин нового типа. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 4, с. 14–22. [Babeshko, V.A., Kirillova, E.V., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., Khripkov, D.A., Evdokimov, V.S., Zaretsky, A.G., On discretization topological spaces of block elements with different boundary conditions for cracks of a new type. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 4, pp. 14–22. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-18-4-14-22

УДК 531.39

DOI 10.31429/vestnik-19-3-47-54

Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек

П.Г. Великанов^{1,2✉}, Ю.П. Артюхин¹

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

² Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Современное машиностроение очень часто ставит задачи по расчету тонкостенных конструкций со взаимоисключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую прочность и надежность, а с другой, — экономичность и легкость. Для успешного сочетания вышеперечисленных свойств вполне оправданным представляется использование в конструкциях ортотропных материалов и пластиков. В статье продемонстрирована возможность с помощью математических аналогий для решения задач прочности, устойчивости и колебаний эффективно использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала. В качестве примеров, где были использованы математические аналогии, рассмотрены: задача изгиба ортотропной цилиндрической оболочки; задача слабого изгиба ортотропной пластины; методика решения уравнения динамики ортотропной пластины; устойчивость ортотропных оболочек и др.

Ключевые слова: механика, математические аналогии, прочность, устойчивость и колебания ортотропных пластин и оболочек.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи (Великанов П.Г.), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.).

Цитирование: Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 47–54. DOI 10.31429/vestnik-19-3-47-54

Поступила 18 июля 2022 г. После доработки 2 сентября 2022 г. Принято 5 сентября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Mathematical Analogies in Solving Problems of Strength, Stability and Vibrations of Orthotropic Plates and Shells

P. G. Velikanov^{1,2✉}, Yu. P. Artyukhin¹

¹ Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia

² Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. Modern mechanical engineering very often sets tasks for the calculation of thin-walled structures with mutually exclusive properties: on the one hand, the structures under study must combine high strength and reliability, and on the other, cost-effectiveness and lightness. For a successful combination of the above properties, it seems quite justified to use orthotropic materials and plastics in structures. The article demonstrates the possibility of using mathematical analogies to solve problems of strength, stability and vibrations to use solutions for the same type of isotropic structures to predict the behavior of the same structures made of orthotropic material. As examples where mathematical analogies were used, the following were considered: problems of bending an orthotropic cylindrical shell; the problem of weak bending of an orthotropic plate; a method for solving the equation of dynamics of an orthotropic plate; stability of orthotropic shells, etc.

Keywords: mechanics, mathematical analogies, strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells.

Funding. The study did not have sponsorship.

The authors contributed equally. The idea of the work (Yu.P. Artyukhin), calculations (Yu.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article (P.G. Velikanov), making edits and approving the final version (Yu.P. Artyukhin, P.G. Velikanov).

Cite as: Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P. Mathematical analogies in solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. DOI 10.31429/vestnik-19-3-47-54

Received 18 July 2022. Revised 2 September 2022. Accepted 5 September 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CCBY) license.

Введение

Появление композиционных материалов существенно расширило гамму физико-механических характеристик конструкций, изготовленных из этих материалов. Большое разнообразие этих характеристик приводит к разнообразию напряженно-деформированного состояния даже для геометрически однородных конструкций. Встает вопрос, нельзя ли использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала? По-видимому, впервые эту идею выдвинул А.В. Саченков [1, 2].

1. Постановка и решение задач

Точная математическая аналогия имеет место при замене модуля сдвига \tilde{G} некоторым гипотетическим (фиктивным) модулем сдвига \tilde{G}_0 , имеющим вид

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}, \quad (*)$$

где E_j, ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления ($j = 1, 2$).

Это равенство позволяет установить следующую физическую аналогию между изотропией и ортотропией материала

$$E \leftrightarrow \sqrt{E_1 E_2}; \quad \nu \leftrightarrow \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad (1.1)$$

т.е. усредненные механические характеристики ортотропной оболочки соответствуют характеристикам изотропной оболочки. Подобный модуль сдвига в 1914 г. предложил использовать для железобетонных плит в выражении для крутильной жесткости Губер М., но в отличие от (1.1) он заменял ν на ν_B — коэффициент Пуассона бетона [3].

Аффинное преобразование одной из координат приводит к окончательной идентичности уравнений изотропной и ортотропной оболочки. При этом, если граничные условия в аналогичных задачах совпадают, то любое решение задачи изгиба, устойчивости и колебаний ортотропной оболочки может быть получено из решения задачи для изотропной оболочки путем замены соответствующих характеристик. Для многих задач, к сожалению, эти перемены дают лишь предварительные оценочные результаты. Точность результатов зависит от влияния модуля сдвига на конкретные величины напряженно-деформированного состояния. Если в задачах преобладающими являются деформации растяжения и изгиба, а деформации сдвига и кручения малы, то погрешность будет минимальной (например, малость влияния последних на интегральные характеристики — максимальный прогиб, критические нагрузки, частоты свободных колебаний).

Рассмотрим некоторые примеры.

1. *Задача изгиба изотропной цилиндрической оболочки под действием сосредоточенной силы P_** сводится к решению следующего уравнения в комплексной форме (впервые Новожиловым В.В. было выполнено комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек. Представление уравнений в комплексной форме позволило существенно упростить решение задачи: сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений):

$$\nabla^4 \tilde{F} + i2b_*^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi_*^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} = i2b_*^2 R P_* \delta(\xi_* - \xi_{*0}, \phi), \quad (1.2)$$

где \tilde{F} — комплексная функция усилий; i — мнимая единица; b_* — размер оболочки в плане; ξ_* , ϕ — линии кривизны оболочки; $(\xi_{*0}, 0)$ — точка приложения сосредоточенной силы; R — радиус кривизны цилиндрической оболочки; $\delta(\xi_* - \xi_{*0}, \phi)$ — обобщенная δ -функция Дирака; P_* — интенсивность сосредоточенной нагрузки.

Решение аналогичной задачи для ортотропной цилиндрической оболочки при использовании соотношения (*) приводит к определению комплексной функции усилий из следующего уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \sqrt{\delta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)^2 \tilde{F} + i2b_*^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} = i2b_*^2 RP \delta(\xi - \xi_0, \phi), \quad (1.3)$$

где $\delta = E_2/E_1$.

Учитывая (1.1) и заменяя осевую координату

$$\xi_* \leftrightarrow \sqrt[4]{\delta} \xi, \quad (1.4)$$

с учетом свойств δ -функции [4–7], приходим к уравнению (1.2), в котором нужно выполнить следующие соответствия:

$$b_*^2 \leftrightarrow \frac{b^2}{\sqrt{\delta}}; \quad P_* \leftrightarrow \frac{P}{\sqrt[4]{\delta}}. \quad (1.5)$$

Если оболочка свободно опирается по краям или имеет место скользящее защемление, то граничные условия в терминах комплексной функции \tilde{F} для изотропной и ортотропной оболочек тождественно совпадают. При этом любое решение задачи об изгибе ортотропной цилиндрической оболочки может быть получено из решения аналогичной задачи для изотропной оболочки.

Пересчет результатов осуществляется по формулам (1.1), (1.4), (1.5). Как видно из этих формул, влияние ортотропии материала дает лишь один параметр δ — отношение окружной жесткости к продольной. Несмотря на то, что этот параметр является основным для многих характеристик напряженно-деформированного состояния, он не является единственным.

Например, известно, что фундаментальное решение (для единичной сосредоточенной нагрузки) для ортотропной пластинки зависит от коэффициента [4]

$$\mu = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta}}, \quad (1.6)$$

где

$$\delta_1 = \nu_2 + \frac{2\tilde{G}(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1}; \quad \delta_2 = \frac{E_2}{E_1} = \delta.$$

Причем, имеет место три случая: 1) $\mu > 1$, 2) $\mu < 1$, 3) $\mu = 1$. Последний случай соответствует предельному значению, когда корни характеристического уравнения являются кратными и соответствуют гипотетическому (фиктивному) модулю сдвига \tilde{G}_0 . Поэтому этот случай не в полной мере отражает разнообразие ортотропии.

Определим поведение решения уравнений (1.2), (1.3) в окрестности точки приложения нагрузки. Главная особенность уравнения (1.2) определяется старшими производными и имеет вид [8]

$$\tilde{F} = \frac{ib_*^2 P_* R}{4\pi} \rho_*^2 \ln \rho_*; \quad \rho_*^2 = (\xi_* - \xi_{*0})^2 + \phi^2,$$

что при пересчете дает

$$\tilde{F} = \frac{ib^2 PR}{4\pi \sqrt[4]{\delta^3}} \rho_1^2 \ln \rho_1; \quad \rho_1^2 = \sqrt{\delta} (\xi - \xi_0)^2 + \phi^2, \quad (1.7)$$

где ρ_1 — расстояние текущей точки от точки приложения нагрузки. Положим $\xi - \xi_0 = \rho \cos(\alpha)$, $\phi = \rho \sin(\alpha)$, где α — направление угла между расстоянием ρ и продольной осью ξ . Из формулы (1.7) следует, что в окрестности сосредоточенной нагрузки в ортотропной оболочке и пластинке

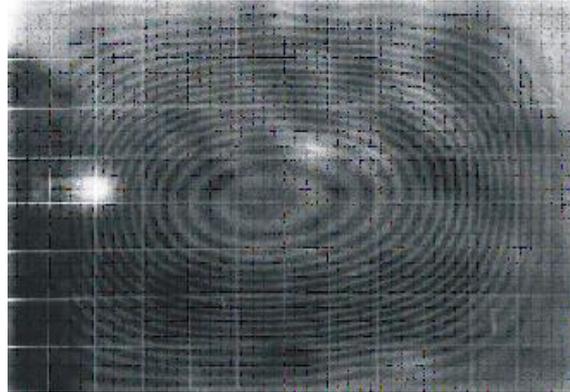


Рис. 1. Линии равного прогиба в виде эллипсов для ортотропной пластинки

линиями равного прогиба являются эллипсы (а не круги, как получается в изотропном случае), что подтверждается экспериментально, например, с помощью метода голографической интерферометрии (рис. 1) [9].

Из (1.7) могут быть получены следующие асимптотические формулы

$$w = -\frac{PR^2}{8\pi D_1 \sqrt[4]{\delta^3}} \rho_1^2 \ln \rho_1; \quad M_1 = \frac{P(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}{4\pi \sqrt[4]{\delta}} \ln \rho_1; \quad T_1 = \frac{P}{4\pi R \sqrt[4]{\delta}} \ln \rho_1; \quad (1.8)$$

$$M_2 = \frac{P \sqrt[4]{\delta} (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}{4\pi} \ln \rho_1; \quad T_2 = -\frac{P \sqrt[4]{\delta}}{4\pi R} \ln \rho_1,$$

где w — прогиб; M_1, M_2, T_1, T_2 — усилия и изгибающие моменты j -го направления.

Эти формулы при $\alpha = 0$ полностью совпадают с асимптотическими формулами, полученными в [10] Христенко А.С. другим методом.

Для свободно опертой по торцам оболочки длины $\xi_1 = L/R$ и толщины $\gamma = R/h$ при действии радиальной силы, приложенной в середине пролета, может быть обобщена формула Одквиста Ф. [11]

$$w_0 = \frac{w_{\max} E_1 R}{P} = \frac{1,629 \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{\delta} \right]^{5/8} \sqrt[4]{\gamma^9} \sqrt{\xi_1}, \quad (1.9)$$

которой можно пользоваться, например, для предварительных оценочных расчетов, так как она дает погрешность до 10 %.

Разберем случай, когда равенство (*) не имеет места. Будем исходить из технической теории цилиндрических оболочек. Кроме того, в уравнении

$$\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \phi^4} + 2ib^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \phi^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} \right) = -i2b^2 R^3 q_3,$$

где

$$\lambda = \frac{E_2}{4\tilde{G}} + \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\tilde{G}} - \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} - \nu_2,$$

опустим член уравнения с ε . Попытка построения комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек (в отличие от изотропных) натолкнулось на следующую трудность — появление комплексно-сопряженных неизвестных функций \tilde{F} , что первоначально не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Несмотря на указанную трудность, эта запись позволяет более компактно

представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

В результате получим

$$\nabla^4 \tilde{F} + \left(\frac{\delta}{\lambda^2} - 1 \right) \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \phi^4} + i2b_*^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi_*^2} = i2b_*^2 RP_* \delta(\xi_* - \xi_{*0}, \phi), \quad (1.10)$$

где

$$\xi_* = \sqrt{\lambda} \xi, \quad P_* = \frac{P}{\sqrt{\lambda}}, \quad b_*^2 = \frac{b^2}{\lambda}.$$

Можно сделать оценку второго члена уравнения (1.10) по сравнению с первым для различных композиционных материалов, предполагая, что все производные бигармонического оператора равны единице. Оценка показывает, что второй член уравнения по сравнению с бигармоническим оператором составляет от 10 до 20 %. При учете членов с кривизнами удельный вес этого члена будет еще меньше. Интересно отметить, что величина δ/λ^2 является инвариантом относительно поворота осей на угол $\pi/2$.

2. *Слабый изгиб ортотропной пластины.*

Уравнение изгиба в этом случае будет [4]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y_*^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y_*^4} = \frac{q_3}{D_1}. \quad (1.11)$$

Вводя новую переменную $y_* = \sqrt[4]{\delta_2} y$, уравнение (1.11) можно записать в виде

$$\nabla^4 w + 2\zeta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_3}{D_1}; \quad \zeta = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_2}} - 1. \quad (1.12)$$

Уравнение изгиба ортотропной пластины, представленное в форме (1.12), позволяет развить быстро сходящийся способ последовательных приближений. Для ортотропных пластин $|\zeta| < 1$. Представляя решение уравнения (1.12) в виде следующего ряда по степеням ζ

$$w = w_1 + \zeta w_2 + \zeta^2 w_3 + \dots,$$

получим следующую систему зацепляющихся уравнений

$$\nabla^4 w_1 = \frac{q_3}{D_1}; \quad \nabla^4 w_2 = -2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad \nabla^4 w_3 = -2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \dots$$

Интегрирование аналогичной системы уравнений и представление решения в комплексной форме для случая плоской задачи было выполнено в монографии Лехницкого С.Г. [12]. Предполагаемый способ разложения по степеням параметра ζ в отличие от способа Лехницкого С.Г. обладает более сильной сходимостью. Последнее становится понятным, если учесть, что в предлагаемом способе разложения в ряд вычисление ведется от первого приближения для ортотропной пластины, а в способе Лехницкого С.Г. — от первого приближения для изотропной пластины. Легко видеть при этом, что первое приближение для ортотропной пластины может быть получено из решения для изотропной на основании установленной аналогии.

Предлагаемый метод позволяет автоматически в первом приближении решить задачу определения частот собственных колебаний ортотропных пластин по известным решениям для изотропных пластин.

Уравнение динамики ортотропной пластины имеет вид

$$\nabla^4 w + 2\zeta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \omega_1^2 w = 0,$$

где ω_1^2 — величина, пропорциональная квадрату частоты.

Решение в первом приближении получается из уравнения

$$\nabla^4 w - \omega_1^2 w = 0 \quad (1.13)$$

на основании аналогии с колебаниями изотропной пластины.

Решение по первому приближению (1.13) может быть использовано для предварительных оценочных расчетов. Величина ω_1^2 в первом приближении будет определена с недостатком, если истинное значение $\zeta > 0$ и с избытком, если $\zeta < 0$.

3. Устойчивость ортотропных оболочек.

Рассмотрим ортотропную цилиндрическую оболочку под действием фиктивной нагрузки

$$-q_3 = P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y},$$

характеризующую проекцию внутренних усилий на нормаль при повороте элемента во время деформации.

Уравнение нейтрального равновесия элемента оболочки в этом случае имеет вид [13]

$$\nabla_\delta^4 \nabla_\lambda^4 w + \frac{E_2 h}{D_1 R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\nabla_\delta^4 q_3}{D_1}, \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_\delta^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; & \nabla_\lambda^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \\ \lambda_1 &= \lambda; & \lambda_2 &= \delta_2 = \delta. \end{aligned}$$

Предполагая, что оболочка сжимается равномерно усилиями Ph , и считая, что деформация цилиндрической оболочки осесимметричная, из уравнения (1.14) получаем

$$D_1 \frac{d^8 w}{dx^8} + P \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{E_2 h}{R^2} \frac{d^4 w}{dx^4} = 0. \quad (1.15)$$

Сравнивая уравнение (1.15) с уравнением устойчивости изотропной цилиндрической оболочки [13], обнаруживаем следующее соответствие:

$$D_1 \leftrightarrow D; \quad E_2 \leftrightarrow E, \quad (1.16)$$

либо $\nu_1 \nu_2 \leftrightarrow \nu^2$; $E_1 E_2 \leftrightarrow E^2$.

Соотношения (1.16) соответствуют введению гипотетического (фиктивного) модуля сдвига \tilde{G}_0 , а поэтому решение будет зависеть от одного безразмерного параметра $\delta = E_2/E_1$. Все это объясняется тем, что при осесимметричной деформации решение вообще не зависит от модуля сдвига. Если теперь воспользоваться формулой для верхнего критического напряжения [14]

$$P_B^* = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)\gamma}}$$

и учесть соотношения (1.16), то получим известную формулу для критического напряжения [13, 15] ортотропной цилиндрической оболочки

$$P_B = \frac{E_1 \sqrt{\delta}}{\sqrt{3(1-\nu_1 \nu_2)\gamma}}. \quad (1.17)$$

При потере устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки в результате действия внешнего давления $q = P_y/R$, вводя гипотетический (фиктивный) модуль сдвига \tilde{G}_0 и делая преобразование в уравнении (1.15) $x_* = x \sqrt[4]{\delta}$, будем иметь следующее уравнение устойчивости:

$$D_2 \nabla^8 w + \frac{E_2 h}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x_*^4} = -\nabla^4 \left(q R \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Отсюда следует такая аналогия с изотропной задачей

$$E \leftrightarrow E_2; \quad l_* \leftrightarrow l\sqrt[4]{\delta}; \quad \nu^2 \leftrightarrow \nu_1\nu_2. \quad (1.18)$$

Из формулы для верхнего критического давления изотропной цилиндрической оболочки [14]

$$q_{\text{кр}}^* = \frac{\sqrt{6}E\gamma^{-5/2}\pi R}{9(1-\nu^2)^{3/4}l_*},$$

где l_* — длина оболочки, и аналогии (1.18) найдем критическое давление для ортотропной цилиндрической оболочки

$$q_{\text{кр}} = \frac{2\pi E_1 \delta^{3/4} h^{5/2}}{3\sqrt{6}(1-\nu_1\nu_2)^{3/4} l R^{3/2}}.$$

При потере устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки при кручении усилием $S_{\text{кр}}$ можно путем подобных рассуждений прийти к соотношениям пересчета (1.18) и $S_{\text{кр}}^* \leftrightarrow \sqrt[4]{\delta} S_{\text{кр}}$, пользуясь которыми и результатом монографии [14]

$$S_{\text{кр}}^* = 0,74 \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8} R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{l_*^2}},$$

будем иметь

$$S_{\text{кр}} = 0,74 \frac{E_2 h}{(1-\nu_1\nu_2)^{5/8} \delta^{5/8} R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{l^2}}.$$

Полученные значения критических нагрузок полностью совпадают с результатами статьи [16], найденными обычной и существенно более длинной процедурой определения собственных значений краевой задачи.

Заключение

В статье продемонстрирована возможность с помощью математических аналогий для решения задач прочности, устойчивости и колебаний использовать решения для однотипных изотропных конструкций для предсказания поведения таких же конструкций, изготовленных из ортотропного материала.

Отработка предложенной методики (по использованию математических аналогий) была успешно продемонстрирована на следующих задачах: задача изгиба ортотропной цилиндрической оболочки; задача слабого изгиба ортотропной пластины; методика решения уравнения динамики ортотропной пластины; устойчивость ортотропных оболочек и др.

Метод математических аналогий позволил без потери точности существенно сократить время для расчета конструкций, изготовленных из ортотропного материала, если известно решение для однотипной изотропной конструкции.

Литература [References]

1. Артюхин, Ю.П., Саченков, А.В., К расчету ортотропных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1967, вып. 5, с. 300–310. [Artyukhin, Yu.P., Sachenkov, A.V., On the calculation of orthotropic plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, 1967, iss. 5, pp. 300–310. (in Russian)]
2. Саченков, А.В., О сведении расчета ортотропных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1975, вып. 11, с. 180–185. [Sachenkov, A.V., On the reduction of the calculation of orthotropic plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, 1975, iss. 11, pp. 180–185. (in Russian)]
3. Huber, M.T., Die Grundlagen einer rationellen Bemessung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. *Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines*, 1914 vol. 66, no. 30, pp. 557–564.

4. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань, ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and shallow shells by the boundary elements method*. Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]
5. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., *Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины*. *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii = Mathematical modeling and boundary value problems: Proc. of the All-Russian Scientific Conference*, 2004, part 3, pp. 67–71. (in Russian)]
6. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., *Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов*. *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnykh sred = Actual problems of continuum mechanics*, 2020. pp. 105–111. (in Russian)]
7. Оконечников, А.С., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Основы теории*. Москва, МАИ, 2019. [Okonechnikov, A.S., Tarlakovsky, D.V., Fedotenko, G.V., *Obobshchennye funktsii v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. Osnovy teorii = Generalized functions in mechanics of a deformable solid. Fundamentals of theory*. Moscow, MAI, 2019. (in Russian)]
8. Ион, Ф., *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*. Москва, ИМ, 1958. [Jon, F., *Ploskie volny i sfericheskie srednie v primenenii k differentsial'nykh uravneniyam s chastnymi proizvodnymi = Plane waves and spherical averages as applied to partial differential equations*. Moscow, IM, 1958. (in Russian)]
9. Костин, В.А., Снегуренко, А.П., *Идентификация поля цилиндрических жесткостей изотропных и ортотропных пластин*. *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2001, № 2, с. 3–9. [Kostin, V.A., Snegurenko, A.P., Identification of the field of cylindrical stiffness of isotropic and orthotropic plates. *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva = Bulletin of the A.N. Tupolev KSTU*, 2001, No. 2, pp. 3–9. (in Russian)]
10. Христенко, А.С., *О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку*. *Известия АН СССР. ОТН, механика и машиностроение*, 1962, № 3. [Khristenko, A.S., On the effect of concentrated loads on an orthotropic cylindrical shell. *Izvestiya AN SSSR. OTN, mekhanika i mashinostroyeniye = Izvestia of the USSR Academy of Sciences. OTN, Mechanics and Mechanical Engineering*, 1962, No. 3. (in Russian)]
11. Odkvist, F.K.J., Action of forces and moments symmetrically distributed along a generatrix of a thin cylindrical shell. *J. Appl. Mech.*, 1946, vol. 13, iss. 2, pp. A106–A108. DOI doi.org/10.1115/1.4009534
12. Лехницкий, С.Г., *Анизотропные пластинки*. Москва, Гостехиздат, 1947. [Lehnitsky, S.G., *Anizotropnye plastinki = Anisotropic plates*. Moscow, Gostekhizdat, 1947. (in Russian)]
13. Thielemann, W., Schnell, W., Fischer, G., Beul- und Nachbeulverhalten orthotroper Kreiszyinderschalen unter Axial- und Innendruck. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, 1960, vol. 8, no. 10/11, pp. 284–292.
14. Вольмир, А.С., *Устойчивость упругих систем*. Москва, Физматгиз, 1963. [Volmir, A.S., *Ustoychivost' uprugikh sistem = Stability of elastic systems*. Moscow, Fizmatgiz, 1963. (in Russian)]
15. Кабанов, В.В., *Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при совместном действии внешнего давления и продольных усилий*. *Известия вузов, сер. «Авиационная техника»*, 1964, № 4, с. 46–51. [Kabanov, V.V., Stability of an anisotropic circular cylindrical shell under the combined action of external pressure and longitudinal forces. *Izvestiya vuzov, ser. "Aviation Technology" = Proc. of universities, series "Aviation Engineering"*, 1964, no. 4, pp. 46–51. (in Russian)]
16. Даревский, В.М., Кукуджанов, С.Н., *Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении*. В: *Прочность цилиндрических оболочек*. Москва, Оборонгиз, 1959, с. 95–108. [Darevskiy, V.M., Kukudzhyanov, S.N., Stability of the cylindrical orthotropic shell under torsion and normal pressure. In: *Prochnost' tsilindricheskikh obolochek = Strength of cylindrical shells*. Moscow, Oborongiz, 1959, pp. 95–108. (in Russian)]

УДК 539.3:532.5

DOI 10.31429/vestnik-19-3-55-62

Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями

А. А. Ярошенко^{1,2}✉, Ж. В. Маленко^{1,2}, Е. В. Маркина¹, Л. О. Костюкова¹, И. И. Бабилов¹

¹ Севастопольский государственный университет, ул. Университетская, 33, Севастополь, 299053, Россия

² Филиал «Государственного морского университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Севастополь, ул. Героев Севастополя, 11, корпус 8/22, Севастополь, 299009, Россия

✉ Ярошенко Александр Александрович; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Аннотация. Исследуется развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых областью давлений, движущихся по поверхности ледяного покрова, плавающего на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Исследуется влияние равномерного сжатия на неустановившиеся колебания ледяного покрова. Показано, что для больших значений сжимающих усилий существует три значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. Изучено влияние сжимающих усилий на значения критических скоростей. Проведен анализ зависимости фронтов распространяющихся волн от сил сжатия. Показано, что при увеличении сжимающих усилий увеличивается область покрытая волнами. При больших сжимающих усилиях образуется угловая зона, в которой происходит наложение волн. Эта зона уменьшается при увеличении скорости перемещения нагрузки.

Ключевые слова: сжимающие усилия, изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, ледяной покров, критическая скорость.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Цитирование: Ярошенко А. А., Маленко Ж. В., Маркина Е. В., Костюкова Л. О., Бабилов И. И. Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 3. С. 55–62. DOI 10.31429/vestnik-19-3-55-62

Поступила 1 сентября 2022 г. После доработки 15 сентября 2022 г. Принято 17 сентября 2022 г. Публикация 12 октября 2022 г.

© Автор(ы), 2022. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

The Effect of Compressive Forces on the Development of Bending-Gravitational Waves Generated by Moving Perturbations

A. A. Yaroshenko^{1,2}✉, Zh. V. Malenko^{1,2}, E. V. Markina¹, L. O. Kostyukova¹, I. I. Babikov¹

¹ Sevastopol State University, Univesitetskaya st., 33, Sevastopol, 299053, Russia

² Branch of "Admiral F.F. Ushakov State Maritime University" in Sevastopol, Heroes of Sevastopol st., 11, housing 8/22, Sevastopol, 299009, Russia

✉ Aleksandr A. Yaroshenko; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Abstract. In winter, the ice cover on rivers and lakes is used to deliver various kinds of cargo through it. Therefore, it is important to know the behavior of the ice sheet depending on the speed of movement of the load and other characteristics of the ice. The influence of uniform compression and the velocity of load displacement on unsteady three-dimensional vibrations of an ice sheet floating on the surface of a homogeneous liquid is investigated. The ice cover is modeled by a thin elastic isotropic plate. It is shown that there are three values of critical velocities at which the nature of the wave disturbance changes. In this case, from two to three systems of bending-gravitational waves are formed. These waves propagate both ahead of the source of disturbances and behind it. The influence of compressive forces on the values of critical velocities is studied. It is shown that compressive forces have the greatest effect on the propagation velocity of elastic waves, and the least on the propagation velocity of transverse and longitudinal waves propagating behind the source. The velocity of propagation of elastic waves increases with increasing compressive forces. With an increase in the speed of movement of the source of disturbances and compression forces, the area covered by waves increases. For large values of compressive forces, an angular zone is formed behind the source, in which waves overlap. This zone decreases with an increase in the speed of movement of the load.

Keywords: compressive forces, bending-gravitational waves, elastic plate, ice cover, critical speed.

Funding. The study did not have sponsorship.

The authors declare that there is no conflict of interest. The authors contributed equally.

Cite as: Yaroshenko A. A., Malenko Zh. V., Markina E. V., Kostyukova L. O., Babikov I. I. The effect of compressive forces on the development of bending-gravitational waves generated by moving perturbations. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 55–62. DOI 10.31429/vestnik-19-3-55-62

Received 1 September 2022. Revised 15 September 2022. Accepted 17 September 2022. Published 12 October 2022.

© The Author(s), 2022. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

В зимнее время в районах Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока ледяной покров на реках и озерах используется для доставки по нему грузов. При использовании ледяного покрова в качестве переправ важно знать не только физико-механические свойства льда, но и его поведение от воздействия на него различного рода нагрузок. При движении по ледяному покрову транспортного средства в нем образуются волны, которые в определенных случаях приводят к разрушению льда. Экспериментальные исследования показывают, что скорость транспортного средства влияет на несущую способность плавающего ледяного покрова.

Теория поведения ледяного покрова от воздействия на него движущихся нагрузок получила свое развитие в работе Хейсина Д.Е. [1]. В книге изложена математическая теория волновых процессов, происходящих в плавающем ледяном покрове. Рассматриваются плоские задачи распространения волн в битых и сплошных льдах. Трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движением нагрузки, исследовались в работах [1–5]. В книге [3] обобщены результаты зарубежных авторов посвященных исследованию перемещений грузов по пресноводному и морскому льду. Работа охватывает как экспериментальные, так и теоретические исследования.

Неустановившиеся трехмерные колебания ледяного покрова от движения нагрузки без учета сжимающихся усилий рассмотрены в работах [6, 7], с учетом равномерного растяжения — в [4, 8], а равномерного сжатия — в [4, 9]. Влияние неравномерного сжатия на развитие изгибно-гравитационных волн под действием периодической и импульсной нагрузки рассмотрено в работе [10].

В настоящей работе проводится исследование влияния сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн и на значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового движения.

1. Постановка задачи

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает ледяной покров, который моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость неограниченны. В начальный момент времени поверхность пластина–жидкость горизонтальна. Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности пластинки прикладываются давления вида

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (1.1)$$

Исследуем влияние равномерного сжатия на развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, вызываемых движущимся источником возмущений (1.1).

Считаем движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки ζ — малыми. В системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ

$$\Delta\phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty \quad (1.2)$$

с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_t \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -p_1 f(x, y) \text{ при } z = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial\phi/\partial z = 0 \text{ при } z = -H, \tag{1.4}$$

начальными

$$\phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0 \tag{1.5}$$

и кинематическим

$$\partial\zeta/\partial t = \partial\phi/\partial z - v\partial\zeta/\partial x \text{ при } z = 0 \tag{1.6}$$

условиями, где

$$D_1 = D/\rho g, \quad Q_1 = Q/\rho g, \quad \chi_1 = \rho_1 h/\rho g, \quad D = Eh^3/(12(1-\mu^2)), \quad p_1 = p_0/\rho g,$$

$$\nabla^4 = \Delta_l^2, \quad \Delta_l = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad F = \partial^2/\partial t^2 + 2v\partial^2/\partial t\partial x + v^2\partial^2/\partial x^2,$$

ρ — плотность жидкости, E, h, ρ_1, μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q — сжимающее усилие, ζ — возвышение поверхности пластина-жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

2. Решение задачи

Применяя к (1.2)–(1.6) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y и преобразование Лапласа по времени t , получим следующее интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость:

$$\zeta = -\frac{p_1}{4\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty \int_0^t \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} r\tau^{-1} M(r) f^*(r) e^{i\Phi(r, \theta, \xi)} d\theta d\xi dr, \tag{2.1}$$

$$\tau = \sqrt{l(r)M(r)}, \quad M(r) = rg \text{th } rH(1 + \chi_1 rg \text{th } rH)^{-1}, \quad l(r) = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4,$$

$$\Phi = rR \cos(\theta - \gamma) - \xi \Delta_1, \quad \Delta_1 = vr \cos \theta - \tau, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{m^2 + n^2},$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta,$$

$f^*(r)$ — трансформанта Фурье функции $f(R)$. Отсюда для больших значений R и t найдем асимптотическое выражение для ζ при условии $Q_1 = 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости пластины [1].

Рассмотрим случай больших сжимающих усилий, удовлетворяющих условию $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Здесь $Q_0 = \tau_4(r_4)$, где

$$\tau_4 = \frac{(1 + D_1 r^4)\tau_5 + 4D_1 r^4 \tau_6}{(\tau_5 + 2\tau_6)r^2}, \quad \tau_5 = \text{th } rH + rH \text{ch}^{-2} rH, \quad \tau_6 = (1 + \chi_1 rg \text{th } rH) \text{th } rH,$$

r_4 — единственный положительный корень уравнения $\tau_4'(r) = 0$, штрих означает производную по r .

Применяя к (2.1) метод стационарной фазы [11, 12] последовательно по θ и ξ , получим

$$\zeta = -\frac{p_1}{2\pi} \text{Im} \sum_{s=1}^6 I_s + O(R^{-1}), \tag{2.2}$$

$$I_1 = \int_{r_1}^{r_2} N_1 dr, \quad 0 < \gamma < \pi/2, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_2 = \int_{n_2}^{r_2} N_1 dr, \quad \pi/2 < \gamma < \pi;$$

$$I_3 = \int_{r_1}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi/2 < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_4 = \int_{n_4}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi < \gamma < -\pi/2;$$

$$I_5 = \int_{n_1}^{n_2} N_1 dr, \quad -\pi/2 < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_6 = \int_{n_3}^{n_4} N_2 dr, \quad 0 < \gamma < \pi/2;$$

$$N_{1,2} = B_1 \exp(iR\Phi_{1,2}), \quad B_1 = M(r)f^*(r)/\nu\tau(1 - \tau_0^2)^{1/2}, \quad \nu = vt/R,$$

$$\Phi_{1,2} = (\tau_0 \cos \gamma \mp (1 - \tau_0^2)^{1/2} \sin \gamma)r, \quad \tau_0 = \tau/vr, \quad n_2 > n_1, \quad n_4 > n_3.$$

Здесь r_1, r_2 — положительные корни уравнения $\tau = vr$, а n_1, n_2 и n_3, n_4 — положительные корни уравнений $\operatorname{tg} \gamma = -\tau_1(r)$ и $\operatorname{tg} \gamma = \tau_1(r)$ соответственно, где $\tau_1 = (1 - \tau_0^2)^{1/2}/\tau_0$. Принадлежность стационарных точек области интегрирования характеризуется условием

$$0 \leq \xi_0 \leq t, \quad \xi_0 = (\tau_0(1 - \tau_0^2)^{-1/2} \sin \gamma + \cos \gamma)Rv^{-1}.$$

В интегралах I_1, I_2, I_5 стационарными точками фазовой функции Φ_1 являются корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2(r) = \tau'(1 - \tau_0^2)^{1/2}/(v - \tau_0\tau'). \quad (2.3)$$

В интегралах I_3, I_4, I_6 стационарными точками фазовой функции Φ_2 — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = -\tau_2(r). \quad (2.4)$$

Если $v_0 < v < v_1$, то уравнение (2.3) при $0 < \gamma < \pi$ имеет один действительный корень $-\alpha_2$, а при $-\gamma_2 < \gamma < 0$ два корня $-\alpha_2, \alpha_3$. Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 — действительный корень уравнения $r\tau' - \tau = 0$; $v_1 = \tau(r_5)/r_5$, где $0 < r_5 < r_6$, r_5, r_6 — действительные корни уравнения $\tau'(r) = 0$.

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то $\tau_2'(\alpha_4) = \tau_2'(\alpha_5) = 0$, $\alpha_4 < \alpha_5$.

Уравнение (2.3) имеет один $-\alpha_3$, два $-\alpha_2, \alpha_3$ или три $-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ корня при $\gamma_1 < \gamma < \pi$, $-\gamma_2 < \gamma < 0$, $0 < \gamma < \gamma_1$ соответственно.

Для $v > \sqrt{gH}$ корнями уравнения (2.3) будут: α_2, α_3 в случае $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ и α_3 — в случае $\gamma_3 < \gamma < \pi$. Причем $\tau_2'(\alpha_5) = 0$.

Аналогично определяются угловые зоны, в которых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удовлетворяют уравнению (2.4). Углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются формулами

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = -\operatorname{arctg} \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \operatorname{arctg}((v^2/gH) - 1)^{1/2}.$$

Таким образом, вычисляя I_1 – I_6 методом стационарной фазы, получим

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}), & \text{при } 0 < v < v_0; \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{при } v_0 < v < v_1; v > \sqrt{gH}; \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Причем для $v_0 < v < v_1$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < 0, R < u_2t; \\ \eta_{22}, & \text{если } 0 < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \gamma_2, R > u_2t; \gamma_2 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_{31}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \pi, R < u_3t; \\ \eta_{32}, & \text{если } -\pi < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \pi, R > u_3t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_{11}, & \text{если } 0 < \gamma < 0, R < u_1t; \\ \eta_{12}, & \text{если } -\gamma_1 < \gamma < 0, R < u_1t; \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_1t; \gamma_1 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \gamma_1, R < u_2t; \\ \eta_{22}, & \text{если } -\gamma_1 < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_2t; \gamma^* < \gamma < 2\pi - \gamma^*, \gamma^* = \max(\gamma_1, \gamma_2), \end{cases} \quad (2.9)$$

а ζ_3 определяется по формуле (2.7).

В случае $v > \sqrt{gH}$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \gamma_3, R < u_2t; \\ \eta_{22}, & \text{если } -\gamma_3 < \gamma < \gamma_2, R < u_2t; \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, R > u_2t, \gamma_3 < |\gamma| < \pi, \end{cases}, \quad (2.10)$$

а ζ_3 определяется из (2.7).

Здесь

$$\eta_{kj} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4), \quad u_k = u(\alpha_k, \gamma),$$

$$\psi_j(r) = -\frac{p_1 f^*(r) M(r)}{v\tau(2\pi(1 - \tau_0^2) |\Phi_j''|)^{1/2}}, \quad u(r, \alpha) = \frac{v(1 - \tau_0^2)^{1/2}}{\tau_0 \sin \gamma + (1 - \tau_0^2)^{1/2} \cos \gamma}.$$

3. Анализ полученного решения

Таким образом, при $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ волновое возмущение пластина-жидкость формируется, как следует из формул (2.5)–(2.10), волнами ζ_2, ζ_3 , если $v_0 < v < v_1$ или $v > \sqrt{gH}$ и волнами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, если $v_1 < v < \sqrt{gH}$.

Численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 870$ кг/м³, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $\mu = 0,34$, $H = 10^2$ м, $h = 0,2$ м.

Для $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$ значения критических скоростей будут: $v_0 = 3,1$ м/с, $v_1 = 6,7$ м/с, для $Q_1 = 1,8\sqrt{D_1}$ — $v_0 = 2,5$ м/с, $v_1 = 7,1$ м/с, для $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$ — $v_0 = 1,9$ м/с, $v_1 = 7,3$ м/с. Увеличение сжимающего усилия Q приводит к уменьшению v_0 и росту v_1 .

На рис. 1а–4а приведены фазовые портреты колебаний и их внешние границы, а на рис. 1б–4б представлены линии передних фронтов образующихся волн для различных значений сжимающих усилий.

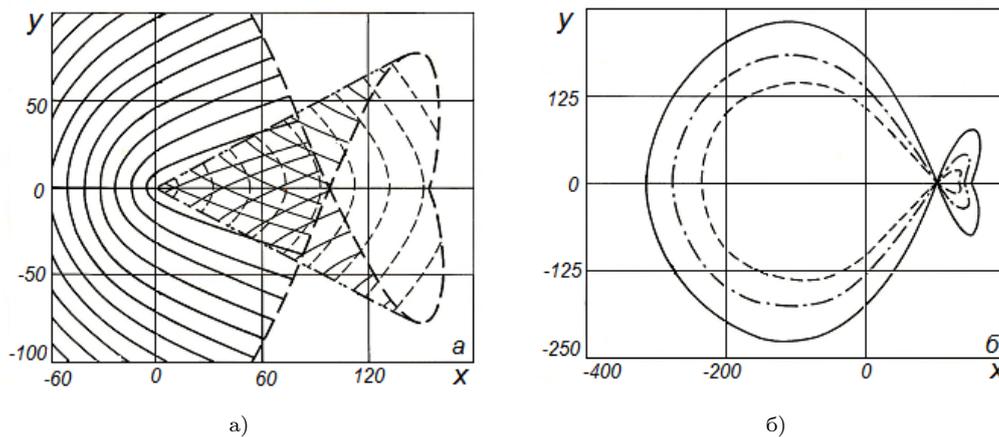


Рис. 1. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн ζ_2, ζ_3 для $v = 5$ м/с, ($v_0 < v < v_1$), $t = 20$ с;

- а) прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$;
- б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, штрихпунктирная линия $Q_1 = 1,8\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$

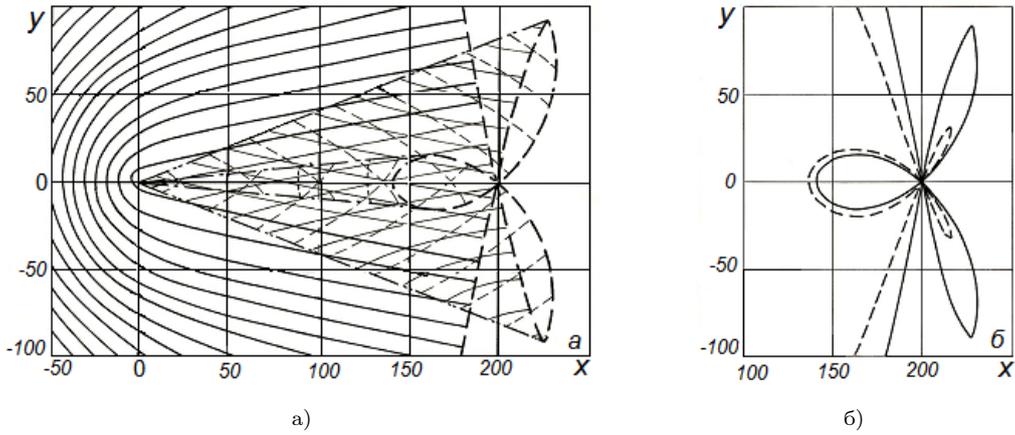


Рис. 2. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для $v = 10$ м/с, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $\gamma_1 < \gamma_2$;
 а) пунктирная линия ζ_1 , прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия γ_1 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с;
 б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с

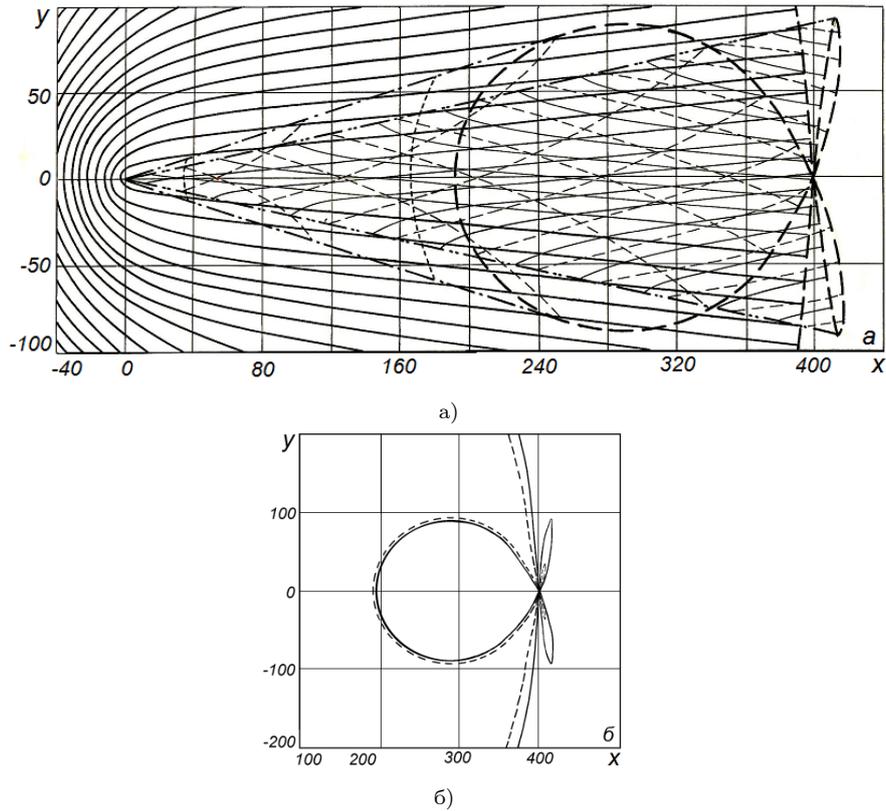


Рис. 3. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для $v = 20$ м/с, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $\gamma_1 > \gamma_2$;
 а) пунктирная линия ζ_1 , прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия γ_1 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с;
 б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с.

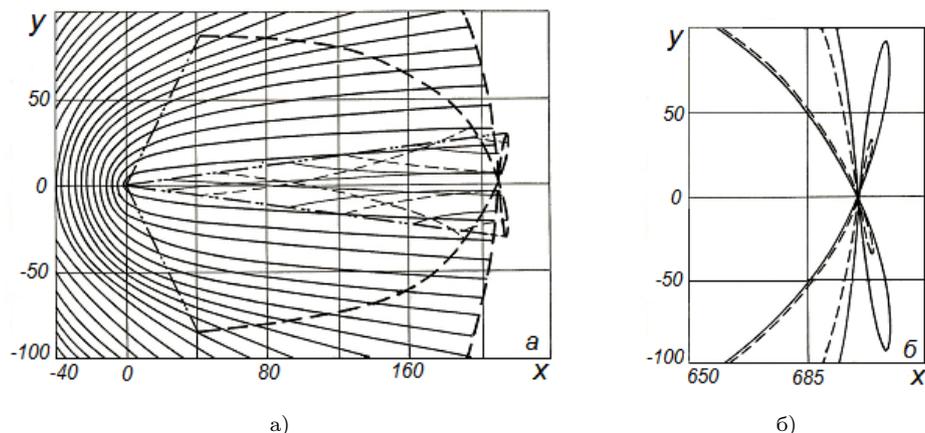


Рис. 4. Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн ζ_2 , ζ_3 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$);

- а) прерывистая линия ζ_2 , сплошная линия ζ_3 , штрихпунктирная линия с двумя точками γ_2 , штрихпунктирная линия с тремя точками γ_3 , $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 6$ с;
 б) прерывистая линия $Q_1 = 1,7\sqrt{D_1}$, сплошная линия $Q_1 = 1,9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с.

Упругие волны ζ_3 распространяются как перед областью давлений, так и за ней. Поперечные волны ζ_1 и продольные волны ζ_2 вместе с упругими волнами ζ_3 формируют волновой след за областью возмущений. В волновом следе левая и правая угловые зоны волн ζ_1 симметрично расположены по разные стороны от линии перемещения области. Левая и правая угловые зоны упругих волн ζ_3 , образующихся за областью возмущений, для $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ так же, как и волн ζ_2 для $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$, заходят за эту линию, частично перекрывая друг друга.

Фронтальная скорость u_3 упругих волн ζ_3 , распространяющихся впереди источника, растет с увеличением сжимающих усилий. Для волн ζ_3 , распространяющихся за источником возмущений, в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ фронтальная скорость уменьшается, причем несущественно.

Продольные волны ζ_2 при $v_0 < v < \sqrt{gH}$ распространяются в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, а при $v > \sqrt{gH}$ — в угловой зоне $-\gamma_3 < \gamma < \gamma_3$. Фронтальная скорость u_2 этих волн в волновом следе убывает с ростом сил сжатия.

Поперечные волны ζ_1 распространяются за источником в угловой зоне $-\gamma_1 < \gamma < \gamma_1$ при $v_1 < v < \sqrt{gH}$. При увеличении скорости движения источника эта зона увеличивается. Фронтальная скорость u_1 волн ζ_1 с увеличением сил сжатия незначительно возрастает.

Заключение

С увеличением сжимающих усилий и скорости перемещения источника растет область покрытая волнами. Наибольшее влияние сжимающие усилия оказывают на скорость распространения упругих волн ζ_3 и наименьшее — на продольные ζ_2 и поперечные ζ_1 волны.

За источником возмущений, для больших значений сжимающих усилий, образуется зона, в которой происходит наложение волн. Угловая зона $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, в которой происходит наложение волн, уменьшается при увеличении скорости движения источника возмущений.

Литература [References]

1. Хейсин, Д.Е., *Динамика ледяного покрова*. Ленинград, Гидрометеиздат, 1967. [Heisin, D.E., *Dinamika ledyanogo pokrova = Dynamics of the ice cover*. Leningrad, Gidrometeizdat, 1967. (in Russian)]
2. Козин, В.М., Жесткая, В.Д., Погорелова, А.В., Чижимов, С.Д., Джабраилов, М.Р., Морозов, В.С., Кустов, А.Н., *Прикладные задачи динамики ледяного покрова*. Москва, Академия Естественных наук, 2010.

2008. [Kozin, V.M., Zhestkaya, V.D., Pogorelova, A.V., Chizhiumov, S.D., Dzhabrailov, M.R., Morozov, V.S., Kustov, A.N., *Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova = Applied problems of ice cover dynamics*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2008. (in Russian)]
3. Squire, V.A., Hosking, R.J., Kerr, A.D., Langhorne, P.J., *Moving Loads on Ice Plates*. Springer Science & Business Media, 2012.
 4. Букатов, А.Е., *Волны в море с плавающим ледяным покровом*. Севастополь, ФГБУН МГИ, 2017. [Bukatov, A.E., *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom = Waves in the sea with a floating ice cover*. Sevastopol, FGBUN MGI, 2017. (in Russian)]
 5. Козин, В.М., Земляк, В.Л., Рогожникова, Е.Г., Погорелова, А.В., *Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки*. Новосибирск, Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020. [Kozin, V.M., Zemlyak, V.L., Rogozhnikova, E.G., Pogorelova, A.V., *Vliyanie ledovykh usloviy na deformirovannoe sostoyanie ledyanogo pokrova ot dvizheniya nagruzki = The influence of ice conditions on the deformed state of the ice cover from the movement of the load*. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2020. (in Russian)]
 6. Доценко, С.Ф., О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах. *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*, 1978, № 5, с. 26–32. [Dotsenko, S.F., On gravitationally elastic and gravitationally capillary unsteady ship waves. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza = Proc. of the USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*, 1978, no. 5, pp. 26–32. (in Russian)]
 7. Черкесов, Л.В., *Гидродинамика волн*. Киев, Наукова думка, 1980. [Cherkesov, L.V., *Gidrodinamika voln = Hydrodynamics of waves*. Kiev, Nauchnaya Dumka, 1980. (in Russian)]
 8. Букатов, А.Е., Ярошенко, А.А., Развитие трехмерных колебаний упругой равномерно растянутой плавающей пластинки. *Динамические системы*, 1985, вып. 4, с. 72–77. [Bukatov, A.E., Yaroshenko, A.A., Development of three-dimensional vibrations of an elastic uniformly stretched floating plate. *Dinamicheskie sistemy = Dynamic systems*, 1985, iss. 4, pp. 72–77. (in Russian)]
 9. Букатов, А.Е., Ярошенко, А.А., Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости. *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*, 1984, № 6, с. 78–83. [Bukatov, A.E., Yaroshenko, A.A., The effect of a uniformly compressed floating elastic plate on the development of three-dimensional waves in a homogeneous liquid. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza = Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*, 1984, no. 6, pp. 78–83. (in Russian)]
 10. Стурова, И.В., Влияние неравномерного сжатия упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, на развитие нестационарных изгибно-гравитационных волн. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2021, № 2, с. 63–71. [Sturova, I.V., The effect of uneven compression of an elastic plate floating on the surface of a liquid on the development of unsteady bending-gravitational waves. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza = News of the Russian Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*. 2021, no. 2, pp. 63–71. (in Russian)]
 11. Федорюк, М.В., *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва, Либроком, 2020. [Fedoryuk, M.V., *Asimptotika. Integraly i ryady = Asymptotics. Integrals and series*. Moscow, Librocom, 2020. (In Russian)]
 12. Федорюк, М.В., *Метод перевала*. Москва, Ленанд, 2022. [Fedoryuk, M.V., *Metod perevala = The method of the pass*. Moscow, Lenand, 2022. (in Russian)]

Информация об авторах

Артюхин Юрий Павлович, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета; ORCID 0000-0002-6243-9145; e-mail: ArtukhinYP@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, руководитель научных направлений математики и механики Южного научного центра РАН; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабилов Иван Игоревич, аспирант кафедры «Высшая математика» Севастопольского государственного университета; ORCID 0000-0001-5558-7580; e-mail: ivanigorevich96@gmail.com.

Великанов Петр Геннадьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета, доцент кафедры реактивных двигателей и энергетических установок Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Коваленко Анна Владимировна, д-р техн. наук, доцент, заведующая кафедрой анализа данных и искусственного интеллекта Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-3991-3953; e-mail: savanna-05@mail.ru.

Костюкова Людмила Олеговна, аспирант кафедры «Высшая математика» Севастопольского государственного университета; ORCID 0000-0002-8862-3290; e-mail: viktor_kostukov@mail.ru.

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела морских информационных систем и технологий Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; ORCID 0000-0002-3583-8351; e-mail: ko4ep@mail.ru.

Маленко Жанна Владимировна, старший преподаватель кафедры фундаментальных дисциплин Филиала «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Севастополь, старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Севастопольского государственного университета; ORCID 0000-0002-7058-8853; e-mail: zhvla17@mail.ru.

Маркина Елена Владимировна, аспирант кафедры «Высшая математика» Севастопольского государственного университета; ORCID 0000-0001-5044-2614; e-mail: alkit28@yandex.ru.

Скляр Сергей Николаевич, заведующий кафедрой математики Американского университета в Центральной Азии (AUCA); ORCID 0000-0001-6985-6155; e-mail: sklyar51@gmail.com.

Узденова Аминат Магомедовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики Карачаево-Черкесского государственного университета им. А.Д. Алиева; ORCID 0000-0001-5951-9876; e-mail: uzd_am@mail.ru.

Уртенов Махамет Хусеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-0252-6247; e-mail: urtenovmax@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-2161-121X; e-mail: vestnik@fpm.kubsu.ru.

Чубырь Наталья Олеговна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-3535-0361; e-mail: chubyr-natalja@mail.ru.

Щербаков Евгений Александрович, профессор кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: ko4ep@mail.ru.

Щербаков Михаил Евгеньевич, преподаватель кафедры функционального анализа и алгебры Кубанского государственного университета; e-mail: latiner@mail.ru.

Ярошенко Александр Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» Севастопольского государственного университета; заведующий кафедрой фундаментальных дисциплин Филиала «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Севастополь; ORCID 0000-0002-6471-0162; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ ЖУРНАЛА
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»

Редакция принимает к публикации оригинальные работы на русском и английском языках, содержащие строгие результаты в области математики, физики и механики. Статья не должна быть подана или опубликована в других изданиях, должна обладать научной новизной, написана обезличено и лаконично хорошим русским (английским) языком, быть структурированной, иметь введение и заключение. Статья на английском языке должна сопровождаться переводом на русский.

1) Для рассмотрения статьи в редакцию необходимо представить:

- 2 экземпляра статьи. Статья должна быть распечатана с одной стороны листа формата А4 в одну колонку с 1,5 интервалом шрифтом Times New Roman 14 пт. Все поля документа по 2,5 см. Объем статьи не должен превышать 20 страниц, включая таблицы, рисунки (не более 7) и список литературы (не более 15–20 источников). Все страницы должны быть пронумерованы.

В начале статьи после индекса УДК, сначала на русском, затем на английском языке располагается основная информация о статье: заголовок статьи, список авторов с информацией о них, аннотация, ключевые слова (3–7 ключевых слов), информация о финансировании исследований, а также об отсутствии или наличии конфликта интересов, вкладе авторов в процесс написания статьи (идея работы, проведение экспериментов, вычислений, расчетов, анализ данных и написание текста статьи). Подразумевается, что в утверждении текста статьи принимали участие все авторы. Для каждого автора указывается фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание, должность, место работы, ORCID номер и e-mail адрес. Необходимо указать автора, с кем вести переписку, его служебный и домашний адрес с почтовым индексом, а также телефоны для связи. Эта информация не будет опубликована в журнале и нужна редакции только для связи с автором. Указывается дата отсылки статьи. Основной текст статьи начинается с новой страницы. В конце статьи располагается нумерованный список использованных источников в порядке упоминания в статье. Ссылки на источники указываются в тексте статьи в квадратных скобках.

- идентичный электронный вариант статьи в виде ZIP-архива. В архиве должны быть следующие файлы: файл с текстом статьи (название файла должно совпадать с фамилией первого автора в транслитерации, например, *ivanov*), файлы с рисунками и PDF-версия статьи. Все файлы с рисунками должны называться так же как файл со статьей с добавлением номера. ZIP-архив необходимо загрузить через форму на официальном сайте vestnik.kubsu.ru/submit или переслать на e-mail журнала vestnik@kubsu.ru.
- оригинал представления (направления) от учреждения, в котором выполнена работа (выписка из заседания кафедры с рекомендацией к публикации, обращение в свободной форме уполномоченного лица вуза с просьбой о публикации к главному редактору и т.д.).
- оригинал акта экспертизы о возможности публикации в открытой печати для российских авторов.
- 2 экземпляра заполненного и подписанного Лицензионного договора. Шаблон Лицензионного договора можно найти на сайте журнала по адресу vestnik.kubsu.ru.

2) Процедура принятия и публикации статьи состоит из следующих этапов:

- после получения редакцией электронного варианта статьи (в случае соответствия оформления статьи настоящим правилам) автор по электронной почте уведомляется о принятии статьи к рассмотрению редколлегией журнала и редакция ожидает поступления оригинала статьи и сопровождающих документов. В процессе рассмотрения редколлегией может отклонить несоответствующую тематике или научному уровню журнала статью.
- для проведения научной экспертизы работ в качестве рецензентов и экспертов редакцией привлекаются высококвалифицированные ученые и специалисты, обладающие глубокими профессиональными знаниями и опытом работы по конкретному научному направлению.

Рецензентом не может быть автор или соавтор рецензируемой работы. В результате автору по электронной почте высылается рецензия и мотивированное решение о возможности публикации работы (статья рекомендуется к печати, статья рекомендуется к печати после доработки, статья не рекомендуется к печати). Данные рецензентов редакция не раскрывает.

- в случае успешного прохождения рецензирования после научной и редакторской правки автору по электронной почте высылается корректурный оттиск со статьей в формате PDF для утверждения и/или внесения правок.
- после выхода журнала автору по электронной почте высылается уведомление о публикации с гранками или ссылкой на статью в формате PDF. Авторский экземпляр журнала редакцией не предоставляется.

3) Редакция принимает статьи в двух электронных форматах — $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ или MS Word:

- $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$. Статью следует писать с использованием стилевого класса `vestnik3` в кодировке Unicode (UTF8) или Windows (CP1251). Старайтесь не использовать свои стилевые файлы и не переопределять существующие команды.
- MS Word. Не следует использовать знаки принудительного переноса и дополнительные пробелы. Набор формул предпочтительно производить в редакторе формул Equation или MathType (даже для внутритекстовых формул и переменных). Если статья использует разделы, нумерация формул начинается в каждом разделе заново. Если статья содержит рисунки, они должны быть сохранены без подписей как отдельные файлы в их исходном формате: предпочтительные форматы для графиков или диаграмм — `pdf`, `eps`, `wmf`; для фотографий — `png`, `pdf` или `eps`. На все рисунки должны быть ссылки.

Класс `vestnik3` и шаблон для написания статьи в MS Word можно найти на сайте журнала по адресу `vestnik.kubsu.ru`. Там же приведены советы по написанию статей в $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ и MS Word.

4) Векторные величины и матрицы выделяются прямым полужирным шрифтом. Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки. В русскоязычной типографской традиции целая и дробная части чисел отделяются запятой, а выключные формулы являются равноправными элементами предложения и должны завершаться соответствующими знаками препинания. Следует использовать единицы измерения в соответствии с Международной системой (СИ) и только общепринятые сокращения. Использование сносок нежелательно.

Рисунки, графики и схемы (обязательно черно-белые или в градациях серого) предоставляются в виде отдельных файлов и должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей. Графики должны быть подписаны по осям. Разрешение полутоновых файлов должно быть не менее 150 dpi, а черно-белых — не менее 300 dpi при соответствующих размерах изображения (не менее 7×7 см). Таблицы должны иметь заголовки, а рисунки — подписи.

Если русскоязычная аннотация может быть краткой, то англоязычная должна дать зарубежным коллегам более полное представление о статье. Желательный размер англоязычной аннотации — примерно 150–250 слов. Она должна быть информативной, содержательной, следовать логике описания результатов в статье и написана качественным английским языком. Одним из проверенных вариантов является краткое повторение в аннотации структуры статьи, включающей введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение. Ссылки на формулы, теоремы или источники из статьи в аннотациях недопустимы. Для контроля редакцией необходим перевод расширенной аннотации на русский язык.

В журнале используется объединенный раздел «Литература [References]», в котором зарубежные источники приводятся на языке оригинала, а национальные — должны сопровождаться переводом всей ссылки на английский язык в квадратных скобках в конце ссылки. Названия книг и журналов выделяются курсивом и транслитерируются, затем через знак «равно» (=) следует перевод названия на английский язык. Для национальных журналов следует указывать их официальное написание на английском языке и только в случае

его отсутствия приводить собственный перевод названия. В конце перевода указывается язык публикации, например, (in Russian). Следует избегать ссылок на диссертации и авторефераты диссертаций.

Для обоих типов ссылок в журнале принят немного измененный IEEE-стиль оформления. Сначала следует фамилия автора, затем инициалы. Приводится полный список авторов, сокращения «и др.» и «et al.» недопустимы. Названия журналов и книг отмечаются курсивом. После списка авторов и названия все элементы ссылки отделяются друг от друга запятыми. Для национальных источников в качестве сокращений тома, номера и страниц используется «т.», «№» и «с.», а для зарубежных — «vol.», «iss.» (или «no.») и «pp.» (или «p.»), соответственно. Для книг не требуется общее количество страниц. При наличии DOI-номера он должен быть указан. Редакторы сборника всегда указываются в начале ссылки с добавлением «(ред.)» и «(ed.)» или «(eds.)».

Перед отсылкой статьи следует проверить корректность ссылок. Для повышения научного доверия к статье следует использовать не только национальные источники, а также чаще ссылаться на свежие публикации (не старше 3–5 лет). Недопустимо чрезмерное самоцитирование (1–3 ссылки на согласующиеся с темой статьи предыдущие работы автора).

ПРИМЕРЫ ОФОРМЛЕНИЯ ЛИТЕРАТУРЫ

- *статьи в журналах, сборниках, трудах конференций:*
 1. Иванов, Н. Н., Волны в жидкости. *Гидромеханика*, 2003, т. 1, № 10, с. 13–17. [Ivanov, N. N. Waves in liquids. *Gidromekhanika = Hydromechanics*, 2003, vol. 1, no. 10, pp. 13–17. (in Russian)]
 2. Prescott, S. W., Mulvaney, P., Gold nanorod extinction spectra. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, iss. 12, p. 123504. DOI 10.1063/1.2203212
 3. Шилова, В. П. Источники ЗВ. В: *Тез. докл. XV Междунар. конф. «Проблемы экологии». Москва, 2000*, с. 5–8. [Shilova V. P. Sources of pollutants. In: *Proc. of reports 15th international conf. “Environmental Problems”*, Moscow, 2000, pp. 5–8. (in Russian)]
- *книги:*
 1. Литвинов, А. Н., *Динамика массивных тел*. Москва, Наука, 1982. [Litvinov A. N. *Dinamika massivnykh tel = Dynamics of massive bodies*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
 2. Кутепов, В. М., Шеко, А. И. (ред.) *Природные опасности России. Экзогенные геологические процессы*. Москва, КРУК, 2002. [Kutepov, V. M., Sheko, A. I. (eds.) *Prirodnye opasnosti Rossii. Ekzogennye geologicheskie protsessy = Russian natural hazards. Exogenous processes*. Moscow, KRUK, 2002. (in Russian)]
 3. Петров, Е. П., *Мониторинг окружающей среды*. Дис. . . канд. хим. наук. Москва, 1984. [Petrov E. P. *Monitoring okruzhayushchey sredy = Environmental monitoring*. Cand. diss. PhD of Chem. Sci. Moscow, 1984. (in Russian)]
- *электронные ресурсы:*
 1. Международная библиотека математических подпрограмм IMSL (дата обращения 20.02.2018) [IMSL numerical library (accessed 20.02.2018)]. URL: <https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries>

Дополнительные примеры оформления источников, шаблоны и рекомендации по написанию статей в \LaTeX 2_ε и MS Word можно найти на сайте журнала по адресу vestnik.kubsu.ru.

Редколлегия рукописи, а также электронные носители не возвращает.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов публикуемых материалов.

Редакция оставляет за собой право менять заголовки, сокращать тексты статей и вносить в них необходимую стилистическую правку без согласования с авторами.

Несоблюдение правил оформления рукописи и компьютерного набора задерживает ее публикацию.

РУКОПИСИ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:

350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, Кубанский государственный университет
Редакция журнала «Экологический вестник научных центров ЧЭС»

Тел.: +7 (918) 088-66-51. E-mail: vestnik@kubsu.ru

Сайт: vestnik.kubsu.ru

INFORMATION FOR THE AUTHORS OF THE JOURNAL “Ecological Bulletin of Research Centers of The Black Sea Economic Cooperation”

The editorial board accept for publication original work in English and Russian containing rigorous results in mathematics, mechanics and physics. The manuscript should not be submitted or published in other journals, should have scientific novelty, be written in an impersonal and concisely good English (Russian) language, be structured, have an introduction and conclusion.

1) It is necessary to submit to the editorial office:

- two copies of the manuscript. The manuscript should be printed on one side of an A4 sheet in one column at 1.5 line spacing and 14 pt Times New Roman font. All margins of the document are 2.5 cm. The number of pages in the article should not exceed 20 pages, including tables, figures (no more than 7) and a list of references (no more than 15–20 sources). All pages must be numbered.

At the beginning is the main information about the article: the title of the article, the list of authors with information about them, abstract, keywords (3–7 keywords), information about research funding, as well as the absence or presence of a conflict of interest, the contribution of authors to the article writing process (the idea of work, conducting experiments, calculations, data analysis and writing the text of the article). It is assumed that all authors took part in the approval of the text of the article. Last name, first name, patronymic, academic degree, title, position, place of work, ORCID number and e-mail address must be given. It is necessary to indicate the author, with whom to correspond, his work and home address with postal code, as well as phone numbers for communication. This information will not be published in the journal and is only needed by the editors to contact the author. There must be a date when the article was sent. The text of the article starts on a new page. At the end of the article is a numbered list of references in the order of references in the article. References to sources are indicated in the text of the article in square brackets.

- identical electronic version of the article in a ZIP archive. The archive should contain the following files: the file with the text of the manuscript (the file name should match the name of the first author in transliteration, for example, `smith`), files with additional figures and a PDF version of the manuscript. All files with figures should be named the same as the file with the article with the addition of a number. ZIP-archive must be uploaded through the form on the official website vestnik.kubsu.ru/submit or sent to e-mail vestnik@kubsu.ru.
- two copies of the completed and signed License Agreement. The License Agreement template can be found on the journal’s website at vestnik.kubsu.ru.

2) The process for accepting and publishing an article consists of the following steps:

- after the editorial board receive the electronic version of the manuscript (in case if the manuscript is formatted according to these rules), the author is notified by e-mail about the acceptance of the article for consideration by the editorial board of the journal and the editorial office awaits receipt of the original article and accompanying documents. In the process of consideration, the editorial board may reject a manuscript that does not correspond to the subject or scientific level of the journal.
- to conduct a scientific examination of papers as reviewers and experts, the editors involve highly qualified scientists and specialists with deep professional knowledge and experience in they scientific area. The reviewer cannot be the author or co-author of the reviewed work. As a result, the review and a reasoned decision on the possibility of publishing the work are sent to the author by e-mail (the manuscript is recommended for publication, the manuscript is recommended for publication after revision, the manuscript is not recommended for publication). The editors do not disclose the data of reviewers.
- in case of successful peer review, after scientific and editorial corrections, a proofreading print with the article in PDF format is sent to the author by e-mail for approval and / or corrections.

- the author receives an e-mail notification of publication after the publication of the journal with proofs or a link to the article in PDF format. The author's copy of the journal is not provided by the editorial.
- 3) The editorial board accept articles in $\LaTeX 2_{\epsilon}$ or MS Word:
- $\LaTeX 2_{\epsilon}$. The article should be written using style class `vestnik3` in the Unicode (UTF-8) or Windows (CP1251) encoding. Try not to use your style files and not to reassign existent commands.
 - MS Word. Don't use forced line breaks and additional spaces. Type of formulas should be carried out only in Equation Editor or MathType (even for inline equations and variables). If in the manuscript sections are used, the numeration of equations begins in every section anew. If the manuscript contains pictures, they must be saved without captions as individual files and not to include in Word. The preferable formats for graphs or diagrams are `eps`, `pdf`, `wmf`; for photos – `eps`, `pdf` or `png`.

Journal templates for writing manuscripts in $\LaTeX 2_{\epsilon}$ and MS Word formats can be found on the journal website at `vestnik.kubsu.ru`.

- 4) Vector quantities and matrices are in direct bold type. The article should contain only the most necessary formulas, it is desirable to refuse intermediate calculations. Only those formulas to which there are references are numbered. Units of measurement should be used in accordance with the International System of Units (SI system) and only generally accepted abbreviations. Footnotes are not recommended.

Figures, graphs and diagrams (necessarily in black and white or in grayscale) are provided as separate files and must be made clearly, in a format that ensures clarity of transmission of all details. Graphs must be labeled along the axes. The resolution of grayscale files must be at least 150 dpi, and for black and white files, at least 300 dpi, with appropriate image sizes (at least 7×7 cm). Tables should have headings and figures should have captions.

- 5) The desired length of the abstract is approximately 150–250 words. It should be informative, meaningful, follow the logic of the description of the results in the article. One of the tested options is a brief repetition in the annotation of the structure of the article, including the introduction, goals and objectives, methods, results, conclusion. References to formulas, theorems or sources from the article in the annotations are not allowed.

The References section uses a slightly modified IEEE style for the list of bibliographic references. First comes the author's last name, then the initials. The full list of authors is given, abbreviations "et al." are not allowed. The titles of journals and books are marked in italics. After the list of authors and the title, all elements of the link are separated from each other by commas. The abbreviations for volume, issue, and pages are "vol.", "iss." (or "no.") and "pp." (or "p."), respectively. Books do not require a total number of pages. If there is a DOI number, it must be specified. The editors of the collection are always indicated at the beginning of the reference with the addition of "(ed.)" or "(eds.)".

You should check the correctness of the links before sending the manuscript. Fresh publications (not older than 3–5 years) should be used to increase the scientific credibility of the article. Excessive self-quoting is unacceptable (1–3 references to previous works of the author consistent with the topic of the article).

THE REFERENCES EXAMPLES

- *articles in journals, collected articles, works of conferences:*
 1. Dyson, F.J., Feynman's proof of the Maxwell equations. *Am. J. Phys.*, 1990, vol. 8, iss. 3, pp. 209–211.
 2. Prescott, S.W., Mulvaney, P., Gold nanorod extinction spectra. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, no. 12. DOI 10.1063/1.2203212
 3. Martikainen, J., Mäkinen, R.A.E., Rossi, T., Toivanen, J., A fictitious domain method for linear elasticity problems. *Proc. of the First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Elsevier, Oxford, 2001, pp. 346–350.

• *books, theses:*

1. Griffiths, D.J., *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
2. Fainstein, S.S., Campbell, S. (eds.) *Readings in urban theory*. Wiley-Blackwell, 2011.
3. Andrews, G.E., The theory of partitions. In: *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Vol. 2. Addison-Wesley, 1976.

• *electronic resources:*

1. IMSL numerical library (accessed 20.02.2018). URL: <https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries>

The additional examples of literature references, templates and recommendations how to type manuscripts in $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ and MS Word you can find on vestnik.kubsu.ru.

Editorial board doesn't give back manuscripts and electronic media.

Fee for postgraduate students to publish manuscripts not charged.

Point of view of editorial stuff can be another than an opinion of authors of published works.

The editorial board reserves the right to change the headers to reduce manuscripts and make the necessary stylistic editing without the consent of the authors.

Failure to comply with the rules of the manuscript preparation and typesetting delay its publication.

MANUSCRIPTS SHOULD BE SENT TO:

149 Stavropolskaya St, Krasnodar, 350040, Kuban State University

The editorial board of the journal

“Ecological bulletin of scientific centres of the Black Sea Economic Cooperation”

Tel.: +7 918 0886651. E-mail: vestnik@kubsu.ru

Web: vestnik.kubsu.ru

Журнал
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»
решением Президиума ВАК РФ включен в перечень
ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации, в которых должны быть
опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата и доктора наук.

Научные специальности:
1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика,
1.1.8 Механика деформируемого твердого тела,
1.3.6 Оптика и 1.3.8 Физика конденсированного состояния.

Журнал распространяется по подписке
через каталог «АРЗИ» (подписной индекс Э46477)
и через Научную электронную библиотеку (www.elibrary.ru).
Дополнительную информацию, а также содержание предыдущих номеров,
можно найти в сети Интернет по адресу vestnik.kubsu.ru.

The journal
“Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation”
it is included in the list of the leading peer-reviewed scientific journals
and publications published in the Russian Federation,
in which the main scientific results of dissertations
for the degree of candidate and doctor of sciences should be published.
Scopes: differential equations and mathematical physics, deformable solid
mechanics, optics and condensed matter physics.

Journal is distributed by electronic subscription through the ARZI catalogue
(subscription index Э46477) and Russian Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru).
More information, and the contents of previous issues can be found on vestnik.kubsu.ru.

Научно-образовательный и прикладной журнал
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»

Адрес издателя:
Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Адрес редакции:
Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Над номером работали:
А. В. Павлова, Д. А. Хрипков

Подписано в печать 12.10.2022. Выход в свет 18.10.2022
Формат 60 × 84 ¹/₈. Усл. печ. л. 8.40. Уч.-изд. л. 8.71. Тираж 1 000 экз.
Гарнитура Computer Modern LN. Макет подготовлен и сверстан
в издательской системе \TeX с помощью макропакета \LaTeX 2 _{ϵ}
в компьютерном центре редакции. Цена свободная.

Возрастное ограничение: для лиц, старше 12 лет

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре
Кубанского государственного университета.
Краснодар, ул. Ставропольская, 149
Печать цифровая. Заказ № 5048