ISSN 1729-5459

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК

НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ
ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal

ECOLOGICAL BULLETIN

OF RESEARCH CENTERS
OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)

2022 · Том 19 · № 4

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52730 от 8 февраля 2013 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. ISSN 1729-5459. Основан в 2003 году. Выходит 4 раза в год. Подписной индекс по каталогу «АРЗИ» Э46477.
Возрастное ограничение: для лиц, старше 12 лет

Учредители

Адыгейский государственный университет, Республика Адыгея, Майкоп, Россия; **Дагестанский государственный университет**, Республика Дагестан, Махачкала, Россия; **Дагестанский государственный технический университет**, Республика Дагестан, Махачкала, Россия; **Институт прикладной механики РАН**, Москва, Россия; **Кабардино-Балкарский государственный университет**, Республика Кабардино-Балкария, Нальчик, Россия; **Кубанский государственный университет**, Краснодар, Россия; **Ростовский государственный университет путей сообщения**, Ростов-на-Дону, Россия; **Южный федеральный университет**, Ростов-на-Дону, Россия.

Издатель

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия.

Адрес издателя

Кубанский государственный университет, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Адрес редакции

Редакция журнала «Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества», Кубанский государственный университет, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Сайт: vestnik.kubsu.ru. E-mail: vestnik@kubsu.ru. Тел.: +7 (918) 0886651

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

2022 • Том 19 • № 4

Содержание

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal

ECOLOGICAL BULLETIN OF RESEARCH CENTERS OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)

Certificate of registration ПИ № ФС77-52730 d/d Feb 8 2013 by Federal Agency of Supervision in Sphere of Association, Information Technology and Mass Communications. ISSN 1729-5459. Founded in 2003. Published 4 times a year. Subscription index Э46477 in the ARZI catalogue.

Founders

Adygeya State University, Maykop, Adygeya Republic, Russia; **Dagestan State University**, Makhachkala, Dagestan Republic, Russia; **Dagestan State Technical University**, Makhachkala, Dagestan Republic, Russia; **Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences**, Moscow, Russia; **Kabardino-Balkarian State University**, Nalchik, Kabardino-Balkarskaya Republic, Russia; **Kuban State University**, Krasnodar, Russia; **South Federal University**, Rostov-on-Don, Russia; **Rostov State Transport University**, Rostov-on-Don, Russia

Publisher

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Publisher address

Kuban State University, 149 Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040

Editorial address

Kuban State University, 149 Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040
Journal "Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation"

web: vestnik.kubsu.ru, e-mail: vestnik@kubsu.ru, tel.:+7 918 0886651

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal
ECOLOGICAL BULLETIN OF RESEARCH CENTERS OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)
2022 · Volume 19 · No. 4

Table of Contents

50 ЛЕТ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ НА КУБАНИ

Полвека назад, в 1972 году, на математическом факультете Кубанского государственного университета было открыто отделение прикладной математики. Это событие положило начало подготовке специалистов в области программирования и прикладной математики на Кубани. В этом же году состоялся первый набор студентов на специальность «Прикладная математика».

Сегодня факультет компьютерных технологий и прикладной математики (ФКТиПМ) КубГУ — один из ведущих образовательных центров Южного Федерального округа по подготовке высококвалифицированных специалистов по прикладной и вычислительной математике, информатике и программированию. В настоящее время на факультете обучается около 1200 студентов. В этом учебном году на факультет поступили 400 первокурсников, в том числе 100 магистрантов.

А историю свою он ведет именно с 1972 года, когда на математическом факультете, деканом которого в это время был канд. физ.-мат. наук, доцент Александр Михайлович Скряго, открылось отделение прикладной математики. Отделение прикладной математики математического факультета 29 октября 1989 года было преобразовано в факультет прикладной математики (ФПМ). В 2007 году ФПМ сменил название на факультет компьютерных технологий и прикладной математики (ФКТиПМ).

В 1974 г. в университете появилась кафедра прикладной математики, ставшая родоначальницей почти всех нынешних кафедр факультета. Первым заведующим кафедрой был избран профессор, д-р физ.-мат. наук Иван Демьянович Черкасов. С 1977 по 1988 г. этой кафедрой заведовал д-р физ.-мат. наук, профессор Виктор Григорьевич Лежнев. В 1988–1992 гг. кафедрой руководил д-р техн. наук, профессор Александр Александрович Красовский, учёный-механик, специалист в области теории полета ракет, лауреат Государственной премии СССР. С 1953 по 1978 гг. он работал в КБ «Южное», в 1962–1978 гг. был начальником отдела баллистики. А. А. Красовский принимал непосредственное участие в проектировании и летных испытаниях первых трех поколений боевых ракетных комплексов разработки КБ «Южное» (Р-12, Р-14, Р-16, Р-36, Р-36М), в частности недавно снятой с вооружения «Сатаны» и космических ракет-носителей «Космос», «Интеркосмос», «Циклон», «Зенит». Особая его заслуга — исследование новых явлений авторотации боевых блоков при входе в атмосферу и разработка методических основ и технических решений, исключающих возможность их разрушения.

С 1992 по 2002 г. кафедрой прикладной математики руководил канд. физ.-мат. наук, доцент Владимир Николаевич Кармазин, а с 2002 г. кафедру возглавляет д-р физ.-мат. наук, профессор Махамет Али Хусеевич Уртенов.

В 1979 г. из кафедры прикладной математики выделилась кафедра математического моделирования, которую возглавил д-р физ.-мат. наук, профессор Ион Иванович Ефремов. С 1982 г. кафедрой руководит академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор Владимир Андреевич Бабешко (ректор КубГУ в 1982–2007 гг.). В. А. Бабешко — известный специалист в области механики деформируемого твердого тела, прикладной математики, сейсмологии и экологии, создавший ряд новых научных направлений, один из соавторов открытия нового физического явления — высокочастотного резонанса в полуограниченных средах с неоднородностями. Под руководством В. А. Бабешко выполнены сотни научных проектов по программам федерального, отраслевого, регионального уровней, выиграны гранты международного (CRDF, Интас, ДААД, Сороса, Фулбрайта) и российского (РФФИ, Минпромнауки, Минприроды, Минобразования, РНФ и др.) рангов.

Именно Владимир Андреевич, будучи ректором Кубанского университета, выступил в 1989 г. инициатором создания в университете факультета прикладной математики на базе существовавшего отделения. Первым деканом ФПМ стала канд. физ.-мат. наук, доцент (ныне д-р физ.-мат. наук, профессор) Алла Васильевна Смирнова. Декану А. В. Смирновой удалось заложить на факультете традиции высокого профессионализма, создать атмосферу энтузиазма и взаимопомощи.

В 1992 г. от кафедры математического моделирования отделилась кафедра информационных технологий. Заведующим стал канд. физ.-мат. наук, доцент Юрий Владимирович Кольцов. В 2018–2019 гг. обязанности заведующего кафедрой исполнял канд. физ.-мат. наук, доцент Гаркуша Олег Васильевич. В настоящее время кафедрой заведует канд. физ.-мат. наук, доцент Вадим Владиславович Подколзин.

В 1993 г. из состава кафедры прикладной математики выделилась кафедра численного анализа, заведующим которой стал канд. физ.-мат. наук, доцент Сергей Витальевич Нагорный. В 2008 г. кафедра была переименована в кафедру вычислительных технологий, возглавил ее профессор, д-р физ.-мат. наук Александр Иванович Миков. А с 2018 г. кафедру возглавляет д-р техн. наук, профессор Вишняков Юрий Муссович, почетный работник высшего профессионального образования.

В 1993 г. на ФПМ открылась новая специальность «Геофизика» и соответствующая кафедра геофизики, которую возглавляли профессор, д-р геол.-мин. наук Юрий Петрович Конценебин, затем — профессор, д-р техн. наук Станислав Иосифович Дембицкий. Через одиннадцать лет кафедра геофизики вышла из состава факультета, образовав геологический факультет.

С 1998 по 2017 гг. ФПМ возглавлял канд. физ.-мат. наук, доцент Ю. В. Кольцов. На протяжении своего существования ФПМ развивался в соответствии с требованиями времени и потребностями практической деятельности — в 2000 г. на факультете появились две новые специальности: «Математические методы в экономике» и «Прикладная информатика в экономике», — а в 2004 г. еще одна — «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

В начале 2000 г. на ФПМ была открыта кафедра высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций под руководством генерал-майора МЧС, профессора Михаила Андраниковича Шахраманьяна. В 2002 г. заведующим кафедрой была избрана лауреат Государственной премии Российской Федерации в области науки и техники д-р физ.-мат. наук, профессор Ольга Донатовна Пряхина. С 2001 г. на факультете началась подготовка студентов по специальности «Безопасность жизнедеятельности в техносфере». В начале 2011 г. кафедра была преобразована в кафедру интеллектуальных информационных систем, которую возглавил канд. физ.-мат. наук Константин Иванович Костенко, а с 1 сентября 2019 г. исполняющим обязанности заведующего кафедрой был назначен д-р пед. наук, профессор Сергей Владленович Юнов. В 2020 г. на базе этой кафедры была создана кафедра анализа данных и искусственного интеллекта, заведующим которой была избрана Коваленко Анна Владимировна, доцент, д-р техн. наук.

Бурное развитие компьютерных технологий привело в 2007 г. к переименованию факультета.

С 2017 г. факультетом руководит канд. физ.-мат. наук, доцент Александр Дмитриевич Колотий. В настоящее время в состав факультета ФКТиПМ входят пять кафедр: прикладной математики, математического моделирования, компьютерных технологий, вычислительных технологий, анализа данных и искусственного интеллекта. За прошедшие годы на факультете сформировались научные школы по различным направлениям прикладной математики и информатики.

Сегодня на факультете ведется подготовка по четырем направлениям подготовки бакалавров: 01.03.02 Прикладная математика и информатика (три профиля); 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии; 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем; 09.03.03 Прикладная информатика. Кроме того, на ФКТиПМ готовят магистров по трем направлениям: 01.04.02 Прикладная математика и информатика (три программы); 02.04.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии; 09.04.02 Информационные системы и технологии.

Для продолжения образования талантливой молодежи на факультете реализуются программы подготовки кадров высшей квалификации по направления: 1.1 Математика и механика, профиль 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела; 1.2. Компьютерные науки и информатика, профили: 1.2.1 Искусственный интеллект и машинное обучение; 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Подготовка специалистов ориентирована на внедрение современных научных знаний в содержание образования и органичное сочетание образовательных и научно-исследовательских программ. Подобный подход позволяет реализовать активное участие студентов и аспирантов в фундаментальных исследованиях и разработке новых технологий. Факультет занимает ключевые позиции в вузе по участию в научно-исследовательской работе. Ежегодно осваивается порядка 25 миллионов рублей.

Уровень выполняемых научно-исследовательских работ был высоко оценен государством. В 2001 году три профессора ФПМ: В. А. Бабешко, Е. В. Глушков и О. Д. Пряхина, — были удостоены Государственной премии Российской Федерации в области науки и техники.

Факультету есть чем гордиться! За полвека подготовлено более 5000 квалифицированных специалистов, работающих в разных отраслях, многие из которых хорошо известны в России. А в нашем регионе в настоящее время практически нет организаций, где не возникает потребность в специалистах, выпускаемых факультетом компьютерных технологий и прикладной математики.

ФКТиПМ старается шагать в ногу со временем. В программе подготовки каждый год появляются новые актуальные дисциплины, как того требует динамично развивающаяся сфера информационных технологий. Все достижения и успехи факультета — результат деятельности его славного коллектива, профессорско-преподавательского состава и учебно-вспомогательного персонала, каждый день ответственно и качественно выполняющего свою работу.

20–23 сентября 2022 г. на факультете прошла Всероссийская научно-практическая конференция «Прикладная математика и информатика в современном мире», посвящённая 50-летию подготовки специалистов в области программирования и прикладной математики на Кубани. Некоторые доклады участников представлены в этом номере.

Колотий А.Д., Павлова А.В., Халафян А.А.

УДК 004.82 DOI 10.31429/vestnik-19-4-9-19

Структуры памяти и синтез знаний в сложно организованных интеллектуальных системах

К. И. Костенко✉

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Костенко Константин Иванович; ORCID 0000-0002-9851-2455; e-mail: kostenko@kubsu.ru

Аннотация. Для построения моделей интеллектуальных систем используются принципы кибернетики. Основой реализации этих принципов являются математические описания концепций формализмов знаний, архитектуры интеллектуальных систем и управления интеллектуальными системами. Описания составляют базовую модель, расширения и детализации которой образуют структуру моделей разного уровня. Память интеллектуальных систем является одним из элементов модели. Она связана с форматами структур знаний, формирующихся в потоках процессов синтеза знаний. Общие структуры памяти реализуются как бесконечные насыщенные двоичные деревья, разделенные на подобласти, используемые в качестве доменов операций над знаниями. Комбинации прямых сумм и произведений доменов задают описания структур памяти. Особенностью доменов операций является возможность описания, основанного на регулярных выражениях. Определена топологическая структура регулярных областей памяти. Приведены схемы использования операций топологии при моделировании процессов синтеза знаний.

Ключевые слова: память интеллектуальной системы, регулярная область памяти, топология областей памяти, представление знаний, синтез знаний, операция над знаниями.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (проект № 19-41-230008) и при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00289).

Цитирование: Костенко К. И. Структуры памяти и синтез знаний в сложно организованных интеллектуальных системах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 9–19. DOI 10.31429/vestnik-19-4-9-19

Поступила 22 ноября 2022 г. После доработки 24 ноября 2022 г. Принято 27 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

The Knowledge Synthesis in Memory Structures Complexly Organized Intelligent Systems

K. I. Kostenko✉

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Konstantin I. Kostenko; ORCID 0000-0002-9851-2455; e-mail: kostenko@kubsu.ru

Abstract. Cybernetic principles considered as the basis for the development of intelligent systems' formal models. These principles implementation founded on mathematical descriptions for general properties of knowledge formalisms, intelligent system architecture and intelligent systems control. Descriptions make up the basic model, the extensions and refinements of which form the structure of models at different levels. General memory structures modeled as infinite saturated binary trees, divided into subareas used as knowledge operation domains. Combinations of subareas direct sums and direct products represent memory structures within models descriptions. Considered knowledge operation domains set allow describing its elements by regular expressions. The topological structure of memory areas introduced for regular memory areas. The schemes of topology operations applications for knowledge synthesis processes are given.

Keywords: intelligent system memory, regular memory area, memory areas topology, knowledge representation, knowledge synthesis, knowledge domains.

Funding. The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the administration of the Krasnodar Territory (project no. 19-41-230008) and with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00289).

Cite as: Kostenko, K. I., The knowledge synthesis in memory structures complexly organized intelligent systems. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 9–19. DOI 10.31429/vestnik-19-4-9-19

Received 22 November 2022. Revised 24 November 2022. Accepted 27 November 2022. Published 30 November 2022.

The author declare no competing interests.

Введение

Математическую модель интеллектуальной системы (ИС) образуют понятия и свойства, которые задают общие параметры и свойства интеллектуальности. Они являются многопредметными и исследуются в разных областях знаний. Это позволяет построить базовую формальную модель с универсальными возможностями моделирования и исследования свойств интеллекта. Модель использует уточнения фундаментальных понятий философии, когнитивной психологии, лингвистики, теории систем [1–3]. Модель применяет математический аппарат как основу для формализации понятий в других предметных областях [4–6]. Это позволяет рассматривать ИС как элементы класса систем, определяемых множествами формальных описаний, получаемых из описаний общих параметров и свойств интеллекта, изучаемыми в различных областях знаний. Базовую модель ИС составляют формальные описания параметров и свойств формализмов представления знаний, структур потоков процессов знаний и элементов управления жизненными циклами ИС [4, 7].

Для формализации элементов базовой модели ИС используются концепции и порождающие принципы, принятые в лингвистике и когнитивной психологии [1, 2]. Кибернетические инварианты для управления знаниями на основе принципов системной инженерии и кибернетики [8]. Математическая модель ИС основана на формализмах представления знаний [6]. Базовая модель преобразуется в модели прикладных ИС операциями кастомизации расширения и детализации моделей.

Память является одним из базовых понятий для моделирования интеллекта. Кратковременная память и долговременная (семантическая) память, разделенные на подклассы сознательной и бессознательной памяти, образуют первые уровни в рамках принятых классификаций памяти [9]. Фундаментальное понятие познания, реализуемое как модель формирования содержания памяти человека, по своим свойствам подобно структурам знаний в формализмах семантических иерархий [6]. Эта аналогия не решает проблему тождества естественного (сильного) и искусственного (слабого) интеллекта [9]. Она позволяет открывать новые возможности искусственного интеллекта.

Структуру памяти образуют отдельные подобласти как домены для синтеза знаний операциями над знаниями. Отдельные области соответствуют классам знаний с близкими структурными и семантическими свойствами.

Множество операций над доменами включает прямую сумму доменов и прямое произведение доменов. Эти операции позволяют определять домены со сложной структурой памяти на основе заранее выбранных регулярных областей памяти. Описания структур памяти определяются далее как комбинации доменов и операций, применяемых в ходе реализации процессов синтеза знаний в памяти ИС. Процессы используют иерархию классов специальных операций (морфизмов) знаний. Этими операциями моделируются этапы процессов, формирующих и использующих семантические структуры в памяти ИС.

1. Формализмы представления знаний

Понятие формализма знаний (KRF) введено как основа моделирования содержания предметных областей [4]. Формализмы позволяют исследовать структурные свойства, преобразования и сравнения знаний. Общее определение формализма соответствует четвёрке $\Im = (M, D_M, \circ, \prec)$. Здесь M и D_M обозначают алгоритмически перечислимые множества знаний и фрагментов знаний. Также $M \subseteq D_M$ и множество M разрешимо для D_M. Множество M содержит «*пустое знание*», которое обозначается как Λ. Остальные элементы четвёрки это композиции $\circ : D_M \times D_M \to D_M$ и разрешимое отношение вложения фрагментов знания $\prec \subseteq D_M \times D_M$.

Операция $\circ$ определяет алгебраические структуры элементов D_M как композиций элементов этого множества. Эти структуры представляются бинарными деревьями, внутренние вершины которых размечены символом $\circ$, а листья — элементами D_M. Двоичные последовательности удобны в качестве вершин в алгебраических структурах знаний. Символ I далее обозначает множество всех таких последовательностей. Следующее правило определяет последовательности, используемые в качестве вершин деревьев: корень дерева соответствует пустой бинарной последовательности и, если внутренняя вершина дерева соответствует $\alpha \in I$, то следующие левый (правый) потомки этой вершины — это $\alpha 0$ ($\alpha 1$).

1.1. Формализмы семантических иерархий

Формализмы семантических иерархий (SHF) — это подкласс множества формализмов знаний. Знания в таких формализмах называются конфигурациями. Эти формализмы используются для моделирования структур знаний, использующих семантические отношения между фрагментами таких структур. Пусть M — алгоритмически перечислимое множество, элементы которого называются конфигурациями, и $\Lambda \in M$, R — алгоритмически перечислимое множество разрешимых отношений на M. Для пар элементов R разрешимо свойство вложения множеств. Также заданы алгоритмически вычислимое отображение разложения конфигураций $\varepsilon : M \to M \times M$, называемое (связывания конфигураций $\psi : M \to R$). Конфигурация $z \in M$ называется элементарной, если $\varepsilon(z) = (\Lambda, \Lambda)$. Также $\varepsilon(\Lambda) = (\Lambda, \Lambda)$. Если $\varepsilon(z) = (z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \neq (\Lambda, \Lambda)$, и $\psi(z) = r$, то $(z_1, z_2) \in r$. В последнем случае z состоит из конфигураций z_1 и z_2. Отношение r связывает z_1 и z_2 в z.

Отображения ε и ψ определяют структуры конфигураций (CSR) как бинарные деревья с размеченными вершинами. Следующие правила определяют уникальное такое дерево $\Sigma(z)$ для структурного представления конфигурации z. Всякая элементарная конфигурация представляются одновершинным деревом. Неэлементарную конфигурацию $z \in M$, для которой $\varepsilon(z) = (z_1, z_2)$, представляет дерево, корень которого размечен как $\psi(z)$ с левым и правым поддеревьями корня, представляющими конфигурации z_1 и z_2.

Частным случаем формализмов семантических иерархий являются формализмы с конечной глубиной структур конфигураций. Параметрами структур являются множества вершин ($D(z)$) и множества листьев ($O(z)$) представления конфигураций z. Глубина $z \in M$ определяется как максимум длин путей, выходящих из корня, и обозначается как $d(z)$. Если $\alpha \in D(z)$, то выражение $[z]_\alpha$ ($(z)_\alpha$) используется для обозначения разметки этой вершины (семантической иерархии, представленной поддеревом CSR с корнем α). В формализмах семантических иерархий каждой иерархии соответствует единственная структура. Это позволяет не различать конфигурации и структуры конфигураций.

1.2. Домены конфигураций

Доменами отдельных операций над знаниями в формализмах семантических иерархий являются специальные классы конфигураций (структур конфигураций). Разнообразие таких классов включает все конфигурации $\Sigma = \{\Sigma(z) \,|\, z \in M\}$, семантические иерархии фиксированной глубины — Σ_k ($\Sigma_k = \{\Sigma(z) \,|\, z \in M \;\&\; d(z) = k\}$), где $k \in \{0, 1, \ldots\}$. Классы Σ_0 ($k = 0$) и Σ_1 ($k = 1$) образуют элементарные и простые знания. Примерами классов являются также последовательности (серии) и окрестности конфигураций [6].

Универсальная система классов операций над знаниями конструируется уточнением функциональных элементов разных областей математики как морфизмов знаний [6]. Структурные преобразования знаний моделируются операциями конфигураций в конфигурации ($Ins : \Sigma \times \Sigma \times I \to \Sigma$), удаление подконфигураций ($Del : \Sigma \times I \to \Sigma$), замена подконфигурации конфигурацией ($Exch : \Sigma \times \Sigma \times I \to \Sigma$), перестановка подконфигураций ($Perm : \Sigma \times I \times I \to \Sigma$) и извлечение конфигурации из конфигурации с помощью отображений трассирования ($Extr : \Sigma \times TR \to \Sigma$) [5,6]. В последнем выражении TR обозначает множество отображений трассирования на I. Эти отображения изотонно отображают I в I. Трассирования сохраняют порядок вершин для обхода дерева по алгоритму поиска в глубину. Инъективные трассирования определяют класс растяжений. Если $f \in TR$ и для $z \in M$ имеет место равенство $f(z, \xi) = z'$, то это означает, что ξ устанавливается соответствие вершин семантической иерархии z' вершинам семантической иерархии z [6]. Трассирования важны для моделирования сравнений знаний в *KRF*. Процессы синтеза знаний обычно заканчиваются извлечением знаний из синтезированных структур с помощью подходящих трассирований.

2. Синтез знаний в памяти ИС

Общие свойства структур памяти компонентов ИС адаптируются к процессам синтеза знаний в компонентах. Структура компонентов моделируется понятием измерения знаний [5]. Измерения относятся к параметрам знаний, определяемым конечными множествами. Значения измерений позволяют группировать знания с одинаковыми свойствами. Упорядоченные наборы значений отдельных измерений задают компоненты ИС. Множество всех таких наборов образует решетку компонентов ИС [4, 5].

Память является атрибутом компонента ИС. Она применяется для моделирования хранения и процессов обработки знаний. Каждой компоненте ИС соответствует формализм представления знаний. Этот формализм адаптирован к значениям измерений знаний для компонента. Общая структура памяти определяется бесконечным насыщенным бинарным деревом. Разметки вершин поддеревьев дерева задают структурные представления знаний в памяти.

2.1. Структуры памяти процессов синтеза знаний

Домены операций образуют алгоритмически перечислимый класс $\mathcal{D}$ перечислимых множеств конфигураций. Заданные ранее примеры доменов являются элементами $\mathcal{D}$. Конструирование доменов выполняют специальные операции. Эти операции позволяют определять домены с желаемыми свойствами как композиции доменов. Такими операциями являются прямая сумма и прямое произведение доменов ($\oplus$ и $\otimes$) [4]. Если $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$, то $B_1 \oplus B_2 = \{z_1 \oplus z_2 \mid z_1 \in B_1 \;\&$ $\&\; z_2 \in B_2\}$.

Схема применения этой операции к $z_1 \in B_1 \;\&\; z_2 \in B_2$ приведена на рис. 1. Символы α, β, γ, λ, σ, δ, используемые на следующих рисунках, обозначают вершины памяти. Другие обозначения означают знания (фрагменты знаний), размечающие вершины. Корневая вершина суммы $z_1 \oplus z_2$ допускает любую возможную связь между конфигурациями z_1 и z_2. Множество возможных отношений для пар конфигураций является параметром операции прямой суммы. Стандартный случай этой операции соответствует использованию пустого отношения, которое выполняется для любых двух конфигураций.

Если $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$, то

$$B_1 \otimes B_2 = \big\{z \mid \exists\, z_1 \in B_1(\forall\, \alpha \in D(z_1) \backslash O(z_1)\big(([z]_\alpha = [z_1]_\alpha) \;\& \\ \&\; \forall\, \alpha \in O(z_1)([z]_\alpha = [z_1]_\alpha \vee (z)_\alpha \in B_2)\big)\big\}.$$

Прямое произведение доменов состоит из конфигураций, составленных из элементов B_1 с заменой некоторых листьев в их структурах элементами B_2. Пример применения этой операции приведён на рис. 2.

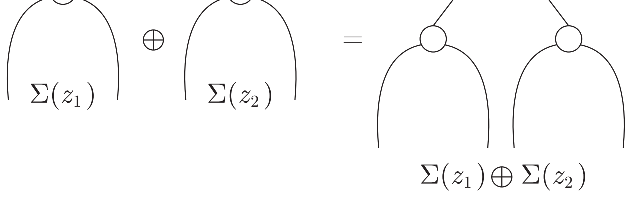


Рис. 1. Прямая сумма конфигураций

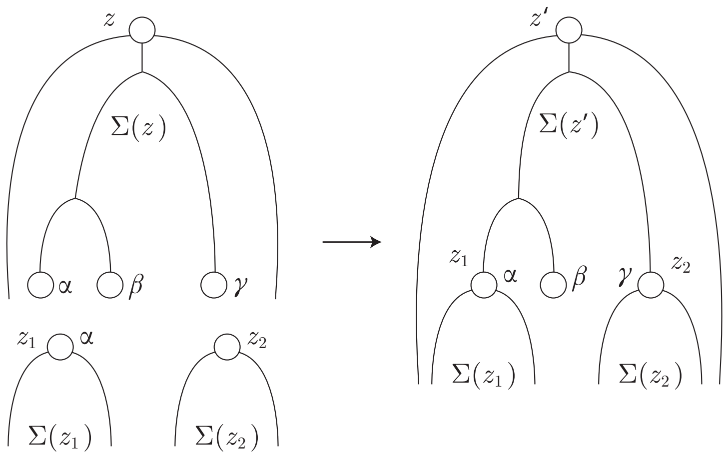


Рис. 2. Прямое произведение доменов

Конфигурация $z' \in B_1 \otimes B_2$ построена из $z \in B_1$, и $z_2 \in B_2$. Вершины α, β и γ являются листьями $\Sigma(z)$. Тогда $(z)_\alpha$ и $(z)_\gamma$ заменяются на $\Sigma(z_1)$ и $\Sigma(z_2)$. Свойства вершины β не изменяются. Реализации операции прямого произведения доменов используют дополнительные предикаты (P_1 и P_2) для выбора листьев и конфигураций для вставки. Конструкция $(\otimes, P_1, P_2)$ относится к языку синтеза знаний высокого уровня.

Комбинации доменов позволяют определять форматы областей памяти как структуры доменов. Это позволяет разделить память компонента на подобласти. Эти подобласти соответствуют структурам памяти, в которых реализуются операции и процессы обработки знаний в компонентах ИС.

Композиции доменов позволяют определить домены последовательностей (серий) элементарных и простых знаний $S \otimes M_0$ и $S \otimes M_1$. Последний класс используется для множеств простых знаний, составляющих содержание (онтологии) предметных областей. Подобные формулы памяти определяют последовательность окрестностей элементарных знаний разной глубины: $S \otimes O$, $(S \otimes O) \otimes O$, $\ldots$, $(\ldots(S \otimes O)\ldots) \otimes O$.

2.2. Потоки процессов обработки знаний

Другими элементами структуры ИС являются потоки знаний между компонентами и процессы обработки знаний внутри компонент. Диаграммы потоков знаний представляются в формате нагруженных ориентированных графов с вершинами, представляющими компоненты ИС, и ребрами, представляющими схемы передачи знаний между компонентами [4, 5]. Параметры потоков включают условия передачи знаний между компонентами ИС, и преобразования трансформации знаний из одного формализма в другой, а также форматы областей памяти для хранения передаваемых знаний. Пример потоков знаний в двумерной решетке компонентов ИС показан на рис. 3. Система компонентов ИС формируется для двух измерений с тремя возможными значениями в каждом измерении. Значения A (поверхностный), B (алгоритмический), C (когнитивный) и 3 (полностью структурированный), 2 (частично структурированный), 1 (неструктурированный) используются здесь для измерений абстрактности знаний и степени декомпозиции знаний. Четыре потока знаний с номерами 1–4 показаны на рис. 3.

Поток 1 реализует общую схему решения задач в предметной области. Этот поток проходит через компоненты, в которых исходное представление задачи декомпозируется и трансформируется во внутреннее представление (A1 – A2 – A3 – B3). Решение задач реализовано на алгоритмическом уровне (B3 – B2 – B1). Решение задачи начинается в B3, синтезируется в B2 и извлекается в компоненте B1. Последний этап потока знаний реализует трансляцию решения в формат предметной области A1. Другие потоки знаний (2–4) реализуют синтез метода решения задач (2), построение шаблонов решения задач (3) и запрос дополнительных данных при недостатке начальных данных (4).

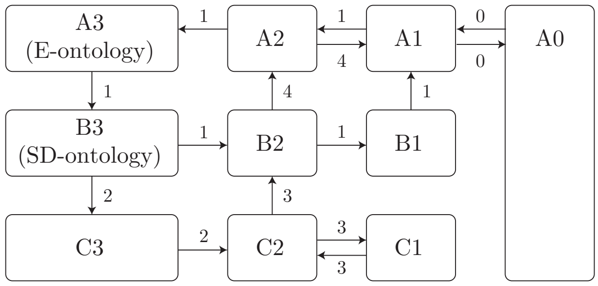


Рис. 3. Потоки знаний в ИС

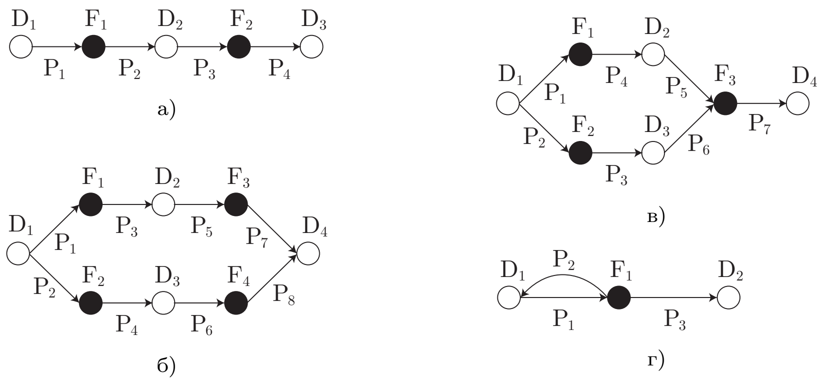


Рис. 4. Диаграммы процессов обработки знаний

Процессы обработки знаний представляются специальными диаграммами. Диаграмма представляет собой размеченный ориентированный двудольный граф. Вершины диаграммы размечают классы операций и домены операций. Ребра диаграмм размечают формулами условий прохождения рёбер. Набор типов диаграмм включает диаграммы для последовательных, параллельных, вариантных, циклических и иерархических структур процессов [9]. Примеры диаграмм приведены на рис. 4. Индексированные символы F_i, D_i и P_i обозначают классы операций, домены операций и предикаты условий.

Случай а) на рис. 4 показывает последовательную диаграмму. Случаи б), в) и г) иллюстрируют другие три типа диаграмм обработки знаний. Эти диаграммы аналогичны диаграммам морфизмов в теории категорий и допускают формальное исследование и различные приложения [9].

3. Регулярные области памяти

Структура памяти компонента ИС соответствует бесконечному бинарному дереву с левыми и правыми потомками у каждой вершины. Вершины дерева представлены элементами I. Последовательность $\alpha \in I$ определяет путь, который начинается в корне дерева и заканчивается в вершине $\alpha \in I$. Элементы последовательности 0 и 1 управляют выбором левых или правых потомков внутренних вершин пути. Знания хранятся в виде их структурированных представлений, размещённых в вершинах некоторого поддерева памяти. Если $\alpha \in I$, то $I_\alpha = \{\beta \mid \beta = \alpha\gamma \ \& \ \gamma \in I\}$.

Рассмотрим класс структур памяти, описываемых регулярными подмножествами I. Такие подмножества определяются регулярными выражениями в алфавите $\{0, 1\}$ (Пустая строка λ является регулярным выражением. Символ x, где $x \in \{0, 1\}$ является регулярным выражением. Если E_1 и E_2 являются регулярными выражениями, то строки $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cdot E_2$ и E_1^* являются регулярными выражениями). Каждое выражение определяет множество вершин, используемых для хранения структур конфигураций в памяти.

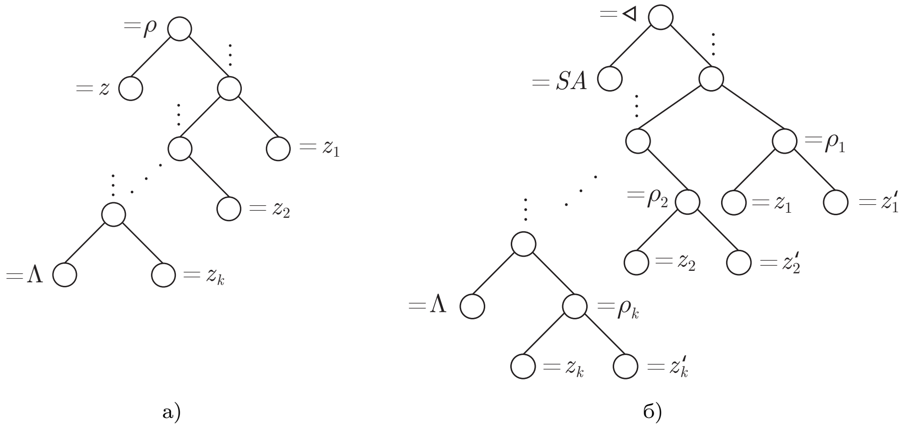


Рис. 5. Структура окрестностей знаний и серий простых знаний

Если E — регулярное выражение, то оно определяет $U(E) \subseteq I$, называемое регулярным множеством. Элементы этого множества используются в качестве листьев в *CSR* конфигураций. Множество конфигураций, определяемое E, обозначенным как $M(E)$. Чтобы определить это множество, нам понадобится понятие замыкания $B \subseteq I$: $[B] = \{\alpha \mid \exists\, \beta \in B(\alpha \subseteq \beta)\}$. Выражение $\alpha \subseteq \beta$ означает, что последовательность β начинается с последовательности α. Следующее выражение определяет $M(E)$

$$z \in M(E) \Leftrightarrow (z = \Lambda) \vee \forall\, \alpha \in O(z) \backslash U(E) \big([z]_\alpha = \Lambda \;\&\; \alpha = \beta\sigma \;\&\; |\,\sigma\,| = 1 \;\&\; \beta \in [O(z) \cap U(E)]\big).$$

Здесь определена структура конфигурации. Листья структуры принадлежат множеству $O(z) \cap$ $\cap\, U(E)$ или находятся на минимальном расстоянии от $[O(z) \cap U(E)]$. В таком случае листья размечены элементарным знанием Λ.

Для любого $z \in M(E)$ множество $U(E)$ определяет множество вершин, содержащее листья *CSR* z, допускающие маркировку непустыми конфигурациями. Следующие соотношения представляют свойства конфигураций из $M(E)$:

1) $\forall\, z \in M(E)(\alpha \in O(z) \;\&\; \alpha \notin U(E) \;\&\; I_\alpha \cap U(E) \neq \varnothing \to [z]_\alpha = \Lambda)$;
2) $\forall\, z \in M(E)(\alpha \in D(z) \;\&\; I_\alpha \cap U(E) = \varnothing \to [z]_\alpha = \Lambda)$;
3) $\forall\, \alpha \in [U(E)]\, \exists\, z \in M(E)(\alpha \in D(z))$.

Первое свойство относится к случаю, когда лист *CSR* конфигурации не принадлежит $U(E)$. Второе свойство означает, что для любого $z \in M(E)$ в $D(z)$ нет вершин, лежащих ниже вершин $U(E)$. Если $M(E) \in \mathcal{D}$, то последнее свойство означает, что $[U(E)]$ это минимальное подмножество I, достаточное для представления всех элементов $M(E)$.

На рис. 5 показаны два примера регулярных областей памяти для операций со знаниями. Общая структура окрестности глубины 1 элементарного знания z в отношении ρ представлена на рис. 5а. Вершина 10^*, отмеченная пустым знанием, соответствует завершению последовательности $z_1, \ldots, z_k$ — соседей z, для которых $z\rho z_i$, $i = 1, \ldots, k$. Область памяти знаний, представляющих все такие окрестности, задаёт выражение $[0 \cup 10^*1]$. Конфигурация, определяемая как последовательность простых знаний, приведена на рис. 5б. Разметка вершины как $=SA$ обозначает предметную область. Корень дерева отмечен отношением агрегирования содержания предметной области в формате последовательности простых знаний $z_i\rho_i z_i'$, $i = 1, \ldots, k$. Регулярное выражение $0 \cup 10^*1(0 \cup 1)$ определяет множество листьев в деревьях, которые представляют эти знания.

Пусть E это регулярное выражение и $\alpha \in I$. Определим множество $D(\alpha, E) = \{\beta \mid \exists\, \gamma \in$ $\in [U(E)](\beta = \alpha\gamma)\}$. Множество $D(\alpha, E)$ является регулярным и называется регулярной областью памяти. Если $|\,\alpha\,| > 0$ и $\alpha = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\})$, то множество $M(D(\alpha, E))$ состоит из конфигураций, которые выглядят так, как показано на рис. 6а.

Если $z \in M(D(\alpha, E))$, то путь, который начинается в λ и заканчивается в α составляют вершины из $D(z) \backslash O(z)$. Соседи этих вершин, лежащие в стороне, отмечены пустыми знания-

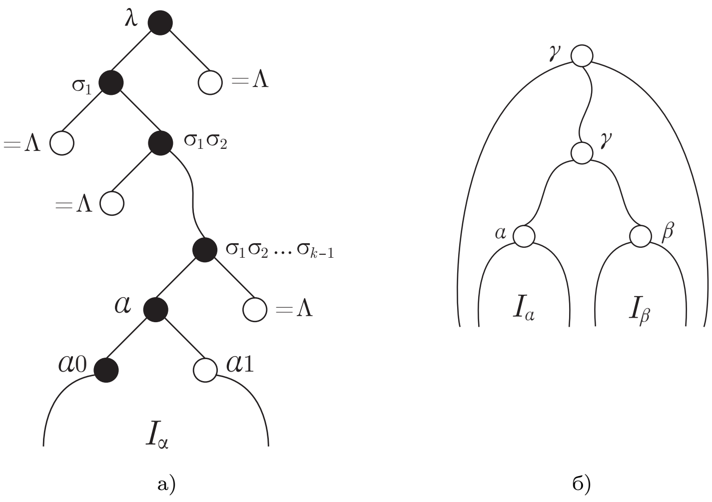


Рис. 6. Регулярные области памяти

ми (Λ). Если пустое знание означает неизвестный (неопределенный) объект или объект поиска, то I_α содержит текущее значение значения знания, представленное частью z. Тогда можно рассматривать часть z без этих неопределенных элементов. Это позволяет идентифицировать регулярные множества знаний $M(D(\alpha, E))$ и $M(E)$ при выполнении дополнительного условия $\forall\, \beta \in I(\beta \subset \alpha \to [z]_\alpha = \perp)$. Символ $\perp$ в последнем выражении означает пустое отношение на M. Это отношение связывает произвольные пары знаний минимальной зависимостью.

4. Топология регулярных областей памяти

Символ $\mathcal{E}$ далее обозначает множество регулярных выражений. Множество $[D(\alpha, E)]$, где $\alpha \in I$ и $E \in \mathcal{E}$, связано с открытым подмножеством множества I.

Пусть $\mathcal{B} = \{B \,|\, E \in \mathcal{E} \;\&\; \exists\, \alpha \in I(B = [U(E)] \cap I_\alpha\}$. Легко доказать, что множества $\varnothing$ и I принадлежат $\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{B}$ определяет топологическое пространство $\mathcal{T}_I = (I, X_I)$ с множеством X_I, образованным произвольными объединениями элементов $\mathcal{B}$. Это топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Если $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \not\subset \beta$ и $\beta \not\subset \alpha$ (см. рис. 6б), то $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2) = \varnothing$. Пусть $\alpha = \sigma_1 \ldots \sigma_m$, $\beta = \sigma_1 \ldots \sigma_m \sigma_{m+1} \ldots \sigma_n$. Следующие элементы $\mathcal{B}$ не пересекаются:

$$B_\alpha = [U(\sigma_1 \ldots \sigma_m \overline{\sigma_{m+1}}(\lambda \cup (0{,}1)*)] \cap I_\alpha.$$

$$B_\beta = [U(\sigma_1 \ldots \sigma_m \sigma_{m+1} \ldots \sigma_n(\lambda \cup (0{,}1)*)] \cap I_\beta.$$

Для B_α и B_β выполняются условия: $\alpha \in B_\alpha$ и $\beta \in B_\beta$. Это означает, что $\mathcal{T}_I = (I, X_I)$ это пространство Хаусдорфа.

Топология $\mathcal{T}_I$ позволяет определить ассоциированное топологическое пространство $\mathcal{T}_M = (M, X_M)$. Базой этого пространства является множество $\{M(D(\alpha, E)) \,|\, \alpha \in I \;\&\; E \in \mathcal{B}\}$. $\mathcal{T}_M$ не является пространством Хаусдорфа.

Пусть область памяти используется несколькими операциями для размещения результатов операций. Последовательное выполнение операций обработки знаний изменяет структуры семантических иерархий, размещаемых в этой области. В описании этой области необходимо использовать объединения и пересечения регулярных областей памяти. Рассмотрим примеры композиций памяти в процессах синтеза знаний. Они приведены на рис. 7.

На рисунке приведены два примера описания областей памяти для синтезированных структур знаний. Случай а) (рис. 7а) относится к замене данной $z \in M(E)$ листа $\alpha \in U(E)$ структурой для $z_1 \in M(E_1)$. Пусть E_2 — регулярное выражение для множества $U(E) \backslash \{\alpha\}$, тогда $E_2 \cup \alpha E_1$ — регулярное выражение, область памяти для конфигурации $Exch(z, z_1, \alpha)$. Описание этой области имеет вид $D(\lambda, E_2) \cup D(\alpha, E_1)$, где $D(\lambda, E_2), D(\alpha, E_1) \in X_I$.

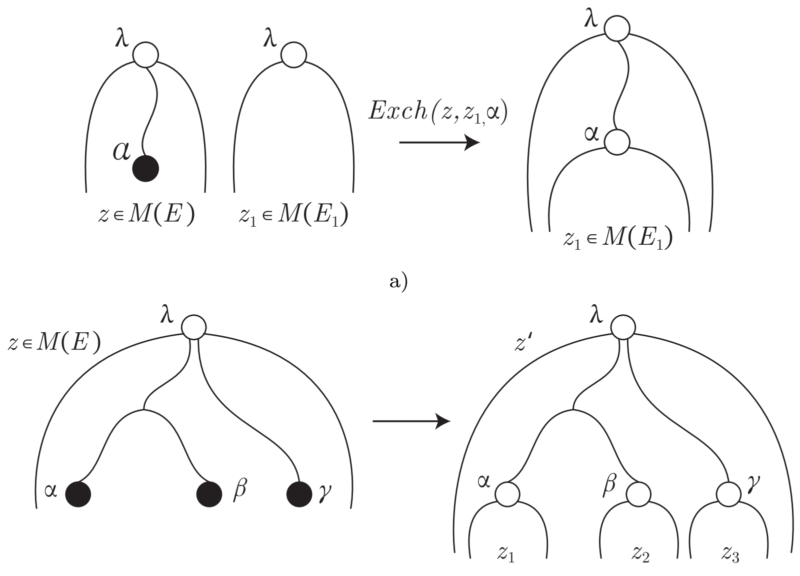


Рис. 7. Композиции областей памяти для доменов операций

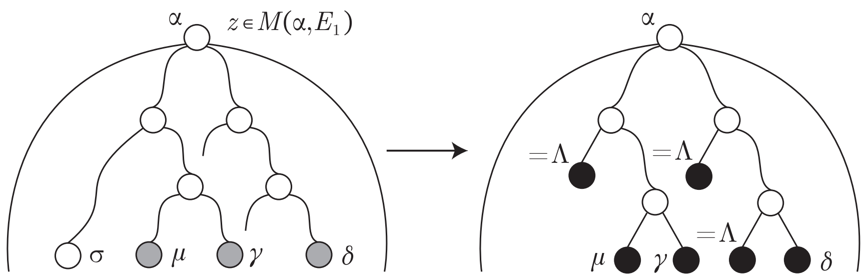


Рис. 8. Преобразование семантической иерархии для пересечения доменов

Случай б) (рис. 7б) представляет ситуацию, когда конфигурация синтезируется с использованием прямого произведения. Вершины α, β, $\gamma \in U(E)$ являются листьями в *CSR* $z \in M(E)$. Эта конфигурация трансформируется в новую путем замены вершин α, β и γ на $z_1, z_2, z_3 \in B$. Если B представляется $E_1 \in \mathcal{E}$, то выражение $E \cdot E_1$ соответствует области памяти для z'.

Рассмотрим применение операции пересечения открытых множеств X_I при синтезе знаний. Пусть $D(\alpha, E_1), D(\beta, E_2)$ — регулярные множества и $z \in M(\alpha, E_1)$. Тогда пересечение $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2)$ определяет множество, состоящее из общих элементов $D(\alpha, E_1)$ и $D(\beta, E_2)$. Пересечение $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2)$ связано с преобразованием z в новую конфигурацию.

Пример такого преобразования для $\alpha = \beta$ показан на рис. 8.

Конфигурация z удовлетворяет условиям:

$$\sigma, \mu, \lambda, \delta \in O(z), \mu, \lambda, \delta \in D(\alpha, E_1) \cap D(\alpha, E_2), \quad \sigma \notin D(\alpha, E_1) \cap D(\alpha, E_2).$$

Следующие правила задают спецификацию $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2)$:

1) Если $\alpha \subseteq \beta$ $(\beta = \alpha\kappa)$, то $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2) = \{\kappa\omega \mid \kappa\omega \in D(\alpha, E_1) \;\&\; \omega \in D(\beta, E_2)\}$.
2) Если $\alpha \not\subset \beta \;\&\; \beta \not\subset \alpha$, то $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2) = \varnothing$.
3) Если $\beta \subset \alpha$ $(\alpha = \beta\kappa)$, то $D(\alpha, E_1) \cap D(\beta, E_2) = \{\kappa\omega \mid \kappa\omega \in D(\beta, E_2) \;\&\; \omega \in D(\alpha, E_1)\}$.

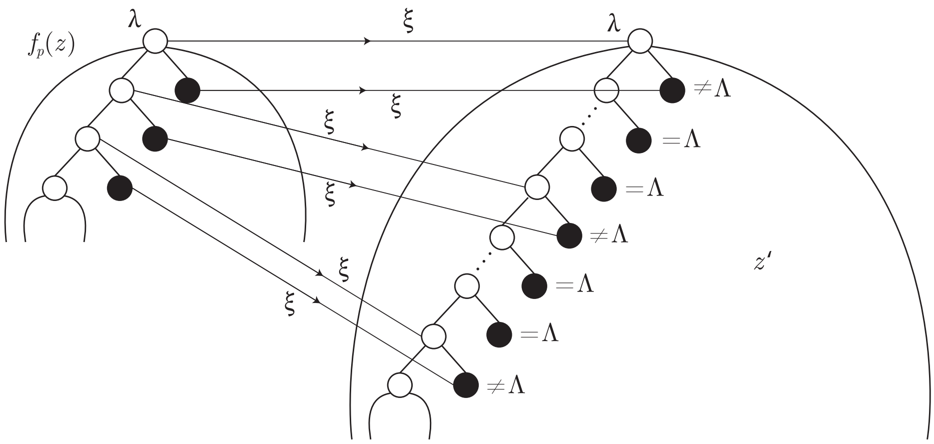


Рис. 9. Сжатие конфигурации после удаления фрагментов

5. Трассирования знаний в регулярных областях памяти

Пересечение областей памяти удобно для моделирования извлечения знаний из знаний. Результаты извлекаются удалением несущественных частей синтезированных знаний. Каждая такая часть связанна с областью памяти $I_\alpha \subseteq I$, которая удовлетворяет условию $I_\alpha \cap U(E) = \varnothing$. Выражение E определяет область памяти, в которой содержатся результаты процесса синтеза. Пусть $z \in M(E_1)$ — синтезированная конфигурация и E_2 — выражение, задающее фрагмент z. После замены фрагментов структуры z за пределами области $D(\lambda, E_1) \cap D(\lambda, E_2)$ на Λ конфигурация z превращается в объект z'.

Затем выполняется сжатие z' с помощью трассирования ξ:

$$\xi(\lambda) = \lambda;$$

$$\forall\, \alpha \in I, \sigma \in \{0{,}1\} \left(\xi(\alpha\sigma) = \begin{cases} \xi(\alpha)\beta, \beta = \delta_1\delta_2\ldots\delta_k \ \&\ \delta_1 = \\ \qquad = \sigma \ \&\ \xi(\alpha)\beta \in D(z') \backslash O(z') \ \&\ \forall\, j \in \{1, \ldots, k-1\}; \\ ([z']_{\xi(\alpha)\delta_1\delta_2\ldots\delta_{j-1}\bar{\delta}_j} = \Lambda)(\&\ [z']_{\xi(\alpha)\delta_1\delta_2\ldots\delta_j} \neq \Lambda)\ \& \\ \qquad \&\ ([z']_{\xi(\alpha)\delta_1\delta_2\ldots\delta_k 0} \neq \Lambda)\ \&\ ([z']_{\xi(\alpha)\delta_1\delta_2\ldots\delta_k 1} \neq \Lambda); \\ \xi(\alpha)\sigma, \text{ иначе.} \end{cases} \right).$$

Пусть $T(\xi, z)$ — размеченное бинарное дерево, построенное из вершин $D(z') \cap \xi(I)$. Следующее выражение определяет p-эндоморфизм $f_p : M \to M$.

$$f_p(z) = \begin{cases} T(\xi, z), T(\xi, z) \in \Sigma; \\ z, \text{ иначе.} \end{cases}$$

На рис. 9 показано, как объект z' трансформируется в значение $f_p(z)$.

Извлечение осуществляется путем удаления лишних частей z'. Удаляемые части z распознаются как внешние по отношению к памяти, задаваемой E. Вершины серого цвета представляют листья структуры знаний. Белые вершины $f_p(z)$ являются внутренними в представлении z'. Некоторые листья $O(z')$ отмечены пустыми знаниями. Они соответствуют удаляемым поддеревьям $D(z)$. Отображение ξ пропускает эти вершины.

Заключения и выводы

Применение специальных понятий расширяет возможности описания процессов синтеза знаний. Описание подобластей памяти определяет форматы размещаемых знаний при реализации целей системы. Эффективность регулярных форматов связана с доменами операций обработки знаний. Свойство регулярности также обеспечивает эффективность обработки структур синтезируемых знаний.

Операции усечения и сжатия структур конфигурации с помощью регулярных выражений основаны на формате отображений $f : M \times E \to M$ ($f : \Sigma \times E \to \Sigma$). Они определяют новый класс морфизмов знаний, удобный для исследования структур памяти и процессов мышления для формализации понятия когнитома [9].

Литература [References]

1. Bloom, B.S., Engelhart, M.D., Furst, E.J., Hill, W.H., Krathwohl, D.R., *Taxonomy of educational objectives: The classification taxonomy of educational goals. Handbook 1: Cognitive domain.* David McKay, New York, 1956.
2. Stanovich, K.E., *Rationality and the reactive mind.* Oxford Univ. Press, 2010.
3. Burgin, M., *Theory of knowledge: structures and processes.* World Scientific Series in Information Studies, Vol. 5, 2017. DOI 10.1142/8893
4. Костенко, К.И., Инварианты ядра фундаментальной модели интеллектуальной системы. *Программная инженерия*, 2021, т. 12, № 3, с. 157–168. [Kostenko, K.I., Invariants of the core of the fundamental model of an intelligent system. *Programmnaya inzheneriya = Software Engineering*, 2021, vol. 12, no. 3, pp. 157–168. (in Russian)] DOI 10.17587/prin.12.157-168
5. Kostenko, K., Knowledge flows processes at multidimensional intelligent systems. *Russian Advances in Artificial Intelligence: selected contributions to the Russian Conference on Artificial intelligence (RCAI 2020)*, October 10–16, 2020, Moscow, Russia, vol. 2648, pp. 74–84. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2648/paper6.pdf
6. Костенко, К.И., Операции когнитивного синтеза формализованных знаний. *Программная инженерия*, 2018, т. 9, № 4, с. 174–184. [Kostenko, K.I., Operations of cognitive synthesis of formalized knowledge. *Programmnaya inzheneriya = Software Engineering*, 2018, vol. 9, no. 4, pp. 174–184. (in Russian)] DOI 10.17587/prin.9.174-184
7. Wooldridge, M., Intelligent Agents. In Weiss G. (ed.), *Multiagent Systems (A Modern Approach to Distributed Modern Approach to Artificial Intelligence).* The MIT Press, 1999, pp. 27–122.
8. Mesarovic, M., Takahara, Y., *General Systems Theory: Mathematical Foundations (Mathematics in Science and Engineering).* Elsevier, 1975.
9. Анохин, К.В., Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания. *Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова*, 2021, т. 71, № 1, с. 39–71. [Anokhin, K.V., Cognit: in search of a fundamental neuroscientific theory of consciousness. *Zhurnal vysshey nervnoy deyatel'nosti im. I.P. Pavlova = I.P. Pavlov's Journal of Higher Nervous Activity*, 2021, vol. 71, no. 1, pp. 39–71. (in Russian)] DOI 10.31857/S0044467721010032
10. Костенко, К.И., Диаграммы процессов и правила синтеза знаний из элементов онтологий. *VIII Международная научная конференция «Знания-Онтологии-Теории»*, Новосибирск, 8-12 ноября 2021, с. 131–140. [Kostenko, K.I., Process diagrams and knowledge synthesis rules from ontology elements. *VIII Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya "Znaniya-Ontologii-Teorii" = VIII International Scientific Conference "Knowledge-Ontology-Theory"*, Novosibirsk, November 8-12, 2021, pp. 131–140. (in Russian)]

УДК 519.72+004 DOI 10.31429/vestnik-19-4-20-26

Разработка математических моделей криптосистем на основе NP-полных задач, содержащих диофантовы трудности

В. О. Осипян✉, **Э. Т. Дж. Альгариб**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Осипян Валерий Осипович; ORCID 0000-0001-6558-7998; e-mail: v.osippyan@gmail.com

Аннотация. В рукописи задействована новая область NP-полных задач из диофантова анализа: многостепенные системы диофантовых уравнений типа Тарри–Эскотта. Приводятся математические модели криптосистем на основе известных NP-полных задач с помощью универсального диофантова языка. Описанные модели демонстрируют потенциал применения диофантовых уравнений для разработки СЗИ с высокой степенью надёжностью. Разработана математическая модель алфавитной системы защиты информации, обобщающая принцип построения криптосистем с открытым ключом — так называемую дисимметричную триграммную криптосистему. В ней прямое и обратное преобразования реализовывается по заданному алгоритму на основе многопараметрического решения многостепенной системы диофантовых уравнений.

Ключевые слова: NP-полная задача, многостепенная система диофантовых уравнений, генерация ключей, симметричная (дисимметричная) криптосистема, параметрическое решение, диофантовы трудности.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Осипян В. О., Альгариб Э. Т. Дж. Разработка математических моделей криптосистем на основе NP-полных задач, содержащих диофантовы трудности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 20–26. DOI 10.31429/vestnik-19-4-20-26

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 21 ноября 2022 г. Принято 22 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Cryptosystems Mathematical Models Design Based on NP-complete Problems Containing Diophantine Difficulties

V. O. Osipyan✉, **E. T. J. Al Gharib**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Valeriy O. Osipyan; ORCID 0000-0001-6558-7998; e-mail: v.osippyan@gmail.com

Abstract. A new area of NP-complete problems from Diophantine analysis is involved in the manuscript: multistep systems of Tarry-Escott type Diophantine equations. Mathematical models of cryptosystems based on known NP-complete problems using a universal Diophantine language are presented. The described models demonstrate the potential of using Diophantine equations for the development of SPI with a high degree of reliability. A mathematical model of an alphabetic information security system has been developed that generalizes the principle of constructing cryptosystems with a public key – the so-called dissymmetric trigram cryptosystem. In it, forward and reverse transformations are implemented according to a given algorithm based on a multiparametric solution of a multi-stage system of Diophantine equations.

Keywords: NP-complete problem, multi-degree system of Diophantine equations, key generation, symmetric (dissymmetric) cryptosystem, parametric solution, Diophantine difficulties.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Osipyan, V. O., Al Gharib, E. T. J., Cryptosystems mathematical models design based on NP-complete problems containing Diophantine difficulties. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 20–26. DOI 10.31429/vestnik-19-4-20-26

Received 15 November 2022. Revised 21 November 2022. Accepted 22 November 2022. Published 30 November 2022.
The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

В условиях стремительного развития сетевых и телекоммуникационных технологий, включая технологии мобильной связи, роботизированных систем, интернета вещей, цифровой экономики и технологии распределенного реестра, актуальными становятся задачи теории и практики защиты информации на всех уровнях её хранения, обработки и передачи по открытым каналам связи. Указанный факт стимулируют научные исследования, направленные на совершенствование существующих программно-аппаратных средств обеспечения информационной безопасности и разработку новых систем защиты информации (СЗИ). Поэтому важной фундаментальной научной проблемой исследования является разработка теоретико-числовых методов и алгоритмов, позволяющих построить стойкую и эффективную (с практической точки зрения) математическую модель СЗИ, основанных на новых теоретических результатах.

На основе теоретических истоков построения математических моделей эффективных СЗИ или криптосистем исходят из необходимости использования сложных математических *NP*-полных задач, решение которых потребует от нелегального пользователя больших затрат машинного времени и ресурсов. К таким задачам, следуя К. Шеннону [1], относятся задачи, содержащие диофантовы трудности, позволяющие смоделировать более стойкие математические модели СЗИ.

В работе задействована новая область *NP*-полных задач из диофантова анализа: задача параметрического решения многостепенных систем диофантовых уравнений (МСДУ) типа Тарри – Эскотта [2–4]. Особенность этих МСДУ заключается в том, что неизвестен алгоритм их параметрического решения — на основе отрицательного решения 10-й проблемы Гильберта [3].

Впервые предлагается математическая модель триграммной дисимметричной криптосистемы (ТДК), содержащих диофантовы трудности, обобщающий принцип построения криптосистем с открытым ключом [5, 6].

Описываемые в данной статье математические модели демонстрируют потенциал применения универсального диофантова языка для разработки криптосистем с высокой степенью надёжности.

1. Описание некоторых NP-полных задач с помощью диофантовых уравнений

Как известно [3], под алгебраическим диофантовым уравнением (ДУ) понимают полиномиальное уравнение
$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \tag{1.1}$$
коэффициенты которого суть целые числа, и решения требуется найти тоже в целых или целых неотрицательных числах. Задача решения ДУ (1.1) или систем таких уравнений заключается в поиске целочисленных решений или доказательства того, что таких решений не существуют. Как правило, решения уравнения (1.1) задаются в виде тождества, содержащего один, два или более целочисленных параметров [2, 4].

Так, например, полиномиальное диофантово уравнение $47x - 53y = 1$ имеет следующее однопараметрическое решение: $x = 44 + 53n$, $y = 39 + 47n$, где n — целый числовой параметр, и имеет место тождество: $47(44 + 53n) - 53(39 + 47n) = 1$, что выполняется для счётного числа значений n.

Общеизвестное однородное ДУ второй степени
$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1.2}$$
имеет следующее двупараметрическое решение ($a, b \in Z$ — параметры) в виде пифагоровых троек:
$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2.$$

Более того, тождество

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

показывает, что однородное ДУ (1.2) имеет бесконечно много решений.

Для практических приложений можно сузить множество числовых значений и для коэффициентов, и для переменных, например, до множества $Z_k = \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $k \geqslant 2$ — кольца вычетов по модулю k.

Рассмотрим некоторые трудно вычислимые проблемы и покажем, что каждую такую проблему можно смоделировать с помощью некоторого ДУ вида (1.1). При этом решение такого уравнения позволяет устанавливать шифр соответствующей криптосистемы.

Проблема решения нестандартного аддитивного рюкзака [5]. Пусть имеются множество (рюкзак) $A = \{a_1 a_2, \dots, a_n\}$, $a_i \in N$, $i = 1, \dots, n$ и некоторое натуральное число c. Требуется установить существуют ли для заданного c такие значения $x_i \in Z_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, для которых выполняется линейное ДУ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \text{c}, \tag{1.3}$$

что соответствует проблеме решения нестандартного аддитивного рюкзака.

Проблема решения нестандартного мультипликативного рюкзака [7]. Аналогично можно рассмотреть проблему решения нестандартного мультипликативного рюкзака на основе следующего экспоненциального ДУ:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{x_i} = \text{c}. \tag{1.4}$$

Отметим, что указанные равенства (1.3) и (1.4) являются диофантовыми уравнениями над множеством Z_k при известных c(шифр) и $a_i \in N$, $i = 1, \dots, n$.

Проблема факторизации натуральных чисел [8]. Для данного составного числа n найти натуральные числа $p, q \geqslant 2$, такие, что $n = p * q$. Отметим, что эта задача имеет большую вычислительную сложность, на основе которой построен один из самых популярных методов криптографии с открытым ключом — метод RSA.

Согласно теореме Лагранжа [8] каждое натуральное число есть сумма не более чем четырёх квадратов, и этот факт равносилен разрешимости ДУ в целых числах

$$n = (x_1 a_1^2 + x_2 a_2^2 + x_3 a_3^2 + x_4 a_4^2)(y_1 b_1^2 + y_2 b_2^2 + y_3 b_3^2 + y_4 b_4^2), \quad a, b \in N_0, \quad x_i, y_j \in \{0, 1\}.$$

Проблема расшифрования по алгоритму RSA [8]. Эта проблема заключается в нахождении вычета $x \in Z_k$, кодирующего исходный текст по его шифру $c = x^e (\operatorname{mod} n)$, что равносильно разрешимости ДУ

$$x^e = c + n * y$$

относительно переменных x и y при известных c и n.

Проблема дискретного логарифмирования [8].

Определение. Пусть $GF(p)$ — простое поле Галуа порядка p и $a, c \in GF(p)$. Любое целое число x, для которого $a^x = c (\operatorname{mod} p)$, называется дискретным логарифмом c по основанию a, что записывается как $x = \log_a c (\operatorname{mod} p)$ или

$$x = \log_a c + p * y.$$

Из этого определения следует следующее ДУ относительно переменных x и y:

$$a^x = c + p * y.$$

Заметим, что вычисление дискретного логарифма в $GF(p)$ является трудно вычислимой задачей, когда $p - 1$ имеет большой простой множитель.

Проблема квадратичного вычета в простом поле Галуа $GF(p)$ [8]. Эта трудно вычислимая проблема сводится к разрешимости ДУ относительно переменных x и y при известных a и p:

$$x^2 = a + p * y.$$

Можно рассмотреть и другие, не менее интересные, NP-полные задачи, которые также сводятся либо к ДУ, либо к системе ДУ.

2. Математическое моделирование дисимметричной триграммной криптосистемы, содержащей диофантовы трудности

В предыдущем пункте были рассмотрены различные криптосистемы и приведены соответствующие им ДУ, что можно представить в виде следующего, более общего, диофантово уравнения

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где D — целозначная функция с целозначными аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Особый интерес в данной работе будут представлять многостепенные системы диофантовых уравнений (МСДУ) размерности m порядка (или степени) n вида

$$X_1^k + X_2^k + \ldots + X_m^k = Y_1^k + Y_2^k + \ldots Y_m^k, \quad k = 1, \ldots, n$$

или в компактной записи

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \stackrel{n}{=} Y_1, Y_2, \ldots, Y_m. \tag{2.1}$$

Для краткости эту запись представим ещё в виде

$$X \stackrel{n}{=} Y,$$

где $X = X_1, X_2, \ldots, X_m$, $Y = Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, а её многопараметрическое решение — в виде $A \stackrel{n}{=} B$, где $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$, $B = b_1, b_2, \ldots, b_m$, где a_i, b_i — целочисленные параметры.

Определение. Два упорядоченных набора чисел или параметров

$$A = \mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_m \text{ и } B = b_1, b_2, \ldots, b_m$$

размерности m равносильны со степенью n, если они удовлетворяют МСДУ

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \stackrel{n}{=} Y_1, Y_2, \ldots, Y_m,$$

то есть выполняются равенства для всех значений 1, 2, . . . , n,

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \stackrel{n}{=} b_1, b_2, \ldots, b_m.$$

Так, например, следующие двупараметрические упорядоченные наборы, размерности $m = 5$ равносильны между собой и имеют степень $n = 4$:

$$19a + b,\ 15a + 5b,\ 11a + 9b,\ 3a + 17b,\ 2a + 18b \stackrel{4}{=} a + 19b,\ 5a + 15b,\ 9a + 11b,\ 17a + 3b,\ 18a + 2b.$$

Из этих параметрических равносильностей можно получить сколь угодно много равносильных целых числовых наборов размерности $m = 5$ степени $n = 4$,придав параметрам a и b различные целые или натуральные числовые значения.

Более того, для заданных допустимых значений mи n имеет место следующие утверждения [6].

Теорема 1. Из равносильности двух целых числовых упорядоченных наборов (или наборов упорядоченных параметров) размерности m степени n

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \stackrel{n}{=} b_1, b_2, \ldots b_m$$

следует равносильность также следующих наборов (или наборов упорядоченных параметров)

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, -b_1, -b_2, \ldots, -b_{m-1} \stackrel{n}{=} b_m$$

или в более общем случае для любого натурального $i \in 1, \ldots, m$

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, -b_1, -b_2, \ldots, -b_{l-1} \stackrel{n}{=} b_l, b_{l+1}, \ldots, b_m.$$

Для удобства перепишем эту теорему ещё в виде

Теорема 1. Если $a_1, a_2, \ldots, a_m \stackrel{n}{=} b_1, b_2, \ldots, b_m$, то для любого натурального числа $i \in 1, \ldots, m$ имеет место соотношение $A, -B^i \stackrel{n}{=} b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_m$.

Как уже было отмечено выше, особенность МСДУ заключается в том, что неизвестны общие не переборные методы их решения для любых m и n [3]. В то же время для отдельных значений m и n они допускают параметризацию по одному, двум и более параметрам, из которых можно получить конкретные решения в целых или натуральных числах $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ таких, что выполняются равенства [7]

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \stackrel{n}{=} b_1, b_2, \ldots, b_m. \tag{2.2}$$

Заметим, что по найденному решению (2.2) МСДУ восстановить числовые значения её параметров за приемлемое время не представляется возможным. Кроме того, на практике вычисления производятся для достаточно больших натуральных чисел, так что стандартные средства вычислений зачастую неприменимы. Поэтому для разработки эффективной СЗИ на основе параметрических решений МСДУ необходимо в зависимости от размерности m и степени n учитывать либо сложность решения системы (2.1), либо сами решения, либо и то, и другое одновременно. Необходимые определения и факты можно найти в работе [9].

Как известно [9], математическую модель произвольной алфавитной криптосистемы можно представить в виде следующего кортежа:

$$\sum_0 = \left\langle M^*, Q, C^*, E(m), D(c) | V(E(m), D(c)) \right\rangle,$$

где M^* – множество всех сообщений $m = m_1 m_2 \ldots m_k$ (открытых текстов) над алфавитом M; Q — множество всех числовых эквивалентов элементарных сообщений m_i (в частности буквы или конкатенация букв из алфавита M); C^* — множество всех криптограмм $c = c_1 c_2 \ldots c_k$ над алфавитом C; $E(m)$ — алгоритм прямого преобразования открытого текста $m = m_1 m_2 \ldots m_k$; $D(c)$ — алгоритм обратного преобразования криптограммы $c = c_1 c_2 \ldots c_k$; $V(E(m), D(c))$ — связь однозначности между алгоритмами $E(m)$ и $D(c)$.

Приведём математическую модель алфавитной дисимметричной криптосистемы (ДК), элементарными сообщениями которой суть триграммы: $m_{2i-1} m_{2i} m_{2i+1}$. Пусть для определённости открытый текст $m = m_1 m_2 \ldots m_k$ состоит из заглавных букв английского 27-буквенного алфавита от A до Z и пробела со множеством всех числовых эквивалентов $q \in Q = \{0, 1, \ldots, 26\}$ элементарных сообщений $m_i \in M^*$.

Числовой эквивалент $\tilde{q}_i$ триграммы $m_{2i-1} m_{2i} m_{2i+1}$ сообщения m определим как трёхзначное число по основанию 27 (предварительно исходное сообщение m разбиваем на триграммы с добавлением пробелов таким образом, чтобы каждый блок содержал три буквы)

$$\tilde{q}_i = 27^2 q_{2i-1} + 27 q_{2i} + q_{2i+1} \in \{0, 1, \ldots, 19682\}.$$

Допустим, определены следующие равносильные векторы:

$$A^l = (a_1, \ldots, a_l), \quad B^l = (b_1, \ldots, b_l), \quad A^l \stackrel{k}{=} B^l, \quad 1 < k < l.$$

На их основе построим параметрическое решение МСДУ (2.1) с параметрами a и b по следующему правилу:

$$v_i = \begin{cases} a_i a + b_i b, & i = 1, \ldots, l, \\ b_{i-l} a + a_{i-l} b, & i = (l+1), \ldots, 2l. \end{cases}$$

С помощью этого параметрического решения определим функции прямого преобразования $C_L(ab)$ открытого текста m и обратного преобразования $C_R(ab)$ криптограммы c, считая, что a — триграммный шифр, а b — закрытый ключ: для фиксированной степени d, $1 \leqslant d \leqslant k$ генерируем функции прямого и обратного преобразований как

$$E\left(m_{2i-1} m_{2i} m_{2i+1}\right) = C_L(a,b) = v_1^d + v_2^d + \ldots + v_r^d = c_i, \quad r < 2l,$$

$$C_R(a,b) = v_{r+1}^d + v_{r+2}^d + \ldots + v_{2l}^d = c_i,$$

причём $D(c_i)$ — решение уравнения $v_{r+1}^d + v_{r+2}^d + \ldots + v_{2l}^d = c_i$, $1 < d \leqslant k$.

Количество слагаемых в правой части функции обратного преобразования $C_R(a,b)$ можно довести до минимума, например, до одного слагаемого (см. теорему 1): $C_R(a,b) = v_{2l}^d$, $1 < d \leqslant k$.

Заключение

Для практических приложений следует выбрать подходящую МСДУ и соответствующие им соотношения (см. теорему 1). В рассмотренном выше примере ТДК выбран простой вариант функции прямого преобразования, а для практических приложений можно предложить сложный алгоритм для выбора указанной функции.

В рукописи разработана математическая модель триграммной ДК, содержащих диофантовы трудности. Как следует из сказанного выше, для определения числовых эквивалентов элементарных сообщений легальный пользователь решает простое уравнение заданной степени, а нелегальный — многовариативную МСДУ заданной размерности и порядка.

Решение поставленных в рукописи задач позволит получить научно-технический задел для разработки и дальнейшей реализации стойких и эффективных математических моделей алфавитных СЗИ, а также дать новый импульс в развитии математического моделирования криптосистем, содержащих диофантовы трудности.

Литература [References]

1. Shannon, C., Communication theory of secrecy systems. *Bell System Techn. J.*, 1949, vol. 28, iss. 4., pp. 656–715.
2. Dorwart, H.L., Brown, O.E., The Tarry-Escott problem. *Amer. Math. Monthly*, 1937, vol. 44, iss. 10, pp. 613–626.
3. Матиясевич, Ю.В., *Десятая проблема Гильберта.* Наука, Москва, 1993. [Matiyasevich, Yu.V., *Desyataya problema Gil'berta = Hilbert's tenth problem.* Nauka, Moscow, 1993.]
4. Carmichael, R.D., *The theory of numbers and diophantine analysis.* New York, 1959.
5. Саломаа, А., *Криптография с открытым ключом.* Мир, Москва, 1995. [Salomaa, A., *Kriptografiya s otkrytym klyuchom = Public key cryptography.* Mir, Moscow, 1995. (in Russian)]
6. Осипян, В.О., Разработка математической модели дисимметричной биграммной криптосистемы на основе параметрического решения многостепенной системы диофантовых уравнений. *Сетевой научный журнал «Инженерный вестник Дона»*, 2020, № 6. [Osipyan, V.O., Development of a mathematical model of a dissymmetric bigram cryptosystem based on the parametric solution of a multi-degree system of Diophantine equations. *Setevoy nauchnyy zhurnal "Inzhenernyy vestnik Dona" = Web Scientific Journal "Engineering Bulletin of the Don"*, 2020, no. 6. (in Russian)] URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N6y2020/6534
7. Осипян, В.О., *Разработка математических моделей систем защиты информации, содержащих диофантовы трудности.* Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 2021. [Osipyan, V.O., *Razrabotka matematicheskikh modeley sistem zashchity informatsii, soderzhashchikh diofantovy trudnosti = Development of mathematical models of information security systems containing Diophantine difficulties.* Kuban State University, Krasnodar, 2021. (in Russian)]

8. Koblitz, N.A., *Course in number theory and cryptography*. Springer-Verlag, New York, 1987.
9. Осипян, В.О., Литвинов, К.И., Жук, А.С., Разработка математических моделей систем защиты информации на основе многостепенных систем диофантовых уравнений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2019, т. 16, № 3, с. 6–15. [Osipyan, V.O., Litvinov, K.I., Zhuk, A.S., Development of mathematical models of information security systems based on multi-degree systems of Diophantine equations. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 6–15. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-16-3-6-15

УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-27-36

О преобразованиях систем интегральных уравнений для многокомпонентной наночастицы, лежащей на деформируемом слое в условиях вибрации

В. А. Бабешко✉, **О. В. Евдокимова**, **О. М. Бабешко**, **М. В. Зарецкая**, **И. С. Телятников**, **Д. А. Снетков**, **О. А. Гришко**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Владимир Андреевич; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. В статье путем применения универсального метода моделирования осуществляется сведение систем интегральных уравнений Винера–Хопфа к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа конечного порядка, возникают в смешанных задачах механики сплошных сред для моделирования многокомпонентных наночастиц на слоистой деформируемой среде конечной толщины. Осуществляются преобразования Галеркина, которые оказываются возможными в связи с тем, что матрица-функция преобразования ядра системы интегральных уравнений имеет мероморфные элементы. В результате преобразований система интегральных уравнений сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, методы исследования и решения которых разработаны авторами и будут применены к построенным бесконечным системам алгебраических уравнений.

Ключевые слова: многокомпонентные наночастицы, системы интегральных уравнений, преобразования Галеркина.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00128).

Цитирование: Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Телятников И. С., Снетков Д. А., Гришко О. А. О преобразованиях систем интегральных уравнений для многокомпонентной наночастицы, лежащей на деформируемом слое в условиях вибрации // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 27–36. DOI 10.31429/vestnik-19-4-27-36

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 20 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On Transformations of Systems of Integral Equations for a Multicomponent Nano Particle Lying on a Deformable Layer Under Vibration Conditions

V. A. Babeshko✉, **O. V. Evdokimova**, **O. M. Babeshko**, **M. V. Zaretskaya**, **I. S. Telyatnikov**, **D. A. Snetkov**, **O. A. Grishko**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Vladimir A. Babeshko; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. In the work, by applying a universal modeling method, the systems of Wiener-Hopf integral equations are reduced to infinite systems of linear algebraic equations. Systems of Wiener-Hopf integral equations of finite order arise in mixed problems of continuum mechanics for modeling multicomponent nanoparticles on a layered deformable medium of finite thickness. Galerkin transformations are carried out, which turn out to be possible due to the fact that the matrix-function of the transformation of the kernel of the system of integral equations has meromorphic elements. As a result of transformations, the system of integral equations is reduced to infinite systems of linear algebraic equations, the research methods and solutions of which are developed by the authors and will be applied to the constructed infinite systems of algebraic equations.

Keywords: multicomponent nanoparticles, systems of integral equations, Galerkin transformations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00128).

Cite as: Babeshko, V. A., Evdokimova, O. V., Babeshko, O. M., Zaretskaya, M. V., Telyatnikov, I. S., Snetkov, D. A., Grishko, O. A., On transformations of systems of integral equations for a multicomponent nano particle lying on a deformable layer under vibration conditions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 27–36. DOI 10.31429/vestnik-19-4-27-36

Received 15 November 2022. Revised 20 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

Исследование в работе нацелено на выделение механической части процессов самоорганизации и самосборки наночастиц, лежащих на деформируемом основании. Известно, что наночастицы в иерархии строения вещества занимают промежуточное место между квантово-механическими объектами, молекулами и макромиром. Искусственно выращиваемые наноматериалы, как правило, значительно отличается своими свойствами от природных материалов естественного происхождения. Существуют определенные теории конденсированного вещества, описывающие свойства наноматериалов, вводятся понятия смоченных наночастиц с другими характеристиками, с целью выявления наиболее адекватного описания их поведения в причинно-следственном аспекте. Описание поведения многокомпонентных наночастиц на деформируемом основании, как объектов механики, путем решения смешанных задач теории упругости, сводится к решению систем интегральных уравнений Винера–Хопфа. Ядром систем являются матрицы-функции, преобразования Фурье их элементов являются мероморфными функциями.

Многокомпонентность выдвигает требования исследования и решения систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, причем порядок систем не является определенным. Авторами проведен глубокий анализ различных подходов к решению систем таких уравнений. Ниже приводится их обзор.

Исследованию уравнений Винера–Хопфа и связанных с ним функциональных уравнений посвящено огромное количество работ в связи с многоцелевыми возможностями этого уравнения. Ниже дается лишь ограниченный обзор их применений, который только возрастает со временем. Аналогично существует и обилие методов аналитического, полуаналитического или численного их решения. Точные решения интегральных уравнений и их систем получаются лишь для ограниченного типа ядер и областей задания уравнений. системы интегральных уравнений Винера–Хопфа для наиболее часто встречающихся случаев, когда элементами преобразования Фурье матричного ядра являются мероморфные функции с бесконечными числами нулей и полюсов. В целом системы интегральных уравнений Винера–Хопфа играют важную роль в самых разных областях практики. Так, эти уравнения возникают в проблемах прочности и разрушения [1–4], распространения волн в упругих телах [5–7], акустике [8], неразрушающих методах контроля [9], теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники [10, 11], теории волн в жидкости [12], геофизике [13], прикладной математике и приложениях [14–17] и в других областях.

Теория отдельных уравнений Винера–Хопфа детально разработана и подробно опубликована в печати. Если теорию решения отдельных уравнений можно считать построенной, то теория решения систем интегральных уравнений Винера–Хопфа далека до завершения. Попытки построения теории систем интегральных уравнений Винера–Хопфа по аналогии с отдельными уравнениями преобладают в проводимых исследованиях. Разработано несколько подходов, позволивших однотипно решать эти уравнения. Главными из них являются методы сингулярного интеграла Сохотского–Племеля [18, 19] и проекционные методы [20].

Оба подхода опираются на сведение уравнений Винера–Хопфа к функциональным уравнениям вида

$$\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{Q}^{+}(\alpha) = \mathbf{Q}^{-}(\alpha) + \mathbf{F}(\alpha). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{Q}^{+}(\alpha)$, $\mathbf{Q}^{-}(\alpha)$ неизвестные регулярные в верхней и нижней полуплоскостях функции, $\mathbf{K}(\alpha)$ — коэффициент функционального уравнения, $\mathbf{F}(\alpha)$ — задаваемая функция.

Для решения уравнений (1) необходима факторизация функций или матриц-функций $\mathbf{K}(\alpha)$, состоящая в получении представления $\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}_{+}(\alpha)\mathbf{K}_{-}(\alpha)$, где первое выражение справа является функцией или матрицей-функцией регулярной в верхней полуплоскости, а второе с такими же свойствами в нижней полуплоскости, и без нулей определителей в этих областях.

Первые исследования функциональных уравнений принадлежат Гильберту [21]. Он сформулировал корректную постановку краевой задачи для аналитических функций в форме системы функциональных уравнений о нахождении нескольких аналитических функций по их значениям на некотором контуре комплексной плоскости.

Винеру в совместной работе с Хопфом [22] принадлежит фундаментальный результат, связавший поиск решений интегральных уравнений фильтрации сигналов и смешанных граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с функциональным уравнением Гильберта.

В работах [20] исследование проводилось проекционным методом с привлечением теории нормированных колец. Важные аналитические свойства интеграла Фурье в комплексной плоскости были использованы для приведения интегральных уравнений с разностным ядром на полупрямой к функциональным уравнениям Гильберта для случая одной аналитической функции. Подобные интегральные уравнения возникли как результат удовлетворения смешанным условиям на границе области постановки граничной задачи. В них на границе существуют множества, на которых происходит смена типа граничных условий. Такие граничные задачи обычно рассматриваются в слоистых областях или в полупространстве.

В обзорных работах из цитированных указано, что факторизации матриц-функций на сегодняшний день выполнимы лишь в ограниченных случаях. К ним относятся матрицы-функции: треугольные; имеющие в качестве элементов рациональные функции; функционально-коммутативные или сводящиеся к последним элементарными преобразованиям, для которых выполнимо свойство $\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{K}(\beta) = \mathbf{K}(\beta)\mathbf{K}(\alpha)$ [11].

В то же время большое число матриц-функций, связанных с важными смешанными граничными задачами для уравнений в частных производных и не относящихся к приведенным типам, требует факторизации. Среди них особое место занимают матрицы-функции, элементами которых являются мероморфные функции, содержащие счетные множества нулей и полюсов. Такие матрицы-функции встречаются в многочисленных приложениях, а также позволяют с любой степенью точности приближать на всей вещественной оси непрерывные функции. Например, подобная ситуация имеет место для всех смешанных задач линейной механики сплошных сред в многослойной среде, имеющей конечную толщину.

В [2, 3, 6, 7, 16] построена математическая теория статических и динамических смешанных задач в неклассических многослойных областях, приводящих, в том числе, к уравнениям Винера–Хопфа. Здесь же разработаны прикладные теории факторизации мероморфных матриц-функций. Для матриц-функций высокого порядка разработан метод предварительной слабой факторизации, позволяющий выявлять главные свойства факторизации, а затем процесс уточнений осуществляется методом последовательных приближений. Также разработан другой подход, состоящий в записи функциональных уравнений смешанных граничных задач таким образом, что образуется треугольная матрица-функция с экспоненциальными элементами, имеющая бесконечный индекс.

Для нее разработан метод последовательных приближений, позволяющий в пределе получить точную факторизацию такой матрицы-функции. В [23] без доказательства приведен один из частных случаев слабой факторизации матриц-функций, ранее введенных в [3]. В работе [4] разработан метод факторизации мероморфных функций специального вида для двумерных смешанных задач теории трещин, возникающих в теории упругости. Найден способ сведения их к функционально-коммутативным, что позволило осуществлять точную факторизацию. Эти подходы нашли применение в большом числе работ. В работах [5, 8, 10] в задачах воздействия электромагнитных волн на совокупность препятствий развит метод факторизации мероморфных матриц-функций осуществлением слабой факторизации с последующим уточнением.

В работах [5, 9] разработан метод факторизации трехмерных матриц-функций в задачах распространения волн в упругой среде.

В работе [14] предложен оригинальный способ точной факторизации матриц-функций, рассматриваемых как краевая задача Римана–Гильберта на кольце для функций экспоненциального типа. Применением теоремы Винера–Пели матрицу-функцию конечного порядка на конечном отрезке $[-N, N]$ удается точно факторизовать. К сожалению, метод не применим для случая $N = \infty$. В работах [22, 23] развиты методы факторизации матриц-функций с рациональными элементами. Применены как методы последовательного аннулирования полюсов определителей матриц-функций, так и методы разложений с применением эрмитовых матиц-функций и ортоганольных полиномов. Основная часть исследования перенесена на способы вычисления частных и общего индекса матрицы-функции. В [22], к сожалению, как и в ряде работ других авторов, матрицы с элементами из рациональных функций, имеющих конечное число нулей и полюсов, названы мероморфными матрицами-функциями, что не является общепринятым. Принято мероморфными называть матрицы-функции, имеющие счетное число нулей и полюсов. Развитые в работах [24, 25] методы факторизации матриц-функций не применимы для факторизации таких мероморфных матриц-функций.

В работе [26] на основе фрактальных свойств блочных элементов разработан новый универсальный метод моделирования, успешно примененный в граничных задачах для систем дифференциальных уравнений всех типов. Он основан на оригинальных подходах американского математика Б. Мандельброта [27], в ценности которых авторы статьи смогли убедиться. В настоящей работе метод применяется для исследования систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, преобразование Фурье ядра которых представляет не допускающие точные факторизации мероморфных матриц-функций. Метод обходит традиционное сведение этих систем к функциональным и использует подход, развитый ранее авторами в работе [17] для системы двух уравнений Винера–Хопфа. Применение метода [26] позволяет развить этот подход на случай систем интегральных уравнений любого конечного порядка путем перехода от систем интегральных уравнений к системам дифференциальных, позволивших преодолеть проблему наличия не факторизуемой матрицы-функции функционального уравнения. Последнее позволяет исследовать и преобразовать системы интегральных уравнений Винера–Хопфа для слоистых многокомпонентных материалов сложной реологии таким образом, что открывается возможность применением специального метода факторизации, который будет применен в дальнейшем, построить их точное решение.

1. Постановка задачи

Рассматривается система интегральных уравнений Винера–Хопфа, заданная на полубесконечном интервале. Система представима как одно уравнение с матричным ядром, называемом символом интегрального уравнения, и имеет вид

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)d\xi = \mathbf{f}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\},$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mathbf{K}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad \mathbf{K}(\alpha) = \begin{Vmatrix} K_{11}(\alpha) & K_{12}(\alpha) & \dots & K_{1N}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1}(\alpha) & K_{N2}(\alpha) & \dots & K_{NN}(\alpha) \end{Vmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}.$$

В случае задач термоэлектроупругости компонентами вектора $\boldsymbol{\varphi}$ являются компоненты вектора напряжений, температура или ее градиент, электрический заряд. В задачах магнитоупругости наряду с вектором напряжений появится градиент магнитного поля. Аналогично появляются параметры, свойственные другим реологиям материалов.

Будем считать, что элементы $K_{mp}(\alpha)$, $m, p = 1, 2, \dots, N$, матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ в (1.1) являются в общем случае мероморфными функциями переменной α. В смешанных задачах механики и математической физики мероморфные функции $K_{mp}(\alpha)$ и определитель $\det \mathbf{K}(\alpha)$ имеют следующее представление и асимптотическое поведение [2, 5]

$$K_{mp}(\alpha) = D^{-1}(\alpha)L_{mp}(\alpha), \quad \det \mathbf{K}(\alpha) = D^{-N}(\alpha)\Delta(\alpha),$$
$$\Delta(\alpha) = \det \|L_{mp}(\alpha)\| .$$
$$K_{mp}(\alpha) = T_{mp} |\alpha|^{-1} (1 + o(\alpha)), \quad m = p, \quad K_{mp}(\alpha) = T_{mp}\alpha^{-1}(1 + o(\alpha)),$$
$$m \neq p, \quad |\alpha| \gg 1, \quad p = 1, 2, \ldots, N.$$

Для описания свойств целых функций будем следовать определениями, принятым в [28, стр. 245–246]. Порядком целой функции $f(z)$ принимается значение $\rho = M(r) = \max|f(z)|$, где $r = |z|$.

Этот параметр может быть вычислен по формуле нижнего предела

$$\rho = \underline{\lim}\frac{\ln M(r)}{\ln r}, \quad r \to \infty$$

Типом этой целой функции σ называется параметр, вычисляемый по формуле

$$\sigma = \overline{\lim}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}, \quad r \to \infty$$

Например, целые функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{sh} Nz$ имеют одинаковый порядок $\rho = 1$, а типы $\sigma = 1$ и $\sigma = N$ соответственно. Очевидно, функция $\operatorname{sh} Nz$ имеет распределение нулей в N раз более плотное, чем функция $\operatorname{sh} z$.

Считаем, что введенные функции $L_{mp}(\alpha)$, $D(\alpha)$, являются целыми функциями первого порядка и конечного типа τ, а функция $\Delta(\alpha)$ как определитель для матрицы $\|L_{mp}(\alpha)\|$ имеет первый порядок и тип τN. Предполагается, что целые четные функции $D(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$ имеют однократные нули на множествах значений $\pm\zeta_n$ и $\pm z_n$ соответственно, с точками сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях верхней (плюс) и нижней (минус) частей комплексной плоскости, как правило, в окрестностях мнимой оси. Ради простоты, не будем усложнять свойства матриц-функций, которые имеют нулевые общий и частные индексы, а система интегральных уравнений однозначно разрешима в некотором L_p, $p > 1$. Более детально свойства элементов матриц-функций описаны в [2, 5]. Очевидно, плотность распределения нулей определителя $\Delta(\alpha)$ в N раз большая, чем нулей ξ_n знаменателя $D(\alpha)$. С учетом этого, построим N ветвей W_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, из нулей определителя таким образом, чтобы полученная с их помощью целая функция имела бы тип τ, такой же, как и $D(\alpha)$.

Для этого в качестве первых нулей $z_m(p)$, $p = 1, 2, \ldots, N$, указанных ветвей возьмем последовательно первые нули определителя $\Delta(\alpha)$ в порядке возрастания модулей, а каждый последующий ноль берется с лакуной N, то есть с пропуском N последующий нулей определителя. Таким образом, нули каждой ветви $z_m(p)$ выбираются из числа нулей z_k определителя по правилу $z_m(p) = z_{p+mN}$ и охватывают без повторений все нули определителя $\Delta(\alpha)$. Это же относится и к нулям со знаком минус. Таким образом, построенные бесконечные множества нулей, обозначенные W_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, являются не пересекающимися независимыми взаимно ортогональными и в совокупности $\cup W_n$ полными во множестве нулей определителя $\Delta(\alpha)$.

Построим с помощью входящих в W_n нулей целые функции $M_p(\alpha, z_p)$ в количестве N в форме бесконечных произведений [2, 5], приняв обозначения $\pm z_m(p) = z_m^{\pm}(p)$

$$M_p(\alpha, z) = M_{p\mp}\left(\alpha, z^{\pm}(p)\right) M_{p\pm}\left(\alpha, z^{\mp}(p)\right),$$
$$M_{p\mp}\left(\alpha, z^{\pm}(p)\right) = T_{p\mp} e^{\mp i\alpha} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{z_s^{\pm}(p)}\right) e^{\frac{\alpha}{z_s^{\pm}(p)}}, \tag{1.2}$$
$$T_{p\mp} = \text{const}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

которые после деления на $D(\alpha)$ дадут мероморфные функции, обозначенные $\mathrm{M}_p(\alpha)$. Их нулями являются $\pm z_m(p)$. Здесь в случае этажности берутся знаки избранного этажа.

Примем компоненты вектора правой части $\mathbf{f}(x)$ системы интегральных уравнений (1.1) в форме $A_p(\eta)e^{-i\eta x}$, $p = 1, 2, \ldots, N$, $\operatorname{Im}\eta = 0$. Такие значения компонент позволяют получать произвольные правые части системы интегральных уравнений, применяя преобразования Фурье, в форме

$$f_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_p(\eta)e^{-i\eta x}d\eta, \quad p = 1,2,\ldots,N. \tag{1.3}$$

Здесь $A_p(\eta)$ — преобразования Фурье функций $f_p(x)$.

Примером подобной матрицы-функции для $N = 2$ служит смешанная задача в случае колебания слоя с закрепленной нижней гранью. Элементы матрицы-функции имеют представление

$$\begin{gathered}
M(u) = \frac{\chi_2^2\left(\sigma_2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1 - \sigma_1^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2\right)}{2u^2\Delta(u)}, \quad N(u) = \frac{2\operatorname{sh} 2\sigma_2}{u^2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_2},\\
R(u) = \frac{\chi_2^2\left(\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - \sigma_2^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1\right)}{2\Delta(u)}, \quad P(u) = \frac{\xi}{\Delta(u)},
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
\xi = {} & \left(2u^2 - 0{,}5\chi_2^2\right)\left(1 - \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2\right) + \\
& + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\left[2u^4 - u^2\left(1{,}5\chi_2^2 + \chi_1^2\right) + \chi_2^2\chi_1^2\right] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(u) = {} & u^2\left(2u^2 - \chi_2^2\right) - \left(2u^4 - u^2\chi_2^2 + 0{,}25\chi_2^4\right) \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 + \\
& + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2\left[2u^4 - u^2\left(2\chi_2^2 + \chi_1^2\right) + \chi_1^2\chi_2^2 + 0{,}25\chi_2^4\right] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2.
\end{aligned}$$

$$\chi_1^2 = \rho(\lambda + 2\mu)^{-1}\omega^2, \quad \chi_2^2 = \rho\mu^{-1}\omega^2, \quad \sigma_n = \sqrt{u^2 - \chi_n^2},$$
$$u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad n = 1, 2$$

Статический случай этой же задачи

$$M(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u + 4u)}{u^2\Delta}, \quad N(u) = \frac{2\operatorname{sh} 2u}{u^3 \operatorname{ch} 2u},$$
$$P(u) = -\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2}{u\Delta}, \quad R(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u - 4u)}{\Delta},$$
$$\Delta = u\left[(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u + 4u^2 + 4(1-\nu)^2\right].$$

В приведенных формулах сохранены обозначения, принятые в [5].

В (1.4) могут использоваться разложения (1.3).

2. О преобразованиях системы интегральных уравнений

Для привлечения к исследованию нового универсального метода моделирования [21] представим систему интегральных уравнений Винера–Хопфа, с учетом свойств элементов матриц-функций, в координатном виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{mp}(\alpha)\Phi_p(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = f_m(x). \tag{2.1}$$

Тогда с учетом свойств целых функций, имеющих счетные количества нулей, например (1.4), имеем [23]

$$k_{mp}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{mp}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad K_{mp}(\alpha) = \frac{L_{mp}(\alpha)}{D(\alpha)}, \quad f = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\},$$

$$L_{mp}(\alpha)=\prod_{n=1}^{\infty}L_{mpn}(\alpha),\quad K_{mp}(\alpha)=\frac{L_{mp}(\alpha)}{D(\alpha)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{L_{mpn}(\alpha)}{D_n(\alpha)},$$
$$L_{mpn}(\alpha)=(\alpha^2-\tau^2_{mpn}),\quad D_n(\alpha)=(\alpha^2-\xi_n^2).$$

Здесь τ_{mpn} — нули целых функций, представляющих числители элементов матрицы, которые могут не совпадать с нулями определителя.

Перейдем к формулировке приведенных интегральных уравнений Винера–Хопфа в форме системы дифференциальных уравнений, имеем

$$\sum_{p=1}^{N}\prod_{n=1}^{\infty}L_{mpn}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_p(x)=\prod_{s=1}^{N}D_s\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)f_m(x),\quad m=1,2,\dots,N,$$

$$L_{mpn}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\tau^2_{mpn},\quad D_p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\xi_r^2.$$

Если представить правые части уравнений (2.1) интегралом Фурье,

$$\prod_{s=1}^{N}D_s(i\frac{\partial}{\partial x})f_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_m(\eta)e^{-i\eta x}d\eta,$$

то не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением в виде

$$F_m(\eta)e^{-i\eta x}.$$

Таким образом, считая, что параметр η не совпадает ни с одним ξ_r, дифференциальные операторы не изменяют экспоненту и правые части в дифференциальном уравнении остаются экспоненциальными с измененным коэффициентом.

Применим к системе дифференциальных уравнений преобразование Галеркина [21]. Для этого построим определители, содержащие новые неизвестные функции χ_p и операторы

$$\varphi_1(x)=\begin{Vmatrix}\chi_1 & L_{12} & \cdots & L_{1N}\\ \chi_2 & L_{22} & \cdots & L_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots\\ \chi_N & L_{2N} & \cdots & L_{NN}\end{Vmatrix},\quad \varphi_2(x)=\begin{Vmatrix}L_{11} & \chi_1 & \cdots & L_{1N}\\ L_{12} & \chi_2 & \cdots & L_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots\\ L_{1N} & \chi_N & \cdots & L_{NN}\end{Vmatrix},\dots,$$

$$\varphi_N(x)=\begin{Vmatrix}L_{11} & L_{12} & \cdots & \chi_1\\ L_{12} & L_{22} & \cdots & \chi_2\\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots\\ L_{1N} & L_{2N} & \cdots & \chi_N\end{Vmatrix}.$$

В результате вычислений и упрощений для определения функций χ_p получаются следующая система N независимых дифференциальных уравнений

$$L\chi_p=0,\quad L=\begin{Vmatrix}L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1M}\\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{2M}\\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots\\ L_{1M} & L_{2M} & \cdots & L_{MM}\end{Vmatrix}. \tag{2.2}$$

Раскрыв определитель и осуществив возможные преобразования, получаем дифференциальные уравнения, не зависящее от порядка его вычисления, поскольку все элементы — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, коммутируют.

Получим N бесконечных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описываемых единственным дифференциальным оператором, вытекающим из определителя всей системы интегральных уравнений Винера–Хопфа. Раскрыв определитель, получим целую функцию, аргументом которой, в соответствии с условиями задачи, будет произведение дифференциальных операторов второго порядка вида

$$L = \prod_{n=1}^{\infty} G_n, \quad G_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + z_n^2.$$

Отсюда следует, что однородное уравнение (2.2) для каждой функции χ_p имеет вид

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_p = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, N.$$

В связи с коммутацией операторов G_n, среди которых в силу однократности нулей z_n нет повторяющихся, заключаем, что общий вид решения однородного уравнения для функций χ_p на положительной полуоси состоит из решений однородных уравнений

$$G_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_{pn} = 0$$

и имеет вид

$$\chi_p = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{pn} e^{iz_m x}, \quad p = 1, 2, \ldots, N.$$

Наличие у системы интегральных уравнений правых частей приводит систему дифференциальных уравнений к неоднородным. Для поиска частного решения неоднородного дифференциального уравнения будем искать решение системы для вектора $\mathbf{f}(x) = \left\{A_p(\eta)e^{-i\eta x}\right\}$ правой части (1.3) в следующем виде

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p e^{-i\eta x} + \sum_{m=1}^{\infty} y_{pm} e^{iz_{mp} x}, \quad p = 1{,}2, \ldots, N.$$

Здесь B_p, y_{pm} не зависят от x.

В результате преобразований с учетом свойства элементов матрицы-функции, аналогичных выполненным в [2, 15, 16], получим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, которые можно представить в векторном виде

$$\begin{gathered} \mathbf{AY} = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{AC}_p\mathbf{Y} = \mathbf{F}_p, \quad p = 1, 2, \ldots, N, \quad \mathbf{Y} = \{y_m\}, \\ \mathbf{A} = \left\| \frac{1}{\xi_r - z_m} \right\|, \quad \mathbf{F}_p = \left\{ -\frac{B_p}{\eta + \xi_r} \right\}, \\ \mathbf{C}_p = \|c_{mm}(p)\|, \quad \mathbf{C}_p^{-1} = \left\|c_{mm}^{-1}(p)\right\|, \\ c_{mm}(1) = 1 \end{gathered} \tag{2.3}$$

В результате преобразований, в (2.3) представлено N совокупностей T_p бесконечных алгебраических уравнений, причем вместе совокупности содержат бесконечное множество неизвестных, эквивалентное числу нулей, входящих в полное объединение $\cup W_n$. В свою очередь, каждая совокупность T_p содержит бесконечное число уравнений, эквивалентное числу нулей в W_p, равное их числу в целой функции $D(\alpha)$. Преобразуем полную систему бесконечных уравнений таким образом, чтобы расщепить ее на совокупности T_p уравнений, которые содержат число неизвестных, эквивалентное числу уравнений, входящих в эту совокупность.

Построенные таким образом бесконечные системы алгебраических уравнений оказываются независимыми и эквивалентными системе бесконечных уравнений N совокупностей T_p.

Выводы

Таким образом, системы интегральных уравнений Винера–Хопфа произвольного конечного порядка преобразованы универсальным методом моделирования таким образом, что допускают применения к ним специального метода факторизации. Этот метод в сочетании с преобразованием Галеркина позволит строить точные решения для систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, описывающих поведение многокомпонентных наночастиц.

Литература [References]

1. Freund, L.B., *Dynamic Fracture Mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
2. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Наука, Москва (1974). [Vorovich I.I., Aleksandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical mixed problems of elasticity theory.* Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)]
3. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.* Наука, Москва (1999). [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media.* Nauka, Moscow, 1999. (in Russian)]
4. Храпков, А.А., Решения задач в замкнутой формы об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричной выемкой на вершине. *ПММ*, 1971, т. 35, с. 1009–1016. [Khrapkov, A.A., Solutions of problems in closed form on the elastic equilibrium of an infinite wedge with an asymmetric notch at the top. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, pp. 1009–1016. (in Russian)]
5. Achenbach, J.D., *Wave propagation in Elastic Solids.* North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1973.
6. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Наука, Москва, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
7. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., Динамика неоднородных линейно-упругих сред. Наука, Москва, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F., *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear elastic media.* Nauka, Moscow, 1989. (in Russian)]
8. Abrahams, I.D., Wickham, G.R., General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, pp. 819–838. DOI 10.1137/0150047
9. Norris, A.N., Achenbach, J.D., Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material. *Q. J. Apple. Math. Mech.*, 1984, vol. 37, pp. 565–580. DOI 10.1093/qjmam/37.4.565
10. Sautbekov, S., Nilsson, B., Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener-Hopf method. *AIP Conf. Proc.*, 2009, vol. 1106, pp. 110–117. DOI 10.1063/1.3117085
11. Нобл, Б.: Метод Винера-Хопфа. ИЛ, Москва, 1962. [Noble B. *Metod Vinera-Khopfa = Wiener-Hopf method.* Inostrannaya literatura, Moscow, 1962. (in Russian)]
12. Chakrabarti, A., George, A.J., Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Appl. Math. Lett.*, 1994, vol. 7, pp. 43–47. DOI 10.1016/0893-9659(94)90070-1
13. Davis, A.M.J., Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1987, vol. 39, pp. 25–55. DOI 10.1080/03091928708208804
14. Payandeh Najafabadi, A.T., Kucerovsky, D., Exact solutions for a class matrix Riemann-Hilbert problems. *IMA J. of Appl. Math.*, 2014, vol. 79, pp. 109–123. DOI 10.1093/imamat/hxs044
15. Эскин, Г.И., *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* Наука, Москва (1973). [Eskin, G.I., *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh uravneniy = Boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations.* Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]
16. Бабешко, В.А., *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости.* Наука, Москва, 1984. [Babeshko, V.A., *Obobshchennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskih smeshannyh zadachah teorii uprugosti = Generalized method of factorization in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory.* Nauka, Moscow, 1984. (in Russian)]

17. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., The Hilbert-Wiener factorization problem and block element method. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, no. 12, pp. 591–595. DOI 10.1134/S1028335814120052
18. Гахов, Ф.Д., *Краевые задачи.* Наука, Москва (1977). [Gakhov, F.D., *Kraevye zadachi = Boundary value problems.* Nauka, Moscow (1977). (in Russian)]
19. Мусхелишвили, Н.И., *Сингулярные интегральные уравнения.* Наука, Москва (1962). [Muskhelishvili, N.I., *Singulyarnye integral'nye uravneniya = Singular integral equation.* Nauka, Moscow (1962). (in Russian)]
20. Гохберг, И.Ц., Крейн, М.Г., Системы интегральных уравнений на полупрямой, с ядрами, зависящие от разности аргументов. *Успехи математических наук*, 1958, т. 13, вып. 2, с. 3–72. [Gokhberg, I.Ts., Krein, M.G., Systems of integral equations on the half-line, with kernels, depending on the difference of the arguments. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1958, vol. 13, iss. 2, pp. 3–72. (in Russian)]
21. Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Leipzig-Berlin, 1924.
22. Wiener, N., Hopf, E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. In *S.B. Preuss. Akad. Wiss.*, Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1931, p. 696–706.
23. Idemen, M., A new method to obtain exact solutions of vector Wiener-Hopf equations. *ZAMM*, 1979, vol. 59, pp. 656–658.
24. Litvinchuk, G.S., Spitkoskii, I.M., *Factorization of measurable matrix functions.* Boston, Birkhäuser Verlag Basel, 1987.
25. Адуков, В.М., Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций. *Алгебра и анализ*, 1992, т. 4, вып. 1, pp. 54–74. [Adukov, V.M., Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *Algebra i analiz = Algebra and Analysis*, 1992, vol. 4, no. 1, pp. 54–74. (in Russian)]
26. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *ДАН*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740021040039
27. Мандельброт, Б., *Фрактальная геометрия природы.* Институт компьютерных исследований, Москва, 2002. [Mandelbrot, B., *Fraktal'naya geometriya prirody = The Fractal Geometry of Nature.* Institute for Computer Research, Moscow, 2002. (in Russian)]
28. Маркушевич, А.И., *Теория аналитических функций.* Т. 2. Наука, Москва, 1968. [Markushevich, A.I., *Teoriya analiticheskikh funktsiy = Theory of analytic functions.* Vol. 2. Nauka, Moscow, 1968. (in Russian)]

УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-37-47

Разработка метода оценки стабильности трещины нового типа, условий разрушения среды и разложимости по простым решениям

О. М. Бабешко✉, **О. В. Евдокимова**, **В. А. Бабешко**, **Е. М. Горшкова**, **В. С. Евдокимов**, **А. Г. Зарецкий**, **О. А. Бушуева**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Ольга Мефодиевна; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Аннотация. В работе с применением ранее разработанного авторами универсального метода моделирования, проведен углубленный анализ трещин нового типа. Разработан метод построения интегральных уравнений нового типа и предложены методы их решения. Выявлены новые особенности трещин нового типа и описан подход, позволяющий выполнять исследование трещин нового типа в средах сложных реологий. В основе подхода лежат метод блочного элемента, разложимость решений сложных граничных задач по решениям граничных задач для более простых уравнений Гельмгольца, факторизационные методы. В результате исследования выявляются особенности разрушения среды трещинами нового типа и характер возбуждаемых при гармонических колебаниях волновых полей напряжений. В работе, на примере уравнений Ламе, показано, каким образом сформированные трещины нового типа будут переноситься в среды более сложных реологии применение решений для сред более простых реологий.

Ключевые слова: трещины нового типа, блочные элементы, факторизация, интегральные уравнения, внешние формы, уравнения Ламе.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00213).

Цитирование: Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Горшкова Е. М., Евдокимов В. С., Зарецкий А. Г., Бушуева О. А. Разработка метода оценки стабильности трещины нового типа, условий разрушения среды и разложимости по простым решениям // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 37–47. DOI 10.31429/vestnik-19-4-37-47

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 20 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Development of a Method for Assessing the Stability of a New Type of Crack, the Conditions of Destruction of the Medium and Decomposability by Simple Solutions

O. M. Babeshko✉, **O. V. Evdokimova**, **V. A. Babeshko**, **E. M. Gorshkova**, **V. S. Evdokimov**, **A. G. Zaretsky**, **O. A. Bushueva**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga M. Babeshko; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. In the work with the application of the universal modeling method previously developed by the authors, an in-depth analysis of cracks of a new type was carried out. A method for constructing integral equations of a new type has been developed and methods for solving them have been proposed. New features of cracks of a new type are revealed and an approach is described that allows the study of cracks of a new type in environments of complex rheologies. The approach is based on the block element method, decomposability of solutions of complex boundary value problems by solutions of boundary value problems for simpler Helmholtz equations, factorization methods. As a result of the study, the features of the destruction of the medium by cracks of a new type and the nature of the stresses excited by harmonic oscillations of wave fields are revealed. In this paper, using the example of the Lame equations, it is shown how the formed cracks of a new type will be transferred to environments of more complex rheology using solutions for environments of simpler rheologies.

Keywords: new type cracks, block elements, factorization, integral equations, external forms, Lame equations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-29-00213).

Cite as: Babeshko, O. M., Evdokimova, O. V., Babeshko, V. A., Gorshkova, E. M., Evdokimov, V. S., Zaretsky, A. G., Bushueva, O. A., Development of a method for assessing the stability of a new type of crack, the conditions of destruction of the medium and decomposability by simple solutions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 37–47. DOI 10.31429/vestnik-19-4-37-47

Received 15 November 2022. Revised 20 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

Трещины нового типа, дополняющие трещины Гриффитса, были обнаружены при изучении разломов литосферных плит, сближающихся торцами при встречном движении по границе Конрада [1–3]. В процессе исследования в качестве моделей литосферных плит были приняты плиты Кирхгофа. В настоящей работе для изучения поведения трещин нового типа в условиях гармонических колебаний применяется ранее развитый авторами подход, позволяющий построить интегральные уравнения теории трещин нового типа, который позволяют изучить их волновые свойства. Этот подход допускает обобщения на термоэлектроупругие (или иной реологии) плиты, содержащие трещины нового типа. Трещины нового типа были выявлены в сейсмологии в результате изучения встречного движения полубесконечных литосферных плит по границе Конрада, разделяющей кору Земли на гранитную и базальтовую [1–3]. Предполагалось, что литосферные плиты сближаются торцами, создавая при этом разлом прямоугольной формы. Он отличается от трещин Гриффитса [4], имеющих гладкую границу, наличием угловых точек, приводящих к иному механизму разрушения среды. Именно при их близости в зонах контакта угловых точек с основанием возникают концентрации контактных напряжений. При окончательном сближении концентрация напряжений перерастает в сингулярную, приводящую к стартовым землетрясениям. Таким образом, построение интегральных уравнений трещин нового типа предполагает описание процесса сближений деформируемых объектов на деформируемом основании с вертикальными торцами или наличие в среде полости прямоугольной формы. При сближении их сторон, до взаимодействия торцами, возникает в зоне краев сингулярная концентрация контактных напряжений.

Примеры самых разных направлений исследований и подходов опубликованы в работах [5–17]. Среди этих работ особое место занимают работы, связанные с привлечением к исследованию математических средств высокого уровня, позволяющих не только получить углубленные результаты процессов разрушения, но и охватить широкий круг проблем теории трещин. В работе [18] изложена теория построения интегральных уравнений трещин нового типа и методы их решения. Для углубленного исследования поведения волновых полей в случае гармонического колебания структуры, содержащей трещины нового типа, используется подход построения интегральных уравнений и их решений, разработанный авторами [18, 19].

1. Граничная задача

Следуя развитым ранее авторами методам [18, 19], рассмотрим многослойную линейно деформируемую среду, находящуюся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A,\ |x_2| \leqslant \infty)$ и $\Omega_A(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ деформируемые объекты, которые в соответствии с подходом универсального метода моделирования, описываются уравнениями

$$\begin{gathered}
\left[\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+p^2\right]\varphi_{-A}(x_1,x_2)=g(x_1,x_2),\quad g(x_1,x_2)=q(x_1,x_2)-t(x_1,x_2),\\
\Omega_{-A}(-\infty\leq x_1\leqslant -A,\ |x_2|\leqslant\infty);\\
\left[\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+p^2\right]\varphi_{A}(x_1,x_2)=g(x_1,x_2),\quad g(x_1,x_2)=q(x_1,x_2)-t(x_1,x_2),\\
\Omega_{A}(A\leqslant x_1\leqslant \infty,\ |x_2|\leqslant\infty)
\end{gathered}\tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A}(x_1,x_2)=\varphi(-A,x_2),\quad x_1\to -A,\qquad \varphi_{A}(x_1,x_2)=\varphi(A,x_2),\quad x_1\to A.$$

Применив в уравнении (1.1) преобразование Фурье по координате x_2

$$\varphi(x_1,\alpha_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,x_2)e^{i\alpha_2 x_2}dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром α_2.

После упрощения, связанного с опусканием свободного параметра α_2, приходим к соотношениям

$$\begin{gathered}
(\partial^2 x_1+k^2)\varphi_{-A}(x_1,)=g_{-A}(x_1),\quad \Omega_{-A}(-\infty\leqslant x_1\leqslant -A),\quad k^2=p^2-\alpha_2^2,\\
(\partial^2 x_1+k^2)\varphi_{A}(x_1)=g_{A}(x_1),\quad \Omega_{A}(A\leqslant x_1\leqslant\infty),\\
g_{-A}(x_1)=q_{-A}(x_1)-t_{-A}(x_1),\quad g_{A}(x_1)=q_{A}(x_1)-t_{A}(x_1),\\
\varphi(x_1)=\varphi(x_1),\quad g(x_1)=g(x_1),\quad \varphi(x_1)=\varphi(\pm A),\quad x_1\to\pm A,\\
\varphi_{-A}(x_1)=\varphi(-A),\quad x_1\to -A,\quad \varphi_{A}(x_1)=\varphi(A),\quad x_1\to A.
\end{gathered}\tag{1.2}$$

Здесь q_A и q_{-A} — контактные напряжения, действующие на деформируемые тела, описываемые граничными задачами для уравнений Гельмгольца со стороны многослойной среды, а t_A и t_{-A} являются внешними давлениями сверху.

2. Блочные элементы деформируемых тел

Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (1.2). Для этого можно применить метод, изложенный в [19]. В результате его применения к (1.2) получим внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned}
\omega_{-A}(\alpha_1)=-i(\alpha_1+k)\varphi_{-A}(-C)e^{-i\alpha_1 C}+Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C}-\\
-Q_{-A}(\alpha_1)-T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C}+T_{-A}(\alpha_1);
\end{aligned}$$

$$\omega_{A}(\alpha_1)=i(\alpha_1-k)\varphi_{A}(A)e^{i\alpha_1 A}+Q_{A}(k)e^{i(\alpha_1-k)A}-Q_{A}(\alpha_1)-T_{A}(k)e^{i(\alpha_1-k)A}+T_{A}(\alpha_1).$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье строчных букв заглавными

$$\varphi(\alpha_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1.$$

С помощью построенных внешних форм перемещения тел можно представить упакованными блочными элементами в виде

$$\varphi_r(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_r(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1,\quad \varphi_r(\alpha_1)=\frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)},$$

$$r=A,\ -A,\quad N(\alpha_1)=(\alpha^2-k^2).$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся мембраны, имеет вид

$$u_r(x_1,x_2)=\iint\limits_{\Omega_{-A}} k(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)q_{-A}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2+ \\ +\iint\limits_{\Omega_{A}} k(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)q_{A}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2,\quad x_1,x_2\in\Omega_r, \quad (2.1)$$

$$r=A,\ -A,\quad \langle\alpha,x\rangle=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, k(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2$$

или

$$u_r(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1,\alpha_2)q_r(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2)=O(v^{-1}),\quad u=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\to\infty.$$

Здесь $K(\alpha_1,\alpha_2)$ — четная по обеим переменным аналитическая функция двух комплексных переменных α_k, в частности мероморфная, ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

В результате применения к двумерному интегральному уравнению (2.1) преобразование Фурье по координате x_2 получим соотношения вида

$$u_r(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{-A}k(x_1-\xi_1)q_{-A}(\xi_1)d\xi_1+\int\limits_{A}^{\infty}k(x_1-\xi_1)q_{A}(\xi_1)d\xi_1,$$

$$k(x_1)=k(x_1,\alpha_2),\quad q_r(\xi_1)=q_r(\xi_1,\alpha_2),$$

$$k(x_1)=k(x_1,\alpha_2),\quad k(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1,$$

$$K(\alpha_1)=K(\alpha_1,\alpha_2),\quad u_r(x_1)=u_r(x_1,\alpha_2).$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей z_m, $m=1,2,\dots,M$ и полюсов ξ_n, $n=1,2,\dots,N$. В этом случае представление ядра интегрального уравнения описывается контурным интегралом, обходящим области расположения полюсов, положительные — снизу, отрицательные сверху [20]

$$k(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1.$$

Приравнивая перемещения объектов в зоне контакта, имеем соотношения

$$K(\alpha_1)Q_{-A}(\alpha_1)=(\alpha_1^2-k^2)^{-1}[-Q_{-A}(\alpha_1)+S_{-A}],$$

$$[K(\alpha_1)+(\alpha_1^2-k^2)^{-1}]Q_{-A}(\alpha_1)=(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S_{-A}],$$

$$K(\alpha_1)Q_{A}(\alpha_1)=(\alpha_1^2-k^2)^{-1}[-Q_{A}(\alpha_1)+S_{A}],$$

$$[K(\alpha_1)+(\alpha_1^2-k^2)^{-1}]Q_{A}(\alpha_1)=(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S_{A}],$$

$$S_{-A}=-i(\alpha_1+k)\varphi_{-A}(-A)e^{-i\alpha_1A}+Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A}-T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A}+T_{-A}(\alpha_1),$$

$$S_{A}=i(\alpha_1-k)\varphi_{A}(A)e^{i\alpha_1A}+Q_{A}(k)e^{i(\alpha_1-k)A}-T_{A}(k)e^{i(\alpha_1-k)A}+T_{A}(\alpha_1).$$

В преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон, имеем

$$K(\alpha_1)Q^-_{-A}(\alpha_1) + W(\alpha_1) + K(\alpha_1)Q^+_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S^-_{-A} + S^+_A), \tag{2.2}$$

$$K(\alpha_1)Q^-_0(\alpha_1) + K(\alpha_1)Q^+_0(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S^-_0 + S^+_0). \tag{2.3}$$

С учетом аналитических свойств функций, в (2.2) (2.3) приняты обозначения

$$Q^-_{-A}(\alpha_1) \equiv Q_{-A}(\alpha_1), \quad S^-_{-A} \equiv S_{-A}(\alpha_1) \quad Q^+_A(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S^+_A(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1).$$

Знак плюс означает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а минус — в нижней. Здесь в (2.3) $W(\alpha_1)$ — преобразование Фурье перемещений в зоне поверхности, находящейся между зонами контакта Ω_r, $r = -A,\ A$. Функциональные уравнения (2.2), (2.3) позволяют моделировать трещины нового типа для любых конечных расстояний $2A$ между берегами. В (2.3) представлено функциональное уравнение для случая $A = 0$ в предположении, что мембраны сошлись торцами, но не взаимодействуют друг с другом, сохраняя заданные на торцах граничные воздействия. Образовавшаяся «трещина нового типа» вызывает в зоне сближения сингулярные концентрации контактных напряжений [1–3], разрушая среду. Таким является механизм разрушения среды трещинами нового типа. Однако разрушение может происходить и раньше в результате сближения торцов на достаточно близкое расстояние. Соотношения (2.2), (2.3) представляют обобщенные функциональные уравнения типа Винера–Хопфа относительно неизвестных $Q^-_{-A}(\alpha_1)$, $Q^+_A(\alpha_1)$, $W(\alpha_1)$, а также функционалов $Q_{-A}(-k)$, $Q_A(k)$, входящих в правые части уравнений. Для их исследования строятся интегральные уравнения.

3. О свойствах трещин нового типа

Функциональные уравнения (2.2), (2.3) методом, изложенным в [20], приводятся к интегральным уравнениями вида

$$X_-(\alpha_1) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_-(\xi)X_+(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi - \alpha_1)}d\xi = \{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S^-_{-C}e^{-i\alpha_1 C}\}^-, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 < 0;$$

$$X_+(\alpha_1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_+(\xi)X_-(\xi)e^{-i\xi 2A}}{K_-(\xi)(\xi - \alpha_1)}d\xi = \{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S^+_A e^{i\alpha_1 A}\}^+, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 > 0.$$

Здесь введены новые неизвестные

$$K_-(\alpha_1)Q^-_{-A}(\alpha_1)e^{i\alpha_1 A} = X_-(\alpha_1), \quad K_+(\alpha_1)Q^+_A(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 A} = X_+(\alpha_1)$$

и обозначение, заимствованное из [20]

$$\{R(\alpha_1)\}^\pm = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi - \alpha_1}d\xi, \quad \pm\operatorname{Im}\alpha_1 > 0.$$

Взяв неизвестные $Y_1(\alpha_1) = X_+(\alpha_1) + X_-(-\alpha_1)$, $Y_2(\alpha_1) = X_+(\alpha_1) - X_-(-\alpha_1)$, приводим систему интегральных уравнений к отдельным уравнениям вида

$$Y_2(\alpha_1) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_-(\xi)Y_2(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi + \alpha_1)}d\xi =$$
$$= \left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S^+_A e^{i\alpha_1 A}\right\}^+ - \left\{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S^-_{-A}e^{-i\alpha_1 A}\right\}^+;$$

$$Y_1(\alpha_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{K_-(\xi) Y_1(\xi) e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi + \alpha_1)} d\xi =$$

$$= \left\{ K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_A^+ e^{i\alpha_1 A} \right\}^+ + \left\{ K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_{-A}^- e^{-i\alpha_1 A} \right\}^+,$$

$$\operatorname{Im} \alpha_1 \geqslant 0.$$

Под интегралами справа находятся аналитические функции, поэтому интегральные операторы в правой части описываются интегралами Дирихле. Детально изучив свободные члены, получаем оценки вида

$$Y_1, Y_2 = O(\alpha_1^{-1}), \quad |\alpha_1| \to \infty.$$

Это свойство позволило выявить концентрацию контактных напряжений в зоне торцов деформируемого объекта. Концентрации описываются функциями [19, 20]

$$q_{-A}(x_1) = \frac{C_{-A}}{(-A - x_1)^{0,5}}, \quad x_1 < -A; \qquad q_A(x_1) = \frac{C_A}{(x_1 - A_1)^{0,5}}, \quad x_1 > A.$$

При $A \to 0$ имеющиеся особенности сходятся, и как доказано в [1–3], приводят к сингулярной концентрации контактных напряжений, вызывая разрушение среды, как ножницами. Этим отличаются трещины нового типа от трещин Гриффитса, разрушающих среду разрывом на границе трещины ее поверхности.

Получив представление общего решения интегральных уравнений,

$$q_{-A}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} K_{1-}^{-1}(\alpha_1) X_-(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 A} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad x_1 < -A;$$

$$q_A(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} K_{1+}^{-1}(\alpha_1) X_+(\alpha_1) e^{i\alpha_1 A} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad x_1 > A,$$

имеем возможность изучить поведение волнового поля контактных напряжений в областях контакта.

Здесь учтено, что в процессе перехода от функциональных уравнений к интегральным функция $K(\alpha_1)$ изменится и примет вид

$$K_1(\alpha_1) = K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}.$$

Поэтому оговоренные выше нули и полюса у нее изменятся

$$K_1(\alpha_1) = S(\alpha_1) K_0(\alpha_1), \quad S(\alpha_1) = D^{-1}(\alpha_1) R(\alpha_1),$$

$$R(\alpha_1) = \prod_{m=1}^{M} (\alpha_1^2 - z_{1m}^2), \quad D(\alpha_1) = \prod_{n=1}^{N} (\alpha_1^2 - \xi_{1n}^2).$$

В результате факторизации относительно контура γ, имеем

$$K_{1\pm}(\alpha_1) = S_\pm(\alpha_1) K_{0\pm}(\alpha_1), \quad R_\pm(\alpha_1) = \prod_{m=1}^{M} (\alpha_1 \pm z_{1m}), \quad D_\pm(\alpha_1) = \prod_{n=1}^{N} (\alpha_1 \pm \xi_{1n}).$$

Вычисляя интегралы Дирихле (4.1) по теории вычетов, получаем для волновых полей контактных напряжений представления

$$q_{-A}(x_1) \sim \sum_{m=1}^{M} \sigma_{m-} e^{-iz_{1m}(x_1 + A)}, \quad x_1 < A, \qquad q_A(x_1) \sim \sum_{m=1}^{M} \sigma_{m-} e^{iz_{1m}(x_1 - A)}, \quad x_1 > A.$$

Таким образом, фазовые скорости направлены на бесконечности и в них учитываются механические свойства среды, в которой расположена трещина нового типа.

4. Разложение решения векторной плоской задачи для уравнения Ламе с помощью разложений по скалярным

Уравнения Ламе как в статическом, так и в динамическом случаях обладают давно установленным свойством представления решения в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих, получаемых также применением преобразования Галеркина. Воспользуемся применявшимся в [21] разложением решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$\begin{gathered} u_1(x_1,x_2)=\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2),\\ u_2(x_1,x_2)=\partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2),\\ \partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial x_2}. \end{gathered}\tag{4.1}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{gathered} (\Delta-p_1^2)\varphi=0,\quad (\Delta-p_2^2)\psi=0,\quad p_1^2=k_1^2(\lambda+2\mu)^{-1},\quad p_2^2=k_1^2\mu^{-1},\\ \varphi(x_1,0)=f_1(x_1,0),\quad \varphi(0,x_2)=f_2(0,x_2),\\ \psi(x_1,0)=g_1(x_1,0),\quad \psi(0,x_2)=g_2(0,x_2). \end{gathered}\tag{4.2}$$

Функции f_m, g_m, $m=1,2$, в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области Ω.

Рассматривается случай граничной задачи Ламе первого рода. На осях координат задаются условия вида $\sigma_1\,(0,x_2)$, $\tau_1\,(0,x_2)$, $\sigma_2\,(x_1,0)$, $\tau_2\,(x_1,0)$

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при $x_1\to 0$ вида

$$\begin{gathered} \partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=\sigma_1(0,x_2),\\ \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=\tau_1(0,x_2). \end{gathered}\tag{4.3}$$

Аналогично при $x_2\to 0$

$$\begin{gathered} \partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=\sigma_2(x_1,0),\\ \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=\tau_2(x_1,0). \end{gathered}\tag{4.4}$$

Для решения граничной задачи для уравнений Ламе с граничными условиями (4.3), (4.4) строятся решения краевых задач для уравнений Гельмгольца при произвольных граничных условиях (4.2). Применяется использование метода блочного элемента, который описан в ряде работ авторов [21]. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле решения имеют вид

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_1\,(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2,$$

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_2\,(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2,$$

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1,x_2)=\\ &\quad=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j}-\alpha_{(3-j)1+}\right)\langle F_j(\alpha_j)-F_j(\alpha_{j1+})\rangle e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\frac{id\alpha_1d\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_1^2},\\ &\psi(x_1,x_2)=\\ &\quad=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j}-\alpha_{(3-j)2+}\right)\langle G_j(\alpha_j)-G_1(\alpha_{j2+})\rangle e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\frac{id\alpha_1d\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-p_2^2}, \end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2},$$
$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2}.$$

Разрезы у многозначных функций диктуются требованием выполнения автоморфизмов [21]. В соответствии с построением для приведенных блочных элементов справедливы свойства (4.2). Используя их, введем следующие обозначения решений уравнений Гельмгольца:

$$\varphi(x_1,x_2) \equiv \varphi\left[x_1,x_2,f_1(\xi_1,0),f_2(0,\xi_2)\right] \to f_1(x_1,0), \quad 0 < x_2 \ll 1;$$
$$\varphi(x_1,x_2) \equiv \varphi\left[x_1,x_2,f_1(\xi_1,0),f_2(0,\xi_2)\right] \to f_2(0,x_2), \quad 0 < x_1 \ll 1;$$

$$\psi(x_1,x_2) \equiv \psi\left[x_1,x_2,g_1(\xi_1,0),g_2(0,\xi_2)\right] \to g_1(x_1,0), \quad 0 < x_2 \ll 1;$$
$$\psi(x_1,x_2) \equiv \psi\left[x_1,x_2,g_1(\xi_1,0),g_2(0,\xi_2)\right] \to g_2(0,x_2), \quad 0 < x_1 \ll 1.$$

В более ранних работах авторов интегро-дифференциальным методом построено решение граничной задачи второго рода для уравнений Ламе. Точное его решение в первом квадранте имеет вид [21]

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2) = \partial_1\Big\langle \varphi_1\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(0,\xi_2) + \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}F(\xi_2)\right] + \\ + \varphi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0) + \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}D(\xi_1),\ \frac{1}{2}\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\right]\Big\rangle + \\ + \partial_2\Big\langle \psi_1\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0) + \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}C(\xi_1),\ \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\right] - \\ - \psi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2) + \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}E(\xi_2)\right]\Big\rangle; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} u_2(x_1,x_2) = \partial_2\Big\langle \varphi_1\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_1(\xi_1,0),\ \frac{1}{2}\partial_1^{-1}u_1(0,\xi_2) + \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}F(\xi_2)\right] + \\ + \varphi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_2(\xi_1,0) + \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}D(\xi_1),\ \frac{1}{2}\partial_2^{-1}u_2(0,\xi_2)\right]\Big\rangle - \\ - \partial_1\Big\langle \psi_1\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(\xi_1,0) + \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}C(\xi_1),\ \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}u_1(0,\xi_2)\right] - \\ - \psi_2\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(\xi_1,0),\ \frac{1}{2}\partial_1^{(-1)}u_2(0,\xi_2) + \frac{1}{2}\partial_2^{(-1)}E(\xi_2)\right]\Big\rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$C(x_1) = \partial_2\partial_1^{(-1)}u_1(x_1,0) - \partial_1\partial_2^{(-1)}u_1(x_1,0), \quad D(x_1) = \partial_2\partial_1^{(-1)}u_2(x_1,0) - \partial_1\partial_2^{(-1)}u_2(x_1,0),$$
$$E(x_2) = \partial_1\partial_2^{(-1)}u_2(0,x_2) - \partial_2\partial_1^{(-1)}u_2(0,x_2), \quad F(x_2) = \partial_1\partial_2^{(-1)}u_1(0,x_2) - \partial_2\partial_1^{(-1)}u_1(0,x_2).$$

Ниже воспользуемся им для решения поставленной задачи Ламе первого рода с граничными условиями (4.3), (4.4). Для этого осуществим ряд преобразований. В граничных условиях введем новые переменные, положив для $\sigma_1(x_1,x_2) \to \sigma_1(0,x_2)$, $\tau_1(x_1,x_2) \to \tau_1(0,x_2)$, $x_1 \ll 1$,

$$x_1 = (2b_1)^{-1}(z_1 + y_1), \quad x_2 = (2b_2)^{-1}(z_1 - y_1).$$

Аналогично, для

$$\sigma_2(x_1,x_2) \to \sigma_2(x_1,0), \quad \tau_2(x_1,x_2) \to \tau_2(x_1,0), \quad x_2 \ll 1$$

примем

$$x_1 = (2b_2)^{-1}(z_2 + y_2), \quad x_2 = (2b_1)^{-1}(z_2 - y_2).$$

В результате получим представления

$$
\begin{gathered}
(b_1x_1-b_2x_2)=y_1,\quad (b_1x_1+b_1x_2)=z_1,\quad (b_2x_1-b_1x_2)=y_2,\quad (b_2x_1+b_1x_2)=z_2,\\
b_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)\mu},\quad b_2=\sqrt{\mu\lambda},\\
\partial_{y_1}=(b_1\partial_1-b_2\partial_2),\quad \partial_{z_1}=(b_1\partial_1+b_2\partial_2),\quad \partial_{y_1}\partial_{z_1}=(b_1^2\partial_1\partial_1-b_2^2\partial_2\partial_2),\\
\partial_{y_2}=(b_2\partial_1-b_1\partial_2),\quad \partial_{z_2}=(b_2\partial_1+b_2\partial_2),\quad \partial_{y_2}\partial_{z_2}=(b_2^2\partial_1\partial_1-b_1^2\partial_2\partial_2),
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_1\left((2b_1)^{-1}(z_1+y_1),(2b_2)^{-1}(z_1-y_1)\right)\equiv\sigma_{10}(y_1,z_1),\\
\tau_1\left((2b_1)^{-1}(z_1+y_1),(2b_2)^{-1}(z_1-y_1)\right)\equiv\tau_{10}(y_1,z_1),\\
\sigma_2\left((2b_2)^{-1}(z_2+y_2),(2b_1)^{-1}(z_2-y_2)\right)\equiv\sigma_{20}(y_2,z_2),\\
\tau_2\left((2b_2)^{-1}(z_2+y_2),(2b_1)^{-1}(z_2-y_2)\right)\equiv\tau_{20}(y_2,z_2).
\end{gathered}
\tag{4.9}
$$

Как и в [21], для произвольной непрерывной функции $w(\xi,\eta)$ имеем соотношения

$$
\begin{gathered}
\partial_{y_n}^{(-1)}w(y_n,z_n)=\int\limits_0^{y_n}w(\xi,\eta)d\xi,\quad \partial_{z_n}^{(-1)}w(y_n,z_n)=\int\limits_0^{z_n}w(\xi,\eta)d\eta,\\
\partial_{y_n}\partial_{z_n}\int\limits_0^{y_n}\int\limits_0^{z_n}w(\xi,\eta)d\xi d\eta=w(y_2,z_2),\\
\partial_{y_n}\partial_{z_n}\partial_{y_n}^{(-1)}\partial_{z_n}^{(-1)}w(\xi,\eta)d\xi d\eta=W(y_2,z_2).
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

Заметим, что для вычисления производных или первообразных у граничных функций по параметрам, обратившимся в ноль, необходимо методом блочного элемента построить с их участием упакованные блочные элементы для уравнения Гельмгольца и вычислить требуемые значения в окрестности границы.

Внесем в (4.6), (4.7) вместо перемещений следующие соотношения

$$
\begin{gathered}
u_1(0,x_2)=\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_{10}(y_1,z_1)-\lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_{10}(y_1,z_1),\\
u_2(0,x_2)=-\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_{10}(y_1,z_1)+(\lambda+2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_{10}(y_1,z_1),\\
u_1\left(x_1{,}0\right)=\mu\partial_1\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\sigma_{20}(y_2,z_2)-(\lambda+2\mu)\partial_2\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\tau_{20}(y_2,z_2),\\
u_2\left(x_1{,}0\right)=-\mu\partial_2\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\sigma_{20}(y_2,z_2)+\lambda\partial_1\partial_{y_2}^{(-1)}\partial_{z_2}^{(-1)}\tau_{20}(y_2,z_2).
\end{gathered}
$$

Докажем, что построенные таким образом выражения представляют решение первой граничной задачи для уравнения Ламе в первом квадранте, разложенное с помощью упакованных блочных элементов.

Для этого, требуется убедиться в выполнении граничных условий (4.3). Ограничимся границей x_2, на границе x_1 проверка производится аналогично. Зная, что для проверки выполнения граничного условия (2.2) для нормального напряжения на оси x_2 необходимо, используя (4.8), (4.9), (4.10), вычислить выражение $\sigma_1\left(0,x_2\right)=(\lambda+2\mu)\partial_1u_1(0,x_2)+\lambda\partial_2u_2(0,x_2)$, получаем следующую последовательность преобразований

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\partial_1u_1(0,x_2)+\lambda\partial_2u_2(0,x_2)=\\
&\qquad=(\lambda+2\mu)\partial_1\left[\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right)-\lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right)\right]+\\
&\qquad+\lambda\partial_2\left[-\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right)+(\lambda+2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right)\right]=\\
&\qquad=(\lambda+2\mu)\partial_1\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right)-\lambda\partial_2\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right)-\\
&\qquad-(\lambda+2\mu)\partial_1\lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right)+\lambda\partial_2(\lambda+2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right)=\\
&\qquad=\left[(\lambda+2\mu)\mu\partial_1\partial_1-\lambda\mu\partial_2\partial_2\right]\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right)=\partial_{y_1}\partial_{z_1}\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right)=\sigma_1\left(0,x_2\right).
\end{aligned}
$$

Здесь принято во внимание соотношение $\partial_{y_1}\partial_{z_1} = (b_1^2\partial_1\partial_1 - b_2^2\partial_2\partial_2)$.

Рассмотрим случай заданных на границе касательных напряжений $\tau_1(0,x_2)$. Подставим в правую часть
$$\tau_1\left(0,x_2\right) = \mu\partial_2 u_1(0,x_2) + \mu\partial_1 u_2(0,x_2)$$
значения $u_1(0,x_2)$, $u_2(0,x_2)$, взятые из (4.6), (4.7). В результате будем иметь

$$\mu\partial_2\left[\mu\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right) - \lambda\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right)\right] +$$
$$+\mu\partial_1\left[-\mu\partial_2\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\sigma_1\left(0,x_2\right) + (\lambda+2\mu)\partial_1\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right)\right] =$$
$$= \left[(\lambda+2\mu)\mu\partial_1\partial_1 - \lambda\mu\partial_2\partial_2\right]\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right) = \partial_{y_1}\partial_{z_1}\partial_{y_1}^{(-1)}\partial_{z_1}^{(-1)}\tau_1\left(0,x_2\right) = \tau_1\left(0,x_2\right).$$

Здесь вновь использовано указанное выше соотношение.

Таким образом, достаточно просто осуществляется разложение решения граничной задачи первого рода для уравнения Ламе в первом квадранте по решениям граничных задач для уравнений Гельмгольца, описывающих вихревые и потенциальные процессы в первом квадранте.

Выводы

Таким образом, на базе нового универсального метода моделирования [19] предложен способ построения уравнений трещин нового типа, выполнен анализ механизма их разрушения и исследован характер возбуждаемых волн напряжений. На основании полученных результатов будет развиваться подход, позволяющий исследовать трещины нового типа в средах сложной реологии, граничные задачи которых описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Одновременно, на примере уравнений Ламе, показано, каким образом сформированные трещины нового типа будут переноситься в среды более сложных реологии применением решений для сред более простых реологий.

Литература [References]

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI 10.1007/s00707-017-2092-0
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko O.M., On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 11. pp. 4727–4739. DOI 10.1007/s00707-018-2255-7
3. Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина. *Доклады Академии наук*, 2019, vol. 485, №2, с. 34–38. [Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., A new type of cracks adding to Griffith-Irwin cracks. *Dokl. Phys.*, 2019, vol. 64, pp. 102–105. DOI 10.1134/S1028335819030042]
4. Griffith, A., VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 221, pp. 163–198. DOI 10.1098/rsta.1921.0006
5. Sator C., Becker W., Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions. *Arch. Appl. Mech.*, 2012, vol. 82, pp. 643–658. DOI 10.1007/s00419-011-0580-6
6. Irwin, G., Fracture dynamics. In *Fracture of metals*. ASM, Cleveland, 1948, p. 147–166.
7. Leblond, J.B., Frelat J., Crack kinking from an interface crack with initial contact between the cracks lips. *Europ. J. Mech. A. Solids*, 2001, vol. 20, pp. 937–951.
8. Loboda, V.V., Sheveleva, A.E., Determining prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, iss. 5, p. 566–572. DOI 10.1023/A:1025139625891
9. Loeber, J.F., Sih, G.C., Transmission of anti-plane shear waves past an interface crack in dissimilar media. *Engineering Fracture Mechanics*, 1973, vol. 146, pp. 699–725. DOI 10.1016/0013-7944(73)90048-9
10. Menshykov, O.V., Menshykov, M.V., Guz, I.A., An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, iss. 5, pp. 735–749. DOI 10.1016/j.enganabound.2010.12.005

11. Mikhas'kiv, V.V., Butrak, I.O., Stress concentration around a spheroidal crack coused by a harmonic wave incident at an arbitrary angle. *Int. Appl. Mech.*, 2006, vol. 42, iss. 1, pp. 61–66. DOI 10.1007/s10778-006-0059-2

12. Rice, J.R., Elastic fracture mechanics concepts for interface cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, pp. 98–103. DOI 10.1115/1.3173668

13. Zhang, Ch., Gross, D., *On wave propagation in elastic solids with cracks.* Comp. Mech. Publ., Southampton, UK, Boston, USA, 1998.

14. Морозов, Н.Ф., *Математические вопросы теории трещин.* Наука, Москва, 1984. [Morozov, N.F., *Matematicheskie voprosy teorii treshchin = Mathematical issues in crack theory.* Nauka, Moscow, 1984. (in Russian)]

15. Черепанов, Г.П., *Механика хрупкого разрушения.* Наука, Москва, 1974. [Cherepanov, G.P., *Mekhanika khrupkogo razrusheniya = A mechanics of brittle fracture.* Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)]

16. Kirugulige, M.S., Tippur H.V., Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp Mech.*, 2006, vol. 46, iss. 2, pp. 269–281. DOI 10.1007/s11340-006-5863-4

17. Huang, Y., Gao, H., Intersonic crack propagation – Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 76–80. DOI 10.1115/1.1410936

18. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Об интегральных уравнениях трещин нового типа. *Вестник Санкт-Петербургского университета математика, механика, астрономия*, 2022, vol. 55, no. 3, pp. 267–274. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On integral equations for cracks of a new type. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta matematika, mekhanika, astronomiya = Bulletin of Saint Petersburg University Mathematics, Mechanics, Astronomy*, 2022, vol. 55, no. 3, pp. 267–274. (in Russian)] DOI 10.21638/spbu01.2022.302

19. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740021040039

20. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Наука, Москва, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]

21. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики. *Доклады Академии наук*, 2020, т. 495, с. 34–38. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., The block element method in the expansion of solutions to complex boundary value problems in mechanics. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2020, vol. 495, p. 34–38. (in Russian)] DOI 10.31857/S2686740020060048

УДК 531.39 DOI 10.31429/vestnik-19-4-48-56

Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя

Н. П. Великанова[1], **П. Г. Великанов**[1,2]✉

[1] Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

[2] Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. В работе предпринята попытка оценить справедливость утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере наиболее нагруженных основных деталей (рабочих лопаток (РЛ) и дисков) двигателей НК-16СТ и НК-16-18СТ. Конструктивно РЛ (сплав ЖС6У-ВИ) и диски (сплав ЭИ698-ВД) полностью идентичны, но отличаются параметрами нагружения. Расчет статической прочности РЛ обоих двигателей проведен по теории стержней переменного сечения (ТСПС) и с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Расчет статической прочности дисков обоих двигателей проведен по методу интегральных уравнений (МИУ) и с помощью МКЭ. Соответствие результатов расчетного исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) РЛ и дисков обоих двигателей их реальной нагруженности было подтверждено данными металлургического исследования РЛ и дисков после длительной эксплуатации. В процессе длительной эксплуатации происходит изменение основных параметров работы двигателей, определяющих НДС. Характеристики механических свойств и долговечности материалов обладают определенным рассеянием, как в исходном состоянии, так и в процессе длительной эксплуатации двигателя, что предопределяет необходимость применения методов математической статистики. Для длительного статического нагружения, характерного для РЛ и дисков обоих двигателей, был использован предложенный И.А. Биргером вероятностный критерий разрушения. Определены долговечности РЛ и дисков обоих двигателей. В результате вычислений оказалось, что оценка долговечности по академику Новожилову Г.В. является более точной для РЛ, чем для дисков турбин обоих двигателей.

Ключевые слова: рабочие лопатки, диски, ЖС6У-ВИ, ЭИ698-ВД, нагруженность, метод конечных элементов, ресурс, долговечность, прочностная надежность, статистический анализ, вероятностный критерий.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанова Н. П., Великанов П. Г. Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 48–56. DOI 10.31429/vestnik-19-4-48-56

Поступила 28 июля 2022 г. После доработки 8 ноября 2022 г. Принято 15 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Великанов П.Г.), вычисления (Великанова Н.П., Великанов П.Г.), написание статьи (Великанов П.Г.), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Великанова Н.П., Великанов П.Г.).

Verification of the Academician Novozhilov G.V. Statement on the Influence of the Error in Determining the Stresses on the Error in Determining the Resource on the Example of the Main Engine Parts

N. P. Velikanova[1], **P. G. Velikanov**[1,2]✉

[1] Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI), 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

[2] Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. The article attempts to assess the validity of the statement of Academician Novozhilov G.V. about the influence of the error in determining stresses on the magnitude of the error in determining the resource on the example of the most loaded main parts (working blades (WB) and disks) of the NK-16ST and NK-16-18ST engines. Structurally, WB (alloy ZhS6U-VI) and disks (alloy EI698-VD) are completely identical, but differ in loading parameters. The calculation of the static strength of both engines was carried out according to the theory of rods of variable cross-section and using the finite element method. The calculation of the static strength of the disks of both engines was carried out using the method of integral equations and using the finite element method. The correspondence of the results of the calculated study of the stress-strain state of the WB and the disks of both engines with their real loading was confirmed by the data of the metallurgical study of the WB and the disks after prolonged operation. During the long-term operation, the main parameters of the engines that determine the stress-strain state change. The characteristics of mechanical properties and durability of materials have a certain scattering, both in the initial state and during long-term operation of the engine, which determines the need for the use of mathematical statistics methods. For the long-term static loading characteristic of the WB and disks of both engines, the probabilistic criterion of destruction proposed by I.A. Birger was used. As a result of the conducted studies, the durability of the WB and disks of both engines were determined. As a result of calculations, it turned out that the durability estimate according to Academician Novozhilov G.V. is more accurate for the WB than for the turbine disks of both engine.

Keywords: working blades, disks, ZhS6U-VI, EI698-VD, loading, finite element method, resource, durability, strength reliability, statistical analysis, probabilistic criterion.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanova, N. P., Velikanov, P. G., Verification of the Academician Novozhilov G.V. statement on the influence of the error in determining the stresses on the error in determining the resource on the example of the main engine parts. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 48–56. DOI 10.31429/vestnik-19-4-48-56

Received 28 July 2022. Revised 8 November 2022. Accepted 15 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The contribution of each co-author to the process of writing an article at different stages of its creation: the idea of the work (Velikanov P.G.), calculations (Velikanova N.P., Velikanov P.G.), writing an article (Velikanov P.G.), making edits and the approval of the final version (Velikanova N.P., Velikanov P.G.).

Введение

В одной из своих статей [1] академик Новожилов Г.В. написал: «Следует иметь в виду, что только 10 %-ная погрешность в определении напряжений приводит почти к двойной погрешности в ресурсе». В представленной статье проведена оценка справедливости вышеприведенного утверждения на примере наиболее нагруженных основных деталей, во многом определяющих получение высоких рабочих параметров и ресурса газотурбинного двигателя (ГТД) — рабочих лопаток (РЛ) и дисков первой ступени турбин высокого давления (ВД) газогенераторов двух двигателей одного семейства: серийные одноконтурные двухвальные газотурбинные наземные установки НК-16СТ и НК-16-18СТ (двигатель НК-16СТ спроектирован в АО «Кузнецов», а двигатель НК-16-18СТ спроектирован на базе двигателя НК-16СТ в ОАО КПП «Авиамотор») для газоперекачивающего агрегата (ГПА), разработанные в АО «Кузнецов» после отработки авиационными двигателями ресурса в летной эксплуатации и на основе конвертирования авиационных двигателей семейства НК-8-2У конструкции Н.Д. Кузнецова. Разрушение основных деталей турбины, как в полете, так и на газоперекачивающих станциях, приводит, как правило, к значительным разрушениям внутри силовой установки. Поэтому проблема точного прогнозирования долговечности основных деталей турбины, сводящего к минимуму вероятность разрушения, всегда была и остается актуальной на всех стадиях создания, доводки и эксплуатации двигателей. Опыт создания приводных агрегатов на базе авиационного двигателя показывает, что примерно до 75 % узлов и деталей базового двигателя удается сохранить [2].

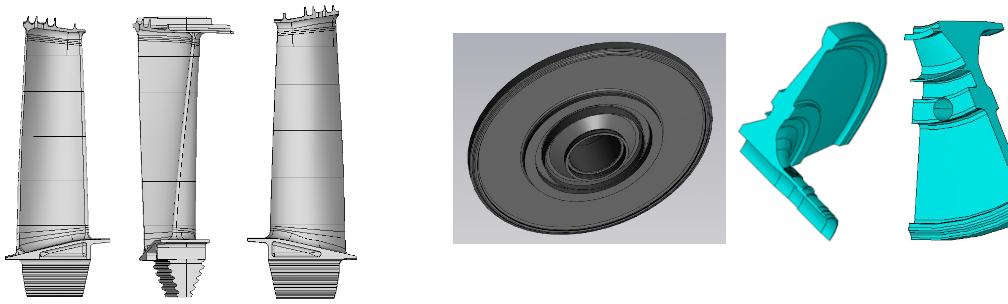


Рис. 1. Геометрические модели: а) РЛ; б) диска

Таблица 1. Результаты расчета статической прочности РЛ (по ТСПС) обоих двигателей

Радиус сечения РЛ R, м	Суммарные напряжения σ_Σ, МПа	Температура $t_л$, °C	Предел длительной прочности, $\sigma_{дл}$, МПа	$K_{\text{м min}}$
0,457	145	739	314	2,16
	149	775	306	2,05

1. Постановка и решение задач

РЛ и диски первой ступени турбин ВД являются наиболее нагруженными для обоих двигателей (НК-16СТ и НК-16-18СТ), т.к. они работают в условиях максимальной частоты вращения ротора и при максимальной температуре. Конструктивно указанные РЛ и диски полностью идентичны, но отличаются параметрами нагружения.

Материал РЛ первой ступени турбин ВД обоих двигателей (рис. 1) — литейный жаропрочный сплав ЖС6У-ВИ равноосной структуры. РЛ отличаются друг от друга распределением по ним температурных полей и газовых сил, а также частотами вращения ротора ВД.

Диски первой ступени турбин ВД обоих двигателей (рис. 1) изготавливаются из деформируемого жаропрочного сплава на никелевой основе ЭИ698-ВД, относящегося к группе дисперсионно-упрочняемых сплавов. Они отличаются распределением по ним температурных полей и частотами вращения ротора ВД.

Расчет статической прочности РЛ обоих двигателей проведен по теории стержней переменного сечения (ТСПС) [3] с начальной закруткой и с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [4]. Расчет статической прочности дисков обоих двигателей проведен по методу интегральных уравнений (МИУ) [5] и с помощью МКЭ [4].

Расчет РЛ и дисков проведен на ресурс 200 000 часов со 100 % его использованием за ресурс. Для расчётов выбран режим с минимальными запасами прочности.

Результаты расчета статической прочности РЛ (по ТСПС) первой ступени турбины ВД обоих двигателей приведены в табл. 1 (σ_Σ — суммарное напряжение в опасном сечении РЛ (с минимальным запасом прочности по местным напряжениям), МПа; $t_л$ — температура в опасном сечении РЛ, °C; $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности материала в опасном сечении РЛ, МПа; $K_{\text{м min}}$ — минимальный коэффициент запаса прочности по местным напряжениям в опасном сечении РЛ).

Как РЛ, так и диски двух двигателей, помимо других методов (ТСПС и МИУ), были рассчитаны с помощью МКЭ. Кратко изложим методику расчета с помощью МКЭ в вариационной постановке [6].

Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом, представима в виде интеграла по всему объему тела V

$$U = \iiint\limits_V W dV = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \, \mathrm{d}V, \tag{1.1}$$

где W — удельная потенциальная энергия деформации для единицы объема упругого тела, ориентированного вдоль произвольно выбранной декартовой системы координат; $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$; $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ — векторы деформаций и напряжений.

Записывая закон Гука в матричном виде $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$, где $[D]$ — матрица упругих постоянных, выражение потенциальной энергии деформации (1.1) можно преобразовать к виду

$$U = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \, \mathrm{d}V. \tag{1.2}$$

Работу внешних сил запишем в матричном виде. Для этого введем вектор перемещений (u, v, w — проекции вектора перемещений вдоль осей)

$$\{\vartheta\}^T = \{u, v, w\}, \tag{1.3}$$

вектор массовых (объемных) сил $\{Q\}$

$$\{Q\}^T = \left\{ Q^{(x)}, Q^{(y)}, Q^{(z)} \right\} \tag{1.4}$$

и вектор поверхностных сил $\{P\}$, действующий на части поверхности S_σ,

$$\{P\}^T = \left\{ P^{(x)}, P^{(y)}, P^{(z)} \right\}. \tag{1.5}$$

Тогда работа внешних сил

$$A = \iiint\limits_V \{Q\}^T \{\vartheta\} \, \mathrm{d}V + \iint\limits_{s_\sigma} \{P\}^T \{\vartheta\} \, \mathrm{d}S. \tag{1.6}$$

Функционал Лагранжа (полная энергия) представим в виде

$$L = U - A, \tag{1.7}$$

откуда, с учетом (1.2) и (1.6), получим выражение

$$L = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \, \mathrm{d}V - \iiint\limits_V \{Q\}^T \{\vartheta\} \, \mathrm{d}V - \iint\limits_{s_\sigma} \{P\}^T \{\vartheta\} \, \mathrm{d}S. \tag{1.8}$$

Для отдельного конечного элемента (КЭ) строится выражение функционала Лагранжа L_m как функции перемещений узлов, принадлежащих только этому КЭ.

Рассмотрим произвольный m-ый КЭ. Введем вектор $\{q^m\}$ — локальный вектор узловых перемещений m-го КЭ (n — число степеней свободы на КЭ)

$$\{q^m\}^T = \{q_1^m, q_2^m, \cdots, q_n^m\}. \tag{1.9}$$

2. Введем аппроксимации перемещений внутри КЭ вида

$$\{\vartheta(x, y, z)\} = [U(x, y, z)] \{q^m\}, \tag{2.1}$$

где $[U]$ — матрица, состоящая из полиномов. По (2.1) можем вычислить вектор деформаций в виде ($[B]$ — матрица, состоящая из производных матрицы $[U]$)

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q^m\}. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1), (2.2) в (1.8), получим выражение функционала Лагранжа L_m на m-ом КЭ

$$L_m = \frac{1}{2} \iiint\limits_{V_m} \{q^m\}^T [B]^T [D] [B] \{q^m\} \, \mathrm{d}V - \iiint\limits_{V_m} \{Q^m\}^T [U] \{q^m\} \, \mathrm{d}V - \\ - \iint\limits_{s_\sigma^m} \{P^m\}^T [U] \{q^m\} \, \mathrm{d}S. \tag{2.3}$$

Так как векторы $\{q^m\}$ являются постоянными на КЭ, их можно вынести за интегралы, после чего (2.3) запишется в виде

$$L_m = \frac{1}{2}\{q^m\}^T[K^m]\{q^m\} - \{F^m\}^T\{q^m\}, \tag{2.4}$$

где

$$[K^m] = \iiint\limits_{V_m} [B]^T[D][B]\,\mathrm{d}V$$

— локальная матрица жесткости КЭ,

$$\{F^m\} = \iiint\limits_{V_m} \{Q^m\}^T[U]\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{s_\sigma^m} \{P^m\}^T[U]\,\mathrm{d}S$$

— локальный вектор узловых сил.

Далее строится функционал Лагранжа L для всего тела как сумма значений функционала Лагранжа L_m по всем КЭ (для этого используются, например, матрицы трансформаций, кинематические матрицы и т.д.). После суммирования функционала Лагранжа по отдельным КЭ получим

$$L = \sum_m L_m = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\} - \{F\}^T\{q\}, \tag{2.5}$$

где $\{q\}$ — глобальный вектор узловых перемещений, $[K]$ — глобальная матрица жесткости всего тела, $\{F\}$ — глобальный вектор внешних сил.

Далее ищем вектор $\{q\}$, который дает минимум функционалу Лагранжа L. Необходимым и достаточным условием минимума функционала Лагранжа L является равенство нулю его первой вариации

$$\delta L = \frac{1}{2}(\{\delta q\}^T[K]\{q\} + \{q\}^T[K]\{\delta q\}) - \{F\}^T\{\delta q\} = 0, \tag{2.6}$$

откуда в силу симметричности матрицы $[K]$ получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$[K]\{q\} = \{F\}. \tag{2.7}$$

Решая эту систему (предварительно осуществив корректировку $[K]$, исходя из известных граничных условий), сначала находим вектор $\{q\}$, а затем по вышеприведенным формулам на каждом КЭ определяем распределение перемещений, деформаций и напряжений.

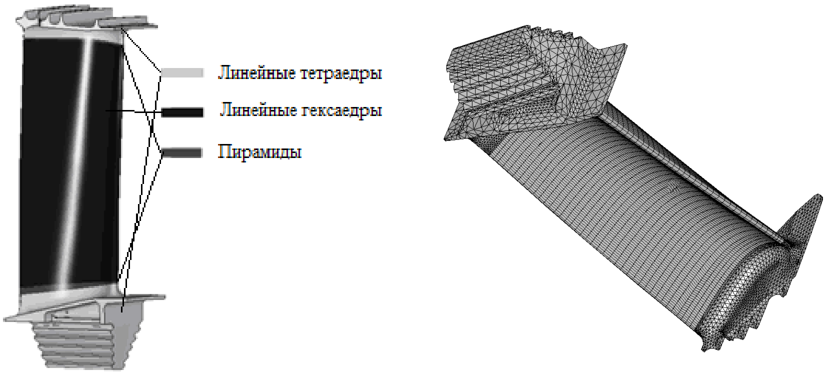
Результаты расчета (с помощью МКЭ) статической прочности РЛ двигателя НК-16СТ (для РЛ двигателя НК-16-18СТ методика аналогична), выполненные в программе Ansys, приведены на рис. 2–4.

Анализ расчетов РЛ двумя методами показал, что качественный характер распределения напряжений вдоль каждого сечения (на входной и выходной кромках, на спинке) и радиуса РЛ одинаков. Количественно суммарные напряжения, определенные с помощью МКЭ, в среднем на 7,7 % выше напряжений, полученных по МСПС.

Различие в результатах расчета объясняется более полным учетом действующих контактных нагрузок и сложностью геометрической модели в МКЭ, которая реализуется, например, в Ansys, в сравнении с ТСПС.

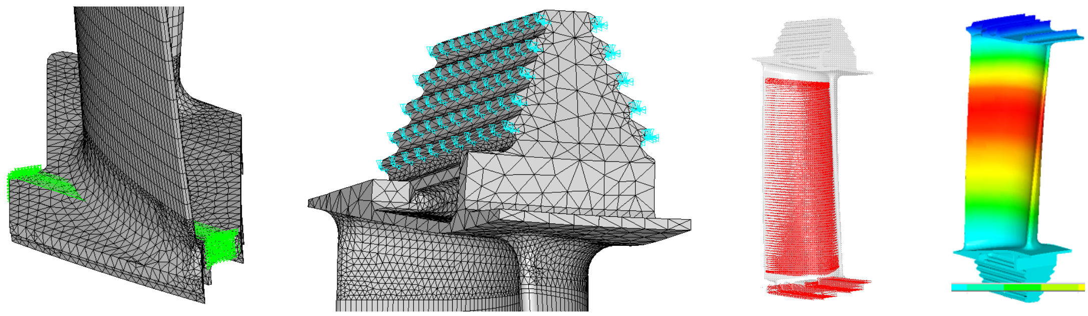
Расчет НДС дисков обоих двигателей выполнен с помощью МКЭ в программе Ansys [4] и с помощью МИУ [3, 5]. Задачи решались в осесимметричной упруго-пластической постановке. Для дискретизации области диска использовались изопараметрические КЭ с линейной и квадратичной аппроксимациями поля перемещений в пределах КЭ.

На рис. 5 приведены результаты расчета с помощью МКЭ в Ansys. В табл. 2 приведены результаты расчетов с помощью МИУ и МКЭ.



а) б)

Рис. 2. а) используемые типы изопараметрических КЭ; б) КЭ-ая модель РЛ



а) б) в) г)

Рис. 3. а) моделирование с помощью контактных элементов взаимодействия РЛ по бандажной полке; б) граничные условия закрепления по замку РЛ; в) распределение газовых сил, действующих на РЛ; г) распределение температурного поля (режим «$t_{\text{н}} = +15^{\circ}\text{C}$»)

Соответствие результатов расчетного исследования НДС РЛ и дисков обоих двигателей их реальной нагруженности подтверждается данными металлургического исследования РЛ и дисков после длительной эксплуатации [7].

Используя методы регрессионного анализа, для РЛ и дисков были получены аппроксимирующие эмпирические зависимости средних значений характеристик механических свойств от наработки.

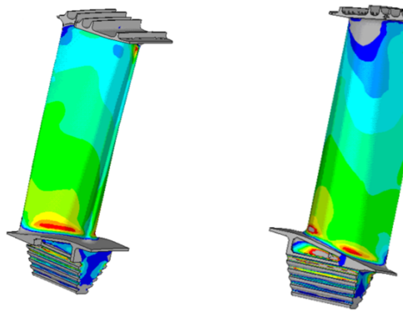
3. Вероятностный метод оценки долговечности РЛ и дисков турбин

Предлагаемый метод прогнозирования долговечности РЛ и дисков турбин обоих двигателей по параметру длительной прочности основан на статистической информации об изменении нагруженности и характеристик сопротивления материала РЛ и дисков турбин длительному статическому нагружению в процессе длительной эксплуатации.

Для длительного статического нагружения, характерного для РЛ и дисков турбин, И.А. Биргером в [8] был предложен двумерный вероятностный критерий разрушения

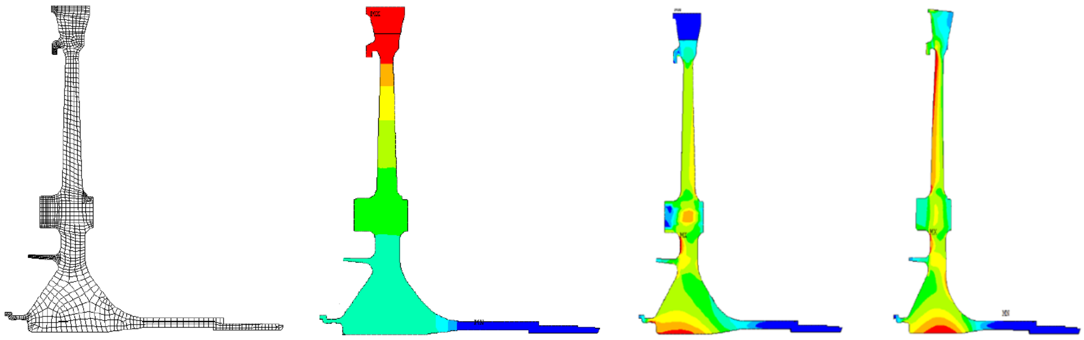
$$P_{\text{разр}} = ver(\sigma_r < \sigma_q, \tau_r < \tau_q), \tag{3.1}$$

где $\sigma_r = \sigma_{\text{дл}}$ — предел длительной прочности материала РЛ и диска; $\sigma_q = \sigma_{\text{экв}}$ — интенсивность напряжения РЛ и диска; $\tau_r = \tau_p$ — долговечность материала РЛ и диска в часах; τ_q — время нагружения РЛ и диска в эксплуатации в часах.



а) б)

Рис. 4. Интенсивность напряжений по критерию прочности Мизеса–Губера–Генки:
а) со стороны корытца РЛ; б) со стороны спинки РЛ



а) б) в) г)

Рис. 5. а) КЭ-ая модель диска; б) распределение температур в диске. Интенсивность напряжений по критерию прочности Мизеса–Губера–Генки в диске: в) двигателя НК-16СТ; г) двигателя НК-16-18СТ

Преобразуем выражение (3.2) к виду

$$P_{\text{разр}} = ver(\sigma_r/\sigma_q < 1, \tau_r/\tau_q < 1) = ver(K^*_M < 1, K^*_\tau < 1), \tag{3.2}$$

где K^*_M и K^*_τ — статистические запасы прочности и долговечности, вычисленные по статистически экстремальным значениям параметров.

Для РЛ и дисков турбин выражения для статистических запасов прочности и долговечности представляют собой функции от односторонних толерантных коэффициентов $K_{S1}, \ldots, K_{S4}$ [9] для нормального распределения, выбранных уровней значимости α и доверительной вероятности $P_{\text{Д}}$, а также объема выборок $n_1, \ldots, n_4$ и искомого значения долговечности $\tau_{\text{э}}$:

$$K^*_M = K^*_M(\alpha, P_{\text{Д}}, n, \tau) = \frac{\sigma_{\text{дл}_{\min}(\tau)}}{\sigma_{\text{экв}_{\max}(\tau)}} = \frac{\overline{\sigma_{\text{дл}\tau}} - K_{S_1}(\alpha, P_{\text{Д}}, n_1) S_{\sigma_{B\tau}}}{\overline{\sigma_{\text{экв}}} + K_{S_2}(\alpha, P_{\text{Д}}, n_2) S_{\sigma_{\text{экв.}\tau}}}; \tag{3.3}$$

$$K^*_\tau = K^*_\tau(\alpha, P_{\text{Д}}, n, \tau) = \frac{\tau_{p_{\min}(\tau)}}{\tau_{q_{\max}(\tau)}} = \frac{\overline{\tau_{p\tau}} - K_{S_3}(\alpha, P_{\text{Д}}, n_3) S_{\tau_{p\tau}}}{\overline{\tau_q} + K_{S_4}(\alpha, P_{\text{Д}}, n_4) S_{\tau_{q.\tau}}}. \tag{3.4}$$

Здесь $\overline{\sigma_{\text{дл}}\tau}$, $\overline{\sigma_{\text{экв}}}$, $\overline{\tau_{p\tau}}$, $\overline{\tau_q}$ — средние значения (предела длительной прочности, эквивалентного напряжения, времени до разрушения, времени нагружения соответственно) рассматриваемых параметров; $S_{\sigma_{B\tau}}$, $S_{\sigma_{\text{экв.}\tau}}$, $S_{\tau_{p\tau}}$, $S_{\tau_{q\tau}}$ — средние квадратические отклонения (предела длительной прочности, эквивалентного напряжения, времени до разрушения, времени нагружения соответственно) рассматриваемых параметров.

Таблица 2. Напряжения, запасы прочности по местным напряжениям ($k_{\text{М}}^{\min}$) и несущей способности ($k_{\text{Ь}1}^{\min}$, $k_{\text{Ь}2}^{\min}$) в дисках обоих двигателей

Двигатель	$\sigma_r^{\max}$ МКЭ	σ_φ^{max} МКЭ	$\sigma_{\text{i}}^{\max}$ МКЭ	$k_{\text{М}}^{\min}$(МКЭ)/$k_{\text{Ь}1}^{\min}$/$k_{\text{Ь}2}^{\min}$ МИУ
	МПа			–
НК-16СТ	736	576,3	629,4	1,87 (1,52)/1,65/1,41
НК-16-18СТ	797,2	546,9	673,7	1,32 (1,3)/1,52/1,19

Тогда условия разрушения в соответствии с критериями (3.3) и (3.4) можно представить в виде

$$K_M^* = \varphi_1 \left(\alpha, P_{\text{Д}}, n_1, n_2, \tau_{\text{э}}\right) = 1; \tag{3.5}$$

$$K_\tau^* = \varphi_2 \left(\alpha, P_{\text{Д}}, n_3, n_4, \tau_{\text{э}}\right) = 1. \tag{3.6}$$

Из решения уравнений (3.5) и (3.6) относительно $\tau_{\text{э}}$ получаем два значения долговечности в часах, из которых берем минимальное значение.

В результате проведенных исследований были определены долговечности РЛ и дисков обоих двигателей. В результате дальнейших вычислений отношение долговечностей (долговечность по прогнозу академика Новожилова Г.В. к интерполированной долговечности, вычисленной с помощью вероятностного метода по соответствующим интенсивностям напряжений) для обоих двигателей составило: для РЛ — 1,15, а для диска — 1,68, т.е. оценка долговечности по академику Новожилову Г.В. является более точной для РЛ (погрешность 15 %), чем для дисков (погрешность 68 %) для обоих двигателей.

Заключение

Был выполнен расчет статической прочности РЛ обоих двигателей по ТСПС с начальной закруткой и с помощью МКЭ. Был выполнен расчет статической прочности дисков обоих двигателей по МИУ и с помощью МКЭ. Данными металлургического исследования РЛ и дисков после длительной эксплуатации было подтверждено соответствие результатов расчетного исследования НДС РЛ и дисков обоих двигателей их реальной нагруженности.

Для длительного статического нагружения, характерного для РЛ и дисков обоих двигателей, был использован предложенный И.А. Биргером двумерный вероятностный критерий разрушения.

В результате проведенных исследований определены долговечности РЛ и дисков обоих двигателей. В результате дальнейших вычислений оказалось, что оценка долговечности по академику Новожилову Г.В. является более точной для РЛ, чем для дисков турбин обоих двигателей.

Литература [References]

1. Новожилов, Г.В., Надежность широкофюзеляжных самолетов. *Вестник АН СССР*, 1985, № 8, с. 85–92. [Novozhilov, G.V., Reliability of wide-body aircraft. *Vestnik AN SSSR = Bulletin of the USSR Academy of Sciences*, 1985, no. 8, pp. 85–92. (in Russian)]
2. Зрелов, В.А., Карташов, Г.Г., *Двигатели НК*. Самарский Дом печати, Самара, 1999. [Zrelov, V.A., Kartashov, G.G., *Dvigateli NK = NK engines*. Samara House of Printing, Samara, 1999. (in Russian)]
3. Великанова, Н.П., Закиев, Ф.К., Великанов, П.Г., *Расчет на прочность основных деталей газотурбинных двигателей: Учебное пособие*. Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, Казань, 2011. [Velikanova, N.P., Zakiev, F.K., Velikanov, P.G., *Calculation of the strength of the main parts of gas turbine engines: Textbook*. Publishing house of Kazan State Technical University, Kazan, 2011. (in Russian)]
4. Бондарчук, П.В., Фалалеев, С.В., *Прочностное проектирование лопаток и дисков ГТД в конечно-элементном комплексе ANSYS: учеб. пособие*. Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, Самара, 2006. [Bondarchuk, P.V., Falaleev, S.V., *Strength design of turbine engine blades and disks in the ANSYS finite element complex: textbook*. Publishing House of the Samara State Aerospace University, Samara, 2006. (in Russian)]

5. Кинасошвили, Р.С., *Расчет на прочность дисков турбомашин.* Оборонгиз, Москва, 1954. [Kinasoshvili, R.S., *Calculation of the strength of turbomachine discs.* Oborongiz, Moscow, 1954. (in Russian)]

6. Голованов, А.И., Бережной, Д.В., *Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел.* Изд-во «ДАС», Казань, 2001. [Golovanov, A.I., Berezhnoy, D.V., *Finite element method in mechanics of deformable solids.* Publishing house "DAS", Kazan, 2001. (in Russian)]

7. Протасова, Н.А., Великанова, Н.П., Великанов, П.Г., Ахмадеев, А.А., Салих, И.Ш.С., Закономерности снижения значений прочностных характеристик материала дисков турбины двигателей газоперекачивающих агрегатов после различных сроков эксплуатации. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2020, № 2, с. 38–44. [Protasova, N.A., Velikanova, N.P., Velikanov, P.G., Akhmadeev, A.A., Salih, I.Sh.S., Patterns of the decrease in the values of the strength characteristics of the material of the turbine disks of the engines of gas compressor units after various periods of operation. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika = Izvestiya of Universities. Aviation technology*, 2020, no. 2, pp. 38–44. (in Russian)]

8. Биргер, И.А., Вероятность разрушения и запасы прочности при многомерных критериях разрушения. *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении. Труды ЦИАМ. № 1109.* 1985, вып. 3, с. 7–22. [Birger, I.A., The probability of destruction and safety margins under multidimensional criteria of destruction. *Problemy prochnosti i dinamiki v aviadvigatelestroenii. Trudy TsIAM. № 1109 = Problems of strength and dynamics in aircraft engine building. Proceedings of CIAM. No 1109.* 1985, iss. 3, pp. 7–22. (in Russian)]

9. Большев, Л.Н., Смирнов, Н.В., *Таблицы математической статистики.* Наука, Москва, 1983. [Bolshev, L.N., Smirnov, N.V., *Tables of mathematical statistics.* Nauka, Moscow, 1983. (in Russian)]

УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-57-67

Исследование возможности возникновения дискретного спектра в блочной структуре основания и штампа и характера волнового поля, излучаемого вне деформируемого штампа

О.В. Евдокимова✉, **О.М. Бабешко**, **В.А. Бабешко**, **Д.А. Хрипков**, **А.С. Мухин**, **В.С. Евдокимов**, **С.Б. Уафа**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Евдокимова Ольга Владимировна; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Аннотация. В ранее опубликованной работе авторов исследована постановка и решение контактной задачи с деформируемым штампом. Показана корректность постановки задачи, состоящая в возможности определения всех параметров решения, в частности возникающих в этих контактных задачах функционалов от искомых контактных напряжений. В настоящей работе продолжается исследование особенностей решений контактных задач с деформируемым штампом. В отличие от случая контактных задач с абсолютно твердым штампом, в случае деформируемых штампов могут появиться дискретные спектры у оператора смешанной задачи. В работе выявлены соотношения трансцендентного типа, которые могут содержать этот спектр. В случае полубесконечного деформируемого штампа это соотношение не содержит вещественных точек спектра. Изучен вопрос поведения волновых полей, возбуждаемых на поверхности полубесконечным деформируемым штампом. В основе исследования использовался недавно разработанный универсальный метод моделирования, допускающий применение как в граничных задачах для дифференциальных уравнений, так и в некоторых типах интегральных уравнений. Продемонстрировано построение упакованных блочных элементов в квадрантах декартовой системы координат.

Ключевые слова: контактная задача, деформируемый штамп, интегральное уравнение, многослойная среда, блочные элементы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00129).

Цитирование: Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бабешко В.А., Хрипков Д.А., Мухин А.С., Евдокимов В.С., Уафа С.Б. Исследование возможности возникновения дискретного спектра в блочной структуре основания и штампа и характера волнового поля, излучаемого вне деформируемого штампа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 57–67. DOI 10.31429/vestnik-19-4-57-67

Поступила 15 ноября 2022 г. После доработки 22 ноября 2022 г. Принято 23 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

Investigation of the Possibility of a Discrete Spectrum in the Block Structure of the Base and Stamp and the Nature of the Wave Field Emitted Outside the Deformable Stamp

O.V. Evdokimova✉, **O.M. Babeshko**, **V.A. Babeshko**, **D.A. Khripkov**, **A.S. Mukhin**, **V.S. Evdokimov**, **S.B. Uafa**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga V. Evdokimova; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. In the previously published work of the authors, the formulation and solution of the contact problem with a deformable stamp is investigated. Correctness is shown the formulation of the problem, which consists in the possibility of determining all the parameters of the solution. In particular, the functionals arising in these contact problems from the desired contact voltages. In this paper, the study of the features of solutions of contact problems with a deformable stamp continues. In contrast to the case of contact problems with an absolutely solid stamp, in the case of deformable stamps, discrete spectra may appear in the operator of a mixed problem. The paper identifies transcendental type relations that may contain this spectrum. In the case of a semi-infinite deformable stamp, this relation does not contain real points of the spectrum. The question of the behavior of wave fields excited on the surface by a semi-infinite deformable stamp is studied. The study was based on a newly developed universal modeling method that allows application both in boundary value problems for differential equations and in some types of integral equations. The construction of packed block elements in the quadrants of the Cartesian coordinate system is demonstrated.

Keywords: contact problem, deformable stamp, integral equation, multilayer medium, block elements.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00129).

Cite as: Evdokimova, O. V., Babeshko, O. M., Babeshko, V. A., Khripkov, D. A., Mukhin, A. S., Evdokimov, V. S., Uafa, S. B., Investigation of the possibility of a discrete spectrum in the block structure of the base and stamp and the nature of the wave field emitted outside the deformable stamp. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 57–67. DOI 10.31429/vestnik-19-4-57-67

Received 15 November 2022. Revised 22 November 2022. Accepted 23 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

Для более полного исследования особенностей контактных задач с деформируемым штампом в работе анализируется возможность получения соотношений, описывающих появление точек дискретного спектра, который ранее был предсказан академиком И.И. Воровичем [1, 2]. Им было установлено, что отклонение границы полосы от прямолинейного положения может приводить к появлению новых значений дискретного спектра и резонансов в этом деформируемом объекте. В основу анализа положен подход, разработанный в работе авторов [3]. Работа посвящена дальнейшему развитию изложенного метода и анализу одного из полученных результатов. Он связан с изучением как уравнений, которые, возможно, описывают спектральные свойства в контактной задаче с полубесконечным деформируемым штампом, так и с исследованием возбуждаемых вне штампа волновых полей. Следуя [3], рассмотрим многослойную. среду конечной толщины, на верхней границе которой вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в области $\Omega(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ действует деформируемый штамп. Методом, описанным в [4], смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения для абсолютно жесткого штампа. Заметим, что исследованиям контактных задач с абсолютно жестким штампом посвящено огромное количество исследований [5–20]. Однако ни в одной из них не обнаружено контактных задач с деформируемым штампом. Интегральных уравнений абсолютно жестким штампом недостаточно для исследования контактных задач с деформируемым штампом вида. Они являются вспомогательной составляющей и в нашем случае имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{A}^{\infty} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)q(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty.$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{1}$$

Здесь $q(x_1,x_2)$ — контактные напряжения под штампом, $f(x_1,x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1,x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1,\alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения. Учет деформируемости штампа требует построить в областях $\Omega_1(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы. Ниже рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях

$$\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2\right] \varphi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2). \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x_1, x_2)$ — вертикальное перемещение в зоне контакта, $q(x_1, x_2)$ контактные напряжений, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t(x_1, x_2)$ — заданные внешние воздействия сверху на объект. Кроме этого, задаются граничные условия, которые имеют для задачи A в области $\Omega_1(A \leqslant x_1 \leqslant \infty, \ |x_2| \leqslant \infty)$ вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \to A.$$

1. Применение метода блочного элемента

Следуя [3], поставленая двумерные задачи (1) сводятся к одномерной с вещественным параметром α_2 в результате применения преобразования Фурье по координате x_2.

Тогда интегральное уравнение (1) принимает вид

$$\begin{gathered}\int\limits_A^\infty k_0(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 = f(x_1), \quad q(\xi_1) = q(\xi_1, \alpha_2), \quad k_0(x_1) = k(x_1, \alpha_2), \\ k_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1, \alpha_2), \quad K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1) R_0(\alpha_1).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Ради краткости считаем, что функция $K_0(\alpha_1)$ является четной, мероморфной и на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K_0(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $\operatorname{Im} \alpha_1 = 0$.

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для смешанных задач на многослойной среде [4].

Функция $K_0(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей.

Граничная задача (1) для блочного элемента становятся одномерными

$$\begin{gathered}(\partial^2 x_1 + k^2) \varphi(x_1) = g(x_1), \quad g(x_1) = q(x_1) - t(x_1), \quad k^2 = p^2 - \alpha^2, \\ \varphi(x_1) = \varphi(x_1, \alpha_2), \quad g(x_1) = g(x_1, \alpha_2), \\ \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(A), \quad x_1 \to A, \quad x_1 \in \Omega_1.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Применив к (1.2) метод блочного элемента [3], получим следующее представление для упакованных блочных элементов. В задаче получаем внешнюю форму в виде

$$\omega_A(\alpha_1) = i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + G_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - G_A(\alpha_1),$$

$$G_A(\alpha_1) = Q_A(\alpha_1) - T_A(\alpha_1), \quad \omega_A(k) = 0,$$

$$G_A(\alpha_1) = \int\limits_A^\infty g_A(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha, \quad Q_A(\alpha_1) = \int\limits_A^\infty q_A(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad T_A(\alpha_1) = \int\limits_A^\infty t_A(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Вертикальные перемещения, от блочных элементов, имеют вид

$$\varphi_A(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_A(\alpha)}{\alpha^2 - k^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \tag{1.3}$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем перемещения (1.1) $f_A(x_1)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещения упакованного блочного элемента (1.3) $\varphi_A(x_1)$ в обеих задачах, предварительно применив к ним преобразование Фурье. Это дает соотношения

$$K_0(\alpha_1)Q_A(\alpha_1) + E_A(\alpha_1) = -(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}Q_A(\alpha_1) + S_A(\alpha_1),$$

$$S_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\left\langle i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + T_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A}\right\rangle.$$

Здесь $E_A(\alpha_1)$ — часть поверхности границы многослойной среды, свободная от контакта. Объединив члены, содержащие преобразования Фурье контактных напряжений и применив к этим равенствам обращение Фурье по параметру α_1, получаем два интегральных уравнения Винера–Хопфа

$$\begin{gathered}\int\limits_A^\infty k(x_1 - \xi_1)q_A(\xi_1)d\xi_1 = s_A(x_1), \quad A \leqslant x_1 \leqslant \infty, \\ k(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1, \quad K(\alpha_1) = K_0(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Заметим, что уравнение содержит в правой части неизвестный функционал $Q_A(k)$ от искомого решения интегрального уравнения, который должен быть найден после обращения интегральных уравнений. Это одна из особенностей, присущая контактным задачам для деформируемых штампов, взятых в виде упакованных блочных элементов. Указанные функции являются отношениями целых функций $K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1)R_0(\alpha_1)$ и добавление к ним более быстро убывающих рациональных функций $(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}$ не изменяет свойств мероморфных функций. Изменяются лишь величины нулей и полюсов, число которых возрастает. Таким образом, функции $K(\alpha_1)$ (1.4) остаются мероморфными. Для дальнейшего опишем свойства рассматриваемых мероморфных функций. Предполагается, что мероморфная функция $K_0(\alpha_1)$, являющаяся преобразованием Фурье ядра, обладает следующими свойствами. Функции $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$ имеют первый порядок и конечный тип целых функций, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, имеет вид [3]

$$\begin{gathered}\xi_s = ir(s + 0{,}5)(1 + o(1)), \quad s \to \infty, \\ z_m = irm(1 + o(1)), \quad s \to \infty, \quad r = \mathrm{const} > 0.\end{gathered} \tag{1.5}$$

В динамических смешанных задачах в числе первых нулей и полюсов в (1.5) могут быть вещественные числа [4]. Имея целью исследовать уравнения, используя описанные нули, построим четные целые функции $R\,(\alpha_1)$, $P\,(\alpha_1)$ в форме бесконечных произведений [3]. Последние будут иметь вид

$$\begin{gathered}R\,(\alpha_1) = R_\mp\,(\alpha_1)\,R_\pm\,(\alpha_1)\,, \quad R_\pm\,(\alpha_1) = T_\mp e^{\mp i\alpha_1}\prod_{s=1}^\infty\left(1 \pm \frac{\alpha_1}{z_s}\right)e^{\frac{\alpha_1}{\pm z_s}}, \quad T_\mp = \mathrm{const}, \\ P\,(\alpha_1) = P_\mp\,(\alpha_1)\,P_\pm\,(\alpha_1)\,, \quad P_\pm\,(\alpha_1) = S_\mp e^{\mp i\alpha_1}\prod_{s=1}^\infty\left(1 \pm \frac{\alpha_1}{\xi_s}\right)e^{\frac{\alpha_1}{\pm \xi_s}}, \quad S_\mp = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{1.6}$$

которые после деления на $P\,(\alpha_1)$ дадут мероморфные функции, обозначенные как $K(\alpha_1) = P^{-1}(\alpha_1)R(\alpha_1)$. Их нулями являются $\pm z_m$, а полюсами — $\pm\xi_s$.

С помощью полученных функций (1.6) построим мероморфные функции следующего вида $K_\pm(\alpha_1) = P_\pm^{-1}\,(\alpha_1)\,R_\pm\,(\alpha_1)$, которые представляют результат интегральной факторизации функции $K(\alpha_1)$. Положим в (1.4) $P_{0\pm}\,(\alpha_1) = (\alpha_1 \pm k)^{-1}P_\pm\,(\alpha_1)$.

2. Решения интегральных уравнений

В работе [3] показано, что интегральное уравнение разрешимо, корректно и позволяет найти все неизвестные функции.

Для решения уравнения Винера–Хопфа продолжим его новой неизвестной функцией $e(x_1)$ в дополнении $-\infty \leqslant x_1 < A$ к зоне контакта на границе многослойной среды и получим функциональное уравнение в виде

$$K(\alpha_1)Q_A^+(\alpha_1) = S_A^+(\alpha_1) + E_A^-, \quad S_A^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1), \quad Q_A^+ \equiv Q_A(\alpha_1).$$

В результате применения алгоритма метода Винера–Хопфа [4], построим представление решения, которое принимает вид

$$Q_A^+(\alpha_1) = K_+^{-1}(\alpha_1)\{K_-^{-1}(\alpha_1)S_A^+(\alpha_1)\}^+.$$

Здесь приняты обозначения, заимствованные из [4]

$$\{R(\alpha_1)\}^{\pm} = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\xi)}{\xi-\alpha_1}d\xi, \quad \pm\operatorname{Im}\alpha_1 > 0. \tag{2.1}$$

В результате несложных преобразований приходим к представлению решения задачи A в виде

$$Q_A(\alpha_1) = Q_A(k)N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1), \quad Q_A(\alpha_1) \equiv Q_A^+(\alpha_1),$$

$$N_1(\alpha_1) = P_{0+}(\alpha_1)(\alpha_1+k)R_+^{-1}(\alpha_1)\{P_{0-}(\alpha_1)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1+k)^{-1}e^{i(\alpha_1-k)A}\}^+,$$

$$\begin{aligned}N_2(\alpha_1) = {} & P_{0+}(\alpha_1)(\alpha_1+k)R_+^{-1}(\alpha_1)\times\\ & \times\Big\{P_{0-}(\alpha_1)(\alpha_1-k)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}\Big\langle i(\alpha_1-k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A}+\\ & + T_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A}\Big\rangle\Big\}^+.\end{aligned}$$

Из последнего соотношения при $\alpha_1 = k$ находится искомый функционал

$$Q_A(k) = [1-N_1(k)]^{-1}N_2(k),$$

$$N_1(k) = 2kP_{0+}(k)R_+^{-1}(k)\{P_{0-}(\alpha_1)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1+k)^{-1}e^{i(\alpha_1-k)A}\}_k^+,$$

$$\begin{aligned}N_2(k) = {} & 2kP_{0+}(k)kR_+^{-1}(k)\times\\ & \times\Big\{P_{0-}(\alpha_1)(\alpha_1-k)R_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}\Big\langle i(\alpha_1-k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A}+\\ & + T_A(\alpha_1) - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A}\Big\rangle\Big\}_k^+.\end{aligned}$$

Окончательно решение принимает вид

$$Q_A(\alpha_1) = [1-N_1(k)]^{-1}N_2(k)N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1).$$

Здесь $\{R(\alpha_1)\}_k^+$ означает, что берется $\alpha_1 = k$ после вычисления интеграла (2.1).

Применив двойное обращение Фурье к построенному решению, получим решение трехмерной смешанной задачи.

3. О свойствах решения для деформируемого штампа

1. Возможность существования дискретного спектра в задаче для полубесконечного штампа сводится к исследованию свойств решения

$$q_A(x_1) = \int\limits_{\Gamma} Q_A(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} dx_1,$$

$$Q_A(\alpha_1) = [1 - N_1(k)]^{-1} N_2(k) N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1).$$

Очевидно, спектр может быть определен путем исследования нулей знаменателя построенного решения. Таким знаменателем является функция, которая дает ответ о возможности существования дискретного спектра у оператора граничной задачи, то есть

$$1 - N_1(k) = 0. \tag{3.1}$$

Входящая в уравнение (3.1) функция $N_1(k)$ имеет представление

$$N_1(k) = 2kP_{0+}(k) R_+^{-1}(k) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{P_{0-}(\xi)}{R_-(\xi)(\xi^2 - k^2)} e^{i(\xi-k)A} d\xi.$$

Для упрощения достаточно сложной тренцендентной формулы относительно параметра k рассмотрим случай, когда $A = 0$. Это означает, что система координат сдвинута так, что край штампа находится в начале координатной системы. Естественно, это не отразится на контактных напряжениях, которые будут рассматриваться в сдвинутой системе координат. В этом случае подынтегральная функция упрощается и интеграл вычисляется. В результате вычислений имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{P_{0-}(\xi)}{R_-(\xi)(\xi + k)(\xi - k)} d\xi = \frac{P_{0-}(-k)}{2kR_-(-k)}.$$

Функция $N_1(k)$ принимает вид

$$N_1(k) = \frac{P_{0+}(k)}{R_+(k)} \frac{P_{0-}(-k)}{R_-(-k)}.$$

Изучаемое уравнение описывается соотношением

$$1 - \frac{P_{0+}(k) P_{0-}(-k)}{R_+(k) R_-(-k)} = 0.$$

С учетом того, что из свойств факторизованных четных функций $D(k)$ следует соотношение $D_-(-k) = D_+(k)$, получаем следующее уравнение относительно параметра k:

$$R_+^2(k) - P_{0+}^2(k) = 0. \tag{3.2}$$

Для дальнейшего исследования этого уравнения необходимо, во первых, выявить характер зависимости функций от параметра k и, во-вторых, факторизовать в виде произведения функцию вида

$$T(\alpha_1) = \frac{P(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 - k^2) R(\alpha_1)},$$

$$P(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2) P_0(\alpha_1), \quad R(\alpha_1) = R_0(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2) + P_0(\alpha_1).$$

В этом соотношении явно выделен параметр k, который необходимо определить из уравнения

Факторизованные в виде произведения функции описываются интегралами

$$T_+(\alpha_1) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln T(\xi)}{\xi - \alpha_1} d\xi, \quad \operatorname{Im} \alpha_1 > 0.$$

Это позволит получить в интегральном виде функции, входящие в уравнение (3.1) для определения нулей k. Исходя из поставленной контактной задачи для полубесконечного штампа в условиях излучения энергии на бесконечность, есть основание предположить, что уравнение столь сложной структуры не будет иметь вещественных дискретных нулей параметра k, вопрос может быть изучен численно. Однако можно полагать, что будет иметь место волнообразное изменение функции $1 - N_1(k)$, что может обеспечить существование максимумов и минимумов у контактных напряжений под деформируемым штампом.

2. Поведение волнового поля $g(x_1)$ на поверхности многослойного основания вычисляется по формуле

$$g(x_1) = \int\limits_0^\infty k_0(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1, \quad x_1 < 0.$$

Эту формулу можно представить в виде

$$g(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \frac{R(\alpha_1) Q(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 - k^2) P_0\,(\alpha_1)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad x_1 < 0.$$

Вычисления интеграла Дирихле по однократным вычетам дает следующее представление волнового поля вне зоны контакта

$$g(x_1) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R(\xi_n) Q(\xi_n)}{P'(\xi_n)} e^{-i\xi_n x_1},$$

$$\xi_0 = k, \quad \operatorname{Im} \xi_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad x_1 < 0.$$

Здесь N — число вещественных нулей функции $P_0(\xi_n)$.

Участвующие в этом представлении вещественные полюсы формируют волновое поле. Возбуждаемые деформируемым штампом волны на свободной поверхности в контактных задачах совпадают с появляющимися в случае абсолютно жестких штампов и дополняются гармоникой деформируемого штампа e^{-ikx_1}. Амплитуды возбуждаемых волн отличаются от амплитуд абсолютно жестких штампов.

4. Построение упакованных блочных элементов и их фактор-типология для скалярной задачи в первом и других квадрантах

Объектами топологического пространства является совокупность решений граничных задач для уравнения Гельмгольца. Введем в прямоугольной системе координат $ox_1x_2x_3$ четыре полуплоскости с нормалями к границам, совпадающими с положительными или отрицательными координатными полуосями. Введем их обозначения: $\Omega_1(|x_1| \leqslant \infty,\ x_2 > 0)$, $\Omega_2(|x_2| \leqslant \infty,\ x_1 < 0)$, $\Omega_3(|x_1| \leqslant \infty,\ x_2 < 0)$, $\Omega_4(|x_2| \leqslant \infty,\ x_1 > 0)$. В каждой области, рассматриваемой в качестве носителя, решим граничные задачи для уравнения Гельмгольца с приведенными ниже граничными условиями вида

$$(\Delta + p^2) g_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\partial_2 g_1(x_1,0) = q_1(x_1), \quad g_1(x_1, x_2) \in \Omega_1, \qquad \partial_1 g_2(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_2(x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

$$\partial_2 g_3(x_1,0) = q_1(x_1), \quad g_3(x_1, x_2) \in \Omega_3, \qquad \partial_1 g_4(0, x_2) = q_2(x_2), \quad g_4(x_1, x_2) \in \Omega_4.$$

Здесь $q_n(x_n)$, $n = 1, 2$ — некоторые гладкие функции.

В дальнейшем введем в рассмотрение двумерный $\mathbf{F}_2$ и одномерный $\mathbf{F}_1$ соответственно операторы преобразования Фурье, положив

$$\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_n), \quad Q(\alpha_n) = \mathbf{F}_1(\alpha_n) q(x_n) = \int\limits_l q(x_n) \exp i\alpha_n x_n dx_n,$$

$$G(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)g(x_1,x_2)=\iint\limits_{\Omega} g(x_1,x_2)\exp i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)dx_1dx_2.$$

Здесь l, Ω являются носителями функций интегрирования.

Построим решения граничных задач в форме упакованных блочных элементов. Последние имеют вид

$$g_1(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)\alpha_{21+}}(\alpha_2-\alpha_{21+})e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2$$
$$g_2(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)\alpha_{11-}}(\alpha_{11-}-\alpha_1)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 \tag{4.1}$$

$$g_3(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{Q_1(\alpha_1)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)\alpha_{21-}}(\alpha_{21-}-\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2,$$
$$g_4(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{Q_2(\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)\alpha_{11+}}(\alpha_1-\alpha_{11+})e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2, \tag{4.2}$$

$$\alpha_{11+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2},\quad \alpha_{21+}=i\sqrt{\alpha_1^2-p_1^2},\quad \alpha_{11-}=-i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2},\quad \alpha_{21-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-p_1^2}.$$

Здесь $Q_n(\alpha_s)=\mathbf{F}_1(\alpha_s)q_n(x_s)$.

Таким образом, упакованные блочные элементы построены в четырех взаимно пересекающихся полуплоскостях. Они представляют блочную структуру, блоки которой имеют носители — области Ω_n, $n=1,2,3,4$.

Рассмотрим множества $\Omega_n\times g_n$, $n=1,2,3,4$. Введем в построенной блочной структуре топологическую структуру. Назовем внутренности каждого построенного упакованного блочного элемента и носителя, то есть открытые множества, элементами топологического пространства. Они должны обладать следующими свойствами: объединение любого числа таких элементов и пересечение конечного их числа должно быть элементом топологического пространства, то есть быть упакованным блочным элементом. Очевидно, носители упакованных блочных элементов, то есть полупространства с взаимно перпендикулярными границами, имеют в качестве пересечений все четыре квадранта прямоугольной системы координат. Введем следующее их обозначение: $\Omega_5(x_1>0,\ x_2>0)$, $\Omega_6(x_1<0,\ x_2>0)$, $\Omega_7(x_1<0,\ x_2<0)$, $\Omega_8(x_1>0,\ x_2<0)$. Для того, чтобы доказать, что введенная топологическая структура $\Omega_n\times g_n$, $\Omega_{4+n}\times\varphi_n$, $n=1,\ldots,4$ действительно формирует топологическое пространство, состоящее из носителей и упакованных блочных элементов, необходимо показать, что решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в каждом квадранте представляет упакованный блочный элемент. Относительно носителей этот вопрос решен благодаря индуцированной топологии эвклидова пространства. Для блочных элементов любые два соседних блочных элемента из квадрантов должны объединяться и представлять упакованный блочный элемент полупространства. Таким образом, методом блочного элемента необходимо построить решения в форме упакованных блочных элементов в каждом квадранте следующих граничных задач

$$(\Delta+p^2)\varphi_n=0,$$

$$\partial_2\varphi_1(x_1,0)=q_{1+}(x_1),\quad \partial_1\varphi_1(0,x_2)=q_{2+}(x_2),\quad \Omega_5(x_1>0,\ x_2>0),$$
$$\partial_2\varphi_2(x_1,0)=q_{1-}(x_1),\quad \partial_1\varphi_2(0,x_2)=q_{2+}(x_2),\quad \Omega_6(x_1<0,\ x_2>0),$$
$$\partial_2\varphi_3(x_1,0)=q_{1-}(x_1),\quad \partial_1\varphi_3(0,x_2)=q_{2-}(x_2),\quad \Omega_7(x_1<0,\ x_2<0),$$
$$\partial_2\varphi_4(x_1,0)=q_{1+}(x_1),\quad \partial_1\varphi_4(0,x_2)=q_{2-}(x_2),\quad \Omega_8(x_1>0,\ x_2<0).$$

Здесь приняты обозначения

$$q_{1+}(x_1)=q_1(x_1),\quad x_1\geqslant 0;\qquad q_{2+}(x_2)=q_2(x_2),\quad x_2\geqslant 0;$$

$$q_{1-}(x_1) = q_1(x_1), \quad x_1 \leqslant 0; \qquad q_{2-}(x_2) = q_2(x_2), \quad x_2 \leqslant 0.$$

Применяя традиционные методы блочного элемента, включающие этапы внешней алгебры, внешнего анализа, получаем четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{\omega_n\left(\alpha_1, \alpha_2\right)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1\right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle,$$

$$\omega_2 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_3 = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle,$$

$$\omega_4 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1\right] \left\langle Q_{2-}(\alpha_2) - \frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}} \right\rangle + \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактор-топологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. Названными объединениями являются следующие объекты: $\varphi_1(x_1, x_2) \cup \varphi_2(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) \cup \varphi_3(x_1, x_2)$, $\varphi_3(x_1, x_2) \cup \varphi_4(x_1, x_2)$, $\varphi_4(x_1, x_2) \cup \varphi_1(x_1, x_2)$.

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полупространства. Имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2) \cup \varphi_2(x_1, x_2) = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1\left(\alpha_1, \alpha_2\right)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{\omega_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + \omega_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 = &\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1\right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle Q_{1+}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle + \\
&+ \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right] \left\langle Q_{2+}(\alpha_2) - \frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle Q_{1-}(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}} \right\rangle.
\end{aligned}$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}, \quad \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}, \quad \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, то есть обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль становится понятной при вычислении обращений преобразований Фурье для получения значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат. Поэтому, при исчезновении границы между блочными элементами, и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах, ими следует пренебрегать. Остаются те из них, которые сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая не нужные члены, имеем

$$\omega_1 + \omega_2 = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \langle Q_{1+}(\alpha_1)\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \langle Q_{1-}(\alpha_1)\rangle =$$
$$= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1\right] \langle Q_{1+}(\alpha_1) + Q_{1-}(\alpha_1)\rangle = \frac{\alpha_2 - \alpha_{21+}}{\alpha_{21+}} Q_1(\alpha_1).$$

Внеся эти данные в (4.3), получаем упакованный блочный элемент для полупространства (4.1), (4.2), а объединение блочных элементов оказывается связным множеством.

Вывод

Таким образом, в статье получено уравнение, которое может содержать параметры спектра, возникающего в контактных задачах с деформируемым штампом. Этот спектр, скорее всего, комплексный, в связи с неограниченностью штампа. Уравнение имеет сложное строение, в связи с чем его решение необходимо искать численным методом. Установлен характер волн на свободной поверхности в контактных задачах с деформируемым штампом. Они такие же, как и в случае абсолютно жесткого штампа, но дополняются гармоникой деформируемого штампа. Амплитуды оказываются разными. Представлено построение дискретного топологического пространства и фактор-топологий, состоящего и упакованных блочных элементов квадрантов декартовой системы координат, необходимых в дальнейших исследованиях.

Литература [References]

1. Ворович, И.И., Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*, 1979, т. 245, № 4, с. 817–820. [Vorovich, I.I., Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous strip. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)]
2. Ворович, И.И., Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*, 1979, т. 245, №5, с. 1076–1079. [Vorovich, I.I., Resonance properties of an elastic inhomogeneous band. *Doklady akademii nauk SSSR = Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)]
3. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*, 2022, т. 84, №1, с. 25–34. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On contact problems with a deformable stamp. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and plasticity*, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. (in Russian)] DOI 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34
4. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
5. Papangelo, A., Ciavarella, M., Barber, J.R., Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471. DOI 10.1098/rspa.2015.0271
6. Zhou, S., Gao, X.L., Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. DOI 10.1007/s00033-012-0205-0
7. Almqvist, A., *An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem*, 2013. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem
8. Cocou, M., A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, vol. 22, pp. 508–519. DOI 10.1016/j.nonrwa.2014.08.012
9. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2349–2362. DOI 10.1016/S0020-7683(97)00154-6

10. Ciavarella, M., The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II–Examples. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, pp. 2363–2378. DOI 10.1016/S0020-7683(97)00155-8
11. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006
12. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI 10.1016/j.euromechsol.2006.05.007
13. Almqvist, A., Sahlin, F., Larsson, R., Glavatskih, S., On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. DOI 10.1016/j.triboint.2005.11.008
14. Andersson, L.E., Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.*, 2000, vol. 42, pp. 169–202. DOI 10.1007/s002450010009
15. Cocou, M., Rocca, R., Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis*, 2000, vol. 34, pp. 981–1001.
16. Kikuchi, N., Oden, J., *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1988.
17. Raous, M., Cangémi, L., Cocu, M., A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 1999, vol. 177, pp. 383–399.
18. Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J., Models and analysis of quasistatic contact. *Lect. Notes Phys.*, vol. 655. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
19. Guler, M.A., Erdogan, F., The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, pp. 161–182. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006
20. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 171–188. DOI 10.1016/j.euromechsol.2006.05.007
21. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук*, 2021, т. 499, с. 21–26. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 2021, vol. 499, pp. 21–26. (in Russian)] DOI 9.31857/S2686740021040039

УДК 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-68-75

О возбуждении направленных волн в композитных материалах

Е. В. Кириллова✉

Университет прикладных наук Рейн-Майн, ул. Курт-Шумахер-Ринг 18, г. Висбаден, Германия

✉ Кириллова Евгения Вадимовна; ORCID 0000-0002-6797-0920; e-mail: kirillova@web.de

Аннотация. Было проанализировано влияние различных параметров на волновые поля, возбуждаемые в композитных пластинах пьезоэлементами различной формы. Сформулированная краевая задача была сначала проинтегрирована с помощью преобразования Фурье, построена матрица Грина, а затем с помощью обратного преобразования вычислено решение. Было показано, что только для определенных композитных материалов применение секторных вибраторов позволяет получить усиление амплитуды волн в выбранном направлении.

Ключевые слова: волны Лэмба, гармонические колебания, композитная пластина, матрица Грина, преобразование Фурье, круговой актуатор, секторный пьезоэлемент, направленное возбуждение волн.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Кириллова Е. В. О возбуждении направленных волн в композитных материалах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 68–75. DOI 10.31429/vestnik-19-4-68-75

Поступила 25 ноября 2022 г. После доработки 27 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

On Excitation of Directed Waves in Composite Materials

E. V. Kirillova✉

RheinMain University of Applied Sciences in Wiesbaden, Kurt-Schumacher-Ring 18, Wiesbaden, 65197, Germany

✉ Evgeniya V. Kirillova; ORCID 0000-0002-6797-0920; e-mail: kirillova@web.de

Abstract. The influence of various parameters on wave fields excited in composite plates by piezoelectric elements of various shapes has been analyzed. The formulated boundary value problem was first integrated using the Fourier transform, the Green matrix was constructed, and then the solution was calculated using the inverse transformation. It has been shown that only for certain composite materials the use of sector vibrators makes it possible to obtain amplification of the amplitude of the waves in the selected direction.

Keywords: Lamb waves, harmonic oscillations, composite plate, Green matrix, Fourier transform, circular actuator, sector piezoelectric element, directional wave excitation.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Kirillova, E. V., On excitation of directed waves in composite materials. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 68–75. DOI 10.31429/vestnik-19-4-68-75

Received 25 November 2022. Revised 27 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The author declare no competing interests.

В последнее время композитные материалы все чаще используются из-за их преимуществ, таких как более высокая прочность, большая эластичность и универсальная применимость. Тем не менее, наряду с этими преимуществами необходимо учитывать и недостатки — более высокая чувствительность к вибрации и расслоение, что значительно увеличивает вероятность образования трещин. Таким образом, алгоритмы, позволяющие обнаруживать возникшие дефекты, необходимы во многих отраслях промышленности. К ним относятся авиастроение

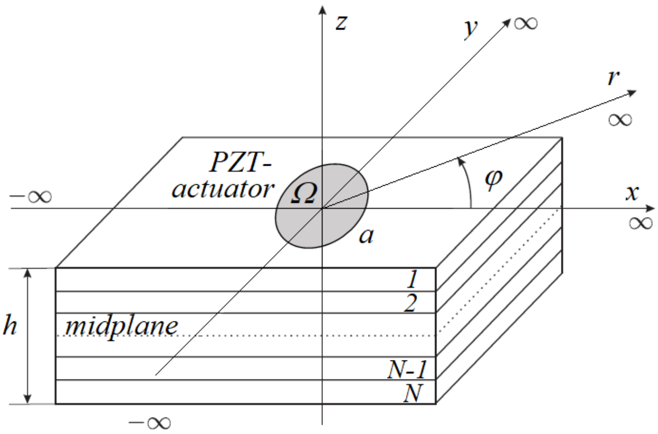


Рис. 1. Схема нагружения многослойной анизотропной пластины

(мониторинг крупномасштабных деталей конструкции самолета), машиностроение (мониторинг трубопроводов), химическая промышленность, автомобилестроение и традиционное машиностроение.

В настоящее время одним из наиболее точных и востребованных методов неразрушающего контроля и мониторинга состояния различных инженерных конструкций является метод, основанный на применении волн Лэмба. В настоящей работе анализируется влияние различных параметров пьезоактуаторов на волновые поля, возбуждаемые в композитных пластинах. Была разработана концепция выбора параметров вибраторов для возбуждения волн, которые усиливаются в определенном направлении для выбранных частот и подавляются в других направлениях.

1. Решение задачи о распространении волн и структура возбуждаемого волнового поля

Многослойная композитная пластина толщины h возбуждается круговым пьезоэлектрическим актуатором радиуса a (рис. 1). Композит занимает область

$$D = \{(x, y, z) \,|\, -\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty;\ z_{N+1} \leqslant z \leqslant z_1\},$$

где N — число слоев, $z_n = -h\,(n-1)/N$, $n = 1, \ldots, N+1$, z – координаты границ слоев.

Уравнения колебаний каждого слоя

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(n)}}{\partial x_j} = \rho^{(n)} \ddot{u}_i^{(n)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}^{(n)} = \left(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}\right)$ и $\sigma_{ij}^{(n)}$ компоненты вектора деформаций и тензора напряжений n-го слоя и $\rho^{(n)}$ плотность n-го слоя. На границах между слоями вертикальные напряжения и деформации непрерывны

$$\sigma_{j3}^{(n)} = \sigma_{j3}^{(n+1)}, \quad u_j^{(n)} = u_j^{(n+1)}, \quad z = z_{n+1}, \quad n = 1, \ldots, N-1. \tag{1.2}$$

Нижняя граница свободна от напряжений

$$\left(\sigma_{13}^{(N)}, \sigma_{23}^{(N)}, \sigma_{33}^{(N)}\right)\Big|_{z=z_{N+1}} = 0.$$

Гармонические колебания композитной плиты с частотой ω описываются с помощью множителя $e^{-i\omega t}$ (t — время). Далее множитель $e^{-i\omega t}$ опущен и рассматриваются амплитуды колебаний.

Для рассмотренного на рис. 1 кругового пьезоэлемента сосредоточенные на границе области $\Omega = \left\{r^2 = x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ z = 0\right\}$ силы моделируются с помощью соответствующих векторов нагрузки, которые могут быть представлены в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$q_x = \tau_0 \delta\left(r - a\right)\cos\varphi, \quad q_y = \tau_0 \delta\left(r - a\right)\sin\varphi, \quad q_z = 0, \quad \forall\left(r, \varphi\right). \tag{1.3}$$

Сформулированная краевая задача была сначала проинтегрирована с помощью преобразования Фурье по переменным x, y и построена матрица Грина. Решение рассматриваемой задачи в преобразованиях Фурье [1]:

$$U_l^{(n)}\left(\alpha_1, \alpha_2, z\right) = K_{lj}^{(n)}\left(\alpha_1, \alpha_2, z\right) Q_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right), \quad l, j = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Здесь $K_{lj}^{(n)}\left(\alpha_1, \alpha_2, z\right)$ — трансформанты Фурье компонент матрицы Грина $\mathbf{k}^{(n)}$ n-го слоя, вектор $\mathbf{Q}$ с компонентами $Q_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ — трансформанта Фурье вектора нагрузки $\mathbf{q}\left(x, y\right)$. Применение преобразования Фурье к граничным условиям на поверхности (1.3) приводит к следующим соотношениям:

$$Q_1\left(\alpha, \gamma\right) = 2\pi i a \tau_0 J_1\left(a\alpha\right)\cos\gamma, \quad Q_2\left(\alpha, \gamma\right) = 2\pi i a \tau_0 J_1\left(a\alpha\right)\sin\gamma, \quad Q_3\left(\alpha, \gamma\right) = 0, \tag{1.5}$$

где $J_1\left(a\alpha\right)$ — функция Бесселя первого рода, $\alpha_1 = \alpha\cos\gamma$, $\alpha_2 = \alpha\sin\gamma$ и $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $\gamma \in [0;\ 2\pi]$.

Алгоритм вычисления матрицы Грина в области частотно-волновых чисел подробно описан в [2]. После применения обратного преобразования Фурье решение задачи можно записать в виде интеграла

$$\mathbf{u}^{(n)}\left(x, y, z, \omega\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(n)}\left(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega\right) \mathbf{Q}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) e^{-i\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y\right)} \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2. \tag{1.6}$$

Для удобства опустим индексы и перейдем к цилиндрическим координатам

$$\mathbf{u}\left(r, \varphi, z, \omega\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+(\gamma)} \mathbf{K}\left(\alpha, \gamma, z, \omega\right) \mathbf{Q}\left(\alpha, \gamma\right) e^{-i\alpha r\cos(\gamma - \varphi)} \alpha \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\gamma, \tag{1.7}$$

где Γ_1, Γ_2, $\Gamma^+(\gamma)$ — контуры, которые обходят все действительные полюса подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения [3].

Интеграл по α может быть вычислен как сумма вычетов с помощью теоремы Коши и Леммы Жордана

$$\mathbf{u}^{\pm}\left(r, \varphi, z, \omega\right) = \pm\frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma^{\pm}(r,\varphi)} \mathbf{b}_m^{\pm}\left(\gamma, z, \omega\right) e^{-ik_m^{\pm}(\gamma) r\cos(\gamma - \varphi)} \mathrm{d}\gamma - \mathbf{d}^{\pm}\left(r, \varphi, z, \omega\right), \tag{1.8}$$

$$\mathbf{b}_m^{\pm}\left(\gamma, z, \omega\right) = \operatorname{res} \mathbf{K}\left(\alpha, \gamma, z, \omega\right)\big|_{\alpha = k_m^{\pm}(\gamma)} \mathbf{Q}\left(k_m^{\pm}\left(\gamma\right), \gamma\right) k_m^{\pm}\left(\gamma\right), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{d}^{\pm} = \left(\mathrm{d}_1^{\pm}, \mathrm{d}_2^{\pm}, \mathrm{d}_3^{\pm}\right), \quad \mathrm{d}_l^{\pm} = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}_{lj}^{\pm}, \quad l = \overline{1,3} \tag{1.10}$$

$$d_{lj}^{\pm}\left(r, \varphi, z, \omega\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_{I\pm}} \left(\int\limits_{\gamma^{\pm}(r,\varphi)} K_{lj}\left(\alpha, \gamma, z, \omega\right) Q_j\left(\alpha, \gamma\right) e^{-i\alpha r\cos(\gamma - \varphi)} \mathrm{d}\gamma \right) \alpha \, \mathrm{d}\alpha. \tag{1.11}$$

Здесь $k_m^{\pm}\left(\gamma\right)$ — вещественные полюса Фурье-преобразования матрицы Грина $\mathbf{K}$, расположенные в первом и четвертом квадрате для: $\gamma = \varphi + \pi/2$ и $\gamma = \varphi + 3\pi/2$ соответственно. Вкладом комплексных полюсов можно пренебречь для $r \to \infty$. В дальней от источника колебаний зоне $r \to \infty$ интегралы $\mathrm{d}_{lj}(r,\varphi)$ по мнимым осям не учитываются. Полюса $k_m^{\pm}(\gamma)$ вносят вклад в (1.8) на концах интервалов $\gamma^{\pm}(\varphi) = (\varphi \pm \pi/2,\ \varphi + \pi \pm \pi/2)$ и в стационарных точках фазовой функции

$$P_m^{\pm}(\gamma(\varphi),\varphi) = -k_m^{\pm}(\gamma)\cos(\gamma - \varphi). \tag{1.12}$$

Согласно методу стационарной фазы стационарные точки $\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi)$ для каждого полюса $k_m^{\pm}(\gamma)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{k'^{\pm}_{m,\gamma}(\gamma)}{k_m^{\pm}(\gamma)} = \tan(\gamma - \varphi), \quad \gamma \in (\varphi \pm \pi/2,\ \varphi + \pi \pm \pi/2), \tag{1.13}$$

В дальней от источника зоны их вклад описывается следующим выражением

$$\mathbf{G}_{mp}^{\pm}(r,\varphi,z,\omega) = \pm\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\frac{\mathbf{b}_m^{\pm}\left(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi),z,\omega\right)}{\sqrt{-i\cdot P''^{\pm}_{m,\gamma^2}\left(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi),\varphi\right)}}e^{irP_m^{\pm}\left(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi),\varphi\right)} + O\left(r^{-3/2}\right), \tag{1.14}$$

где

$$P''^{\pm}_{m,\gamma^2}\left(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi),\varphi\right) = \frac{\partial^2 P^{\pm}\left(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi),\varphi\right)}{\partial\gamma^2} \neq 0.$$

Окончательное асимптотическое разложение вектора смещения имеет вид

$$\mathbf{u}(r,\varphi,z,\omega) = \sum_{m=1}^{N_r}\sum_{p=1}^{N_{mp}^{\pm}(\varphi)}\mathbf{G}_{mp}^{\pm}(r,\varphi,z,\omega) + O\left(r^{-3/2}\right), \tag{1.15}$$

где N_r — количество вещественных полюсов и $N_{mp}^{\pm}(\varphi)$ количество стационарных точек, соответствующих полюсу $k_m^{\pm}(\gamma)$ в направлении φ.

Решение задачи (1.1)–(1.3) для композитной пластины с симметрией относительно средней плоскости $z = -h/2$ может быть представлено в виде суммы симметричных и антисимметричных волн Лэмба. Дисперсионное уравнение $\Delta(\omega,\alpha,\gamma) = 0$, где $\Delta(\omega,\alpha,\gamma)$ является определителем преобразования Фурье матрицы Грина, можно разделить на два независимых уравнения

$$\Delta_S(\omega,\alpha,\gamma) = 0, \tag{1.16}$$

для симметричных и

$$\Delta_A(\omega,\alpha,\gamma) = 0, \tag{1.17}$$

соответственно для антисимметричных волн. Были проведены исследования для широкого диапазона частот, где существуют две симметричные S_0 и SH_0 (горизонтальная мода сдвига) и одна антисимметричная волновая мода A_0. Решение (1.15) может быть представлено как комбинация соответствующих волновых мод $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{A_0} + \mathbf{u}_{S_0} + \mathbf{u}_{SH_0}$.

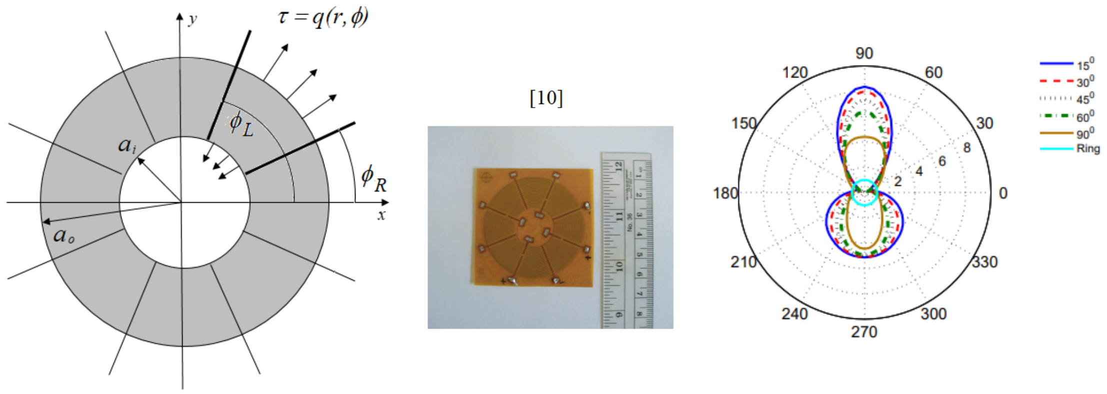
Чтобы увеличить амплитуды волн вдоль выбранных направлений, форма пьезоэлемента может быть изменена. В этом разделе представлен пример приведения в действие направленных волн с использованием составного пьезоактуатора с переменным направлением излучения (CLoVER) [4]. Такой актуатор (рис. 2) состоит из набора клиновидных пьезоэлементов, которые могут быть активированы только по выбранному направлению.

Внутренний и внешний радиусы актуатора равны a_i и a_o соответственно. Количество секторов n_c позволяет определить угловой диапазон актуаторов CLoVER: $\theta = 360°/n_c$.

Функция нагрузки для одного активного сектора между углами ϕ_L и ϕ_R, $\phi_L - \phi_R = \theta$ $(z = 0)$ имеет вид [1, 4]

$$\begin{gathered}\tau_{xz} = \tau_0\left(\delta(r - a_i) - \delta(r - a_o)\right)\left(H(\phi - \phi_L) - H(\phi - \phi_R)\right)\cos\phi,\\ \tau_{yz} = \tau_0\left(\delta(r - a_i) - \delta(r - a_o)\right)\left(H(\phi - \phi_L) - H(\phi - \phi_R)\right)\sin\phi, \quad \sigma_z = 0,\end{gathered} \tag{1.18}$$

где $H(\phi)$ — функция Хевисайда. В рассмотренной модели пренебрегается напряжениями на границах между секторами.



а) б) в)

Рис. 2. CLoVER пьезоактуатор: а) схема, б) фото и в) распределение смещения в зависимости от угла для различных секторов актуатора [4]

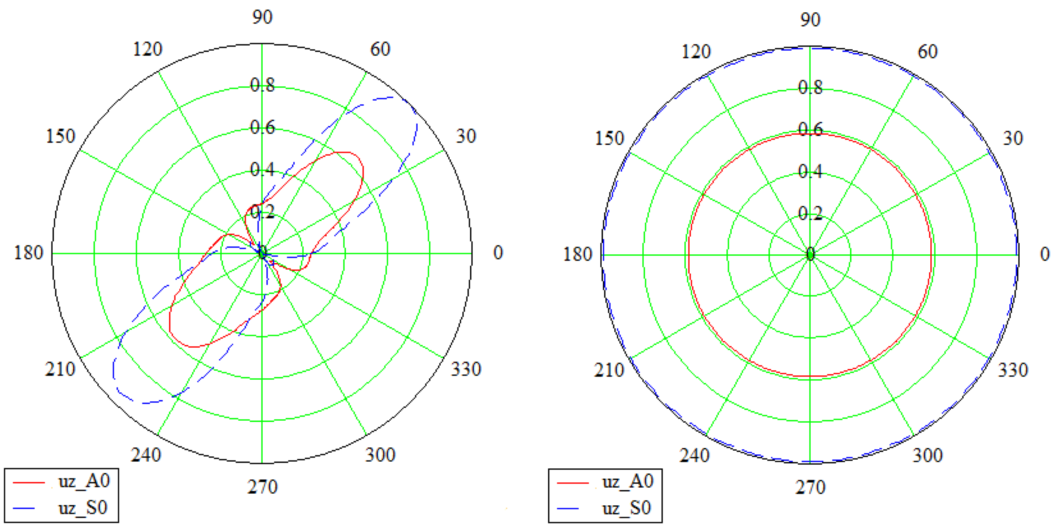
Преобразование Фурье функции нагрузки (1.18) не может быть представлено в аналитическом виде. Используя разложение Якоби–Ангера [5], двойное преобразование в область волновых чисел принимает вид

$$
\begin{gathered}
Q_1(\alpha,\gamma) = \tau_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \chi_n(\alpha) \int_{\phi_R}^{\phi_L} (H(\phi-\phi_R) - H(\phi-\phi_L)) e^{in(\phi-\gamma)} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi, \\
Q_2(\alpha,\gamma) = \tau_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \chi_n(\alpha) \int_{\phi_R}^{\phi_L} (H(\phi-\phi_R) - H(\phi-\phi_L)) e^{in(\phi-\gamma)} \sin\phi \,\mathrm{d}\phi, \\
Q_3(\alpha,\gamma) = 0,
\end{gathered}
\tag{1.19}
$$

где $\chi_n(\alpha) = a_o J_n(\alpha a_o) - a_i J_n(\alpha a_i)$ и $J_n(a\alpha)$ является функцией Бесселя n-го порядка.

2. Анализ волновых полей, возбуждаемых круговым и секторным пьезоактуаторами

Исследования проводились как для квазиизотропного композита, так и для композита с ярко выраженными анизотропными свойствами. Рассмотренный квазиизотропный композит состоит из 24-х слоев с ориентацией волокон $[0{,}45,-45{,}90]_{3s}$, изготовлен из эпоксидной смолы с углеродным волокном. Свойства материала в терминах инженерных констант описываются следующим образом: $E_1 = 127{,}6$ ГПа, $E_2 = E_3 = 11{,}3$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 5{,}97$ ГПа, $G_{23} = 3{,}75$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0{,}3$, $\nu_{23} = 0{,}34$; плотность $\rho = 1578$ кг/м^3. Все вычисления проводились в безразмерной форме, в связи с этим, инженерные константы обезразмеривались делением их на величину $E_0 = 10^{11}$ Па, плотность нормировалась на величину $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, тогда как все геометрические характеристики обезразмеривались путем деления на толщину композитной пластины h. В работе в расчетах использовалась безразмерная угловая частота $\hat{\omega} = 2\pi f_r h/c_T = 2\pi\omega/c_T$, где $\omega = f_r * h$ представляет произведение частоты на толщину возбуждаемой пластины и измеряется в КГц$\cdot$мм. Значение скорости распространения поперечной волны c_T, взятой для нормализации значений, определяется как $c_T = \sqrt{G_{12}/\rho}$, где G_{12} — модуль продольного сдвига в плоскости материала композитной пластины. Очевидно, что два разных композитных материала с различными свойствами будут иметь разные значения скорости c_T, и, следовательно, разные значения безразмерной угловой частоты, но соответствующие одному и тому же значению $\omega = f_r * h$.



а) б)

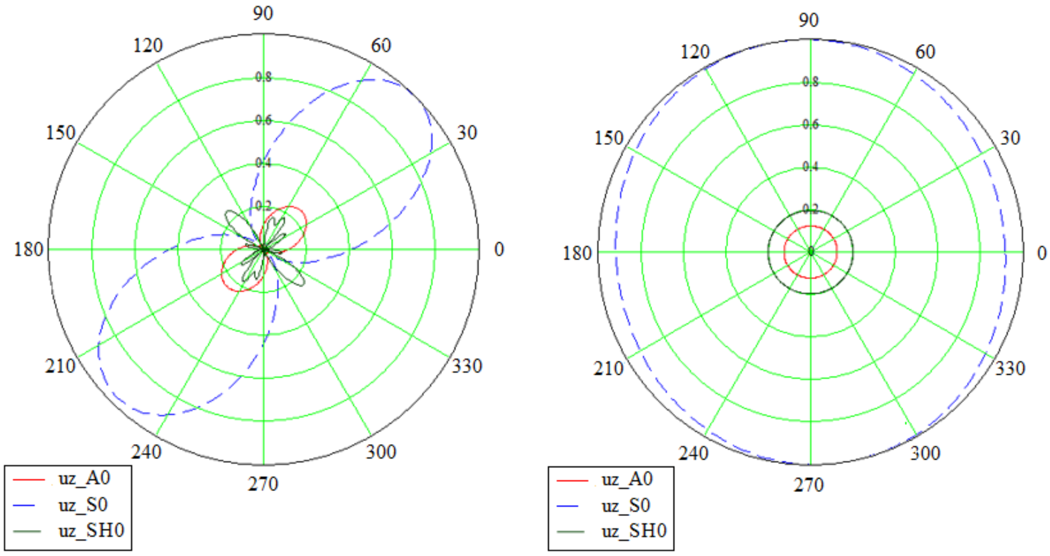
Рис. 3. Нормированные амплитуды поверхностных перемещений для а) секторного и б) кругового пьезоэлемента для $f_r \cdot h = 150$ кГц · мм

На рис. 3, 4 изображены графики нормированных амплитуд поверхностных перемещений, соответствующих антисимметричной u_{A_0} и симметричной u_{S_0} волновым модам в зависимости от угла. Исследуемая пластина из квазиизотропного композита с описанными свойствами возбуждается круговым актуатором и пьезоактуатором CLoVER. Внутренний и внешний радиусы рассматриваемого сектора $a_i/h = 3$ и $a_0/h = 5$ соответственно. На рис. 3 показаны перемещения, вызванные секторным актуатором (3а), расположенным между углами $\phi_R = 22{,}5°$ и $\phi_L = 67{,}5°$, и круговым (3б) радиуса $a/h = 5$, полученного в точке $r/h = 100$ для частоты $f_r \cdot h = 150$ кГц · мм.

Очевидно, что волны, возбуждаемые круговым пьезоактуатором, распространяются почти равномерно в зависимости от угла, в то время как секторный пьезоактуатор возбуждает волны в заданном направлении. На выбранной частоте обе волновые моды вносят сравнимый вклад в волновое поле. На рис. 4 показаны перемещения, рассчитанные для более высокой частоты $f_r \cdot h = 300$ кГц · мм. Можно видеть, что при этой частоте появляется первая горизонтально-симметричная волновая мода SH_0, а вклад первой антисимметричной моды A_0 уменьшается. Основной вклад в волновое поле вносят смещения, соответствующие первой симметричной моде S_0.

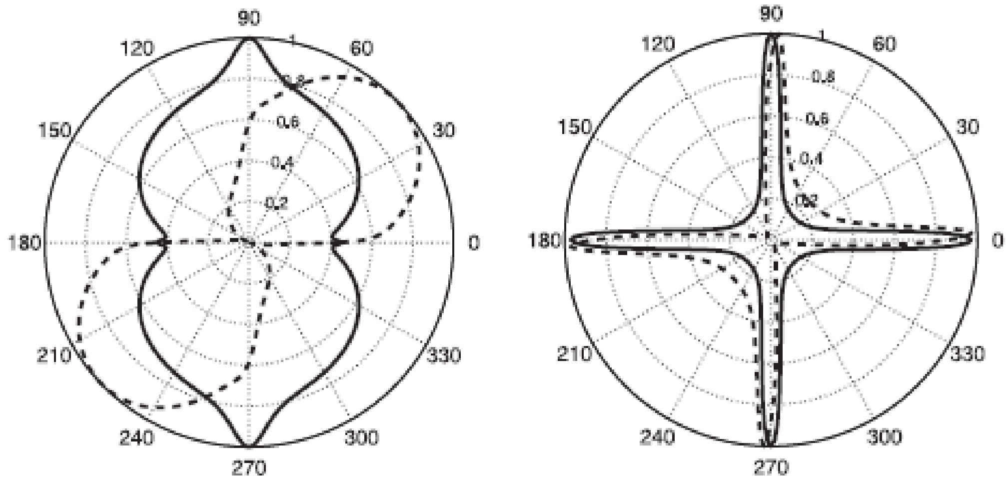
Как и в предыдущем примере, смещения, приводимые в действие круговым пьезоактуатором (рис. 4б), почти не зависят от угла распространения, в то время как волновое поле, возбуждаемое секторным пьезоактуатором, распространяется в заданном направлении (рис. 4а). Этот эффект был продемонстрирован и для других частот.

Для сравнения был рассмотрен композит с ярко выраженными анизотропными свойствами, состоящий из 4-х слоев с ориентацией волокон $[0{,}90]_s$, изготовленный из углепластика T700GC/M21. Нормированные амплитуды перемещений для волновых мод u_{A_0} и u_{S_0} в полярных координатах были построены для тех же размеров кругового и секторного актуаторов для $r/h = 100$ и частоты $f_r \cdot h = 300$ кГц · мм. Ввиду выбранной геометрии секторного пьезоэлемента A_0-волны распространяются, как и ожидалось, в первом квадранте с максимальными амплитудами в направлении 45° (рис. 5а). График для S_0-волн показывает (рис. 5б), что влияние анизотропии остается очень высоким, и, несмотря на геометрию секторного пьезоактуатора, фокусировка волн происходит в направлениях волокон.



а) б)

Рис. 4. Нормированные амплитуды поверхностных перемещений для а) секторного и б) кругового пьезоэлемента для $f_r \cdot h = 300$ кГц $\cdot$ мм



а) б)

Рис. 5. Нормированные амплитуды поверхностных перемещений а) A_0 и б) S_0 для секторного (пунктир) и кругового (сплошная линия) пьезоэлемента для $f_r \cdot h = 300$ кГц·мм

Амплитуды волн в областях между волокнами намного меньше, как в случае секторного, так и кругового пьезоактуатора, что может вызвать проблемы при неразрушающем контроле материалов.

Заключение

Построенная математическая модель позволила выделить и проанализировать вклад каждой волновой моды в результирующее волновое поле и исследовать распространение отдельных мод по различным направлениям в зависимости от анизотропных свойств исследуемых композитов. Из-за анизотропии слоев амплитуды волн в слоистых композитах могут проявлять сильную фокусировку в определенных направлениях. Были проведены исследования амплитуд волн в композитных материалах для круглых пьезоактуаторов и вибраторов в форме сектора. Показано, что для определенных композитных материалов применение секторных вибраторов позволяет получить усиление амплитуды волн в выбранном направлении. Для композитов с ярко выраженными анизотропными свойствами эффект анизотропии приводит к тому, что несмотря на геометрию поверхностного вибратора, происходит фокусировка отдельных волновых мод в направлениях волокон. Таким образом, чтобы для неразрушающего контроля материалов реализовать распространение волн в выбранных направлениях, необходимо выбирать частоты, на которых вклад таких волновых мод несущественен. Подробное исследование зависимости амплитуд волн A_0, S_0 и SH_0 от частоты проведено в работе [6].

Литература [References]

1. Karmazin, A., *Time-efficient simulation of surface-excited guided lamb wave propagation in composites*. PhD thesis, Karlsruhe Institute of Technology, 2012.
2. Karmazin, A., Kirillova, E., Seemann, W., Syromyatnikov, P., Investigation of Lamb elastic waves in anisotropic multilayered composites applying the Green's matrix. *Ultrasonics*, 2011, vol. 51, p. 17–28. DOI 10.1016/j.ultras.2010.05.003
3. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., Динамика неоднородных линейно-упругих сред. Наука, Москва, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, J.F., *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear elastic media.* Nauka, Moscow, 1989. (in Russian)]
4. Salas, K.I., Cesnik, C.E.S., Guided wave excitation by a CLoVER transducer for structural health monitoring: theory and experiments. *J. Smart Mater. Struct.*, 2009, vol. 18, art. 075005. DOI 10.1088/0964-1726/18/7/075005
5. Бейтмен, Г., Эрдейи, А., *Высшие трансцендентные функции. Т. 2.* Наука, Москва, 1974. [Bateman, G., Erdelyi, A., *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2 = Higher transcendental functions, vol. 2*, Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)]
6. Kirillova, E., Seemann, W., Shevtsova, M., Selective mode excitation of Lamb wave in composite laminates for a circular and two ring-shaped piezoelectric actuators. *J. Appl. Math. and Mech. (ZAMM)*, 2021, vol. 101, iss. 2, art. e202000078. DOI 10.1002/zamm.202000078

УДК 517.9: 539.3 DOI 10.31429/vestnik-19-4-76-82

К задаче определения параметров стационарного источника в полуограниченной слоистой среде

О. Н. Лапина✉, **А. Г. Нестеренко**, **Ю. Г. Никитин**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Лапина Ольга Николаевна; ORCID 0000-0002-0145-6822; e-mail: olga_ln@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе при решении обратной задачи определения параметров стационарного источника излучения (координаты и мощность), сформулированной как задача оптимизации для функционала невязки от функций, зависящих от параметра источника, используются методы условной оптимизации на основе точного решения прямой задачи — расчета концентрации субстанции в многослойной среде, излучаемой стационарным источником, с помощью матричного метода на основе интегрального подхода. Для решения оптимизационной задачи были использованы методы локального и глобального поиска, а также генетические алгоритмы глобального поиска.

Ключевые слова: диффузия-конвекция, многослойная среда, матричный метод, прямая задача, обратная задача, методы условной оптимизации.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ и Администрации Краснодарского края (проект 19-41-230011 р_а).

Цитирование: Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г. К задаче определения параметров стационарного источника в полуограниченной слоистой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 76–82. DOI 10.31429/vestnik-19-4-76-82

Поступила 20 ноября 2022 г. После доработки 25 ноября 2022 г. Принято 28 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On the Problem of the Parameters Determination for a Stationary Source in a Semi-Bounded Layered Medium

O. N. Lapina✉, **A. G. Nesterenko**, **Yu. G. Nikitin**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga N. Lapina; ORCID 0000-0002-0145-6822; e-mail: olga_ln@mail.ru

Abstract. In this paper, when solving the inverse problem of the parameters determination for a stationary radiation source (coordinates and intensity), formulated as an optimization problem for the residual functional of functions depending on the source parameters, we use conditional optimization methods based on the exact solution of the direct problem of the concentration calculation for a substance in a multilayer medium emitted by a stationary source using the matrix method based on the integral approach. The applied method of numerical inversion of Fourier integrals is based on the method of direct contour integration. The source is identified by the response of the pollutant distribution medium to the action of a stationary emission – a change in the concentration of an impurity at a given height based on additional "measurements", as which we chose the numerical values of the solution for the direct problem. To solve the optimization problem, local and global search methods, as well as genetic algorithms for global search, were used. Calculations carried out for various characteristics of the layered medium and the position of the source showed that the pattern search method allows us to find a more accurate solution than genetic algorithms, the convergence rate of which decreases near the minimum point. At the same time, the accuracy of restoring the initial intensity value of the pollutant source depends on the structure of the wind characteristics in the layered medium; an increase in wind speeds worsens the solution of the inverse problem. The number of measurement points has a significant impact on the accuracy of the source power value recovery when the measurement data has noise.

Keywords: diffusion-convection, multilayer medium, matrix method, direct problem, inverse problem, conditional optimization methods.

Funding. The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Krasnodar Territory (project 19-41-230011 p_a).

Cite as: Lapina, O. N., Nesterenko, A. G., Nikitin, Yu. G., On the problem of the parameters determination for a stationary source in a semi-bounded layered medium. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 76–82. DOI 10.31429/vestnik-19-4-76-82

Received 20 November 2022. Revised 25 November 2022. Accepted 28 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Актуальность разработки методов математического моделирования распространения загрязняющих веществ (ЗВ), излучаемых в воздушную и водную среду, объясняется растущими объемами вредного антропогенного воздействия на природу. В этой связи столь же важны и задачи экологического мониторинга действующих предприятий, а также экологической экспертизы проектируемых технических сооружений.

Нередко на практике возникают ситуации, когда мощности источников излучения ЗВ и их местоположения неизвестны. При анализе воздействия на экологические системы техногенных и природных катастроф возникает необходимость решать обратные задачи распространения ЗВ для определения места и параметров выброса, воздействовавшего на экосистему. Данные задачи относятся к задачам идентификации параметров источников для моделей распространения загрязнений. Их решение заключается в определении неизвестных характеристик источников по данным измерений состояния среды.

В теории обратных задач конвекции-диффузии различают коэффициентные, граничные и эволюционные обратные задачи [1–3, и др.]. Обратные задачи могут быть некорректными в классическом смысле. В работах [4, 5] исследованы теоретические вопросы, а также предложены численные методы решения рассматриваемых обратных задач.

Наряду с обратными задачами важную роль в приложениях играют и задачи управления для моделей распространения ЗВ. Эти задачи заключаются в достижении определенных «экологических» целей за счет действия граничных либо распределенных управлений, роль которых играют координаты, мощности и другие параметры источников загрязнений. Интерес к этим задачам появился в конце прошлого столетия, начиная с работ Г.И. Марчука [6], В.В. Пененко и других исследователей, посвященных решению задач оптимального размещения предприятий вблизи экологически значимых зон.

Исследование обратных задач можно свести к изучению соответствующих экстремальных задач. Это достигается путем введения функционала качества (функционала невязки), адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче и последующей его минимизации на решениях исходной прямой задачи. При этом возникают обратные экстремальные задачи, для исследования которых можно применять методологию задач управления. Это позволяет рассматривать обратные задачи и задачи управления с единых позиций математической теории оптимального управления и применять для их решения один и тот же математический аппарат, основанный на теории экстремальных задач условной оптимизации [7–10].

В настоящей работе при решении обратной задачи определения параметров стационарного источника излучения (координаты и мощность) используются методы условной оптимизации на основе точного решения прямой задачи – расчета концентрации субстанции в многослойной среде, излучаемой стационарным источником, с помощью матричного метода на основе интегрального подхода [11–14].

Рассматриваемые уравнения интерпретируются как описание процесса турбулентной диффузии и конвективного массопереноса ЗВ в газообразной или жидкой среде, хотя допускают и другие физические толкования. Развиваемый в работах [11–14] метод позволяет рассматривать среды с большим количеством слоев, в значительной степени приближенные к реальным. Градиентные среды, для которых параметры уравнений зависят от одной (вертикальной) координаты, могут быть достаточно точно аппроксимированы многослойной средой с кусочно-постоянными коэффициентами. Применяемый метод численного обращения интегралов Фурье [11–13] и Фурье–Лапласа [14] основан на методе прямого контурного интегрирования. Символ функции Грина не имеет вещественных особенностей, в силу чего не требуется вводить внутреннее трение для метода прямого контурного интегрирования, и убывает экспоненциально, поэтому необходимые пределы интегрирования для заданной точности являются конечными.

1. Задача конвекции–диффузии для многослойной среды при наличии стационарного источника

Рассматривается среда миграции ЗВ, состоящая из Nслоев, в пределах каждого слоя $\{-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty;\ z_{n+1} < z < z_n\}$, $n = \overline{1, N}$, свойства среды полагаются постоянными, $z_1 = h$, $z_{N+1} = 0$, считается, что источник расположен на границе раздела слоев $z = z_j$. Прямая задача формулируется в виде

$$u_n \frac{\partial \varphi_n (M)}{\partial x} + v_n \frac{\partial \varphi_n (M)}{\partial y} + (w_n - w_g) \frac{\partial \varphi_n (M)}{\partial z} + \sigma \varphi_n (M) = \\ = \mu_n \left(\frac{\partial^2 \varphi_n (M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n (M)}{\partial y^2} \right) + \nu_n \frac{\partial^2 \varphi_n (M)}{\partial z^2},$$

$$\{-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty;\ z_{n+1} < z < z_n\}.$$

Здесь φ_n — концентрация загрязнителя, u_n, v_n и w_n — скорости воздушных масс в горизонтальной плоскости и вертикальном направлении соответственно, $\sigma \geqslant 0$ — коэффициент распада, $\mu_n \geqslant 0$, $\nu_n \geqslant 0$ — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях в n-ом слое.

Граничные условия на верхней и нижней границе слоя можно представить в виде

$$\left.\frac{\partial \varphi_1 (M)}{\partial z}\right|_{z=z_1} = 0, \quad \left.\left(\nu_N \frac{\partial \varphi_N (M)}{\partial z} - \kappa \varphi_N (M) \right)\right|_{z=z_{N+1}} = 0,$$

На всех межслойных границах, кроме плоскости источника, справедливы условия

$$\varphi_{n-1} (z_n) = \varphi_n (z_n), \quad \nu_{n-1} \frac{\partial \varphi_{n-1} (x, y, z_n)}{\partial z} = \nu_n \frac{\partial \varphi_n (x, y, z_n)}{\partial z}.$$

На содержащей источник границе задано разрывное условие

$$\nu_{j-1} \frac{\partial \varphi_{j-1} (x, y, z_j)}{\partial z} = \nu_j \frac{\partial \varphi_j (x, y, z_j)}{\partial z}, \quad \varphi_{j-1} (x, y, z_j) = \varphi_j (x, y, z_j) + q_j (x, y),$$

$$q_j (x, y) = \mathrm{C}_{j0} \delta (x - x_{j0}, y - y_{j0}). \tag{1.1}$$

При формулировке краевых задач задается также условие убывания функций $\varphi_n (x, y, z) \to 0$ на бесконечности $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$.

Решение задачи в n-ом слое для одного источника на границе j-го слоя принимает вид [11, 12]

$$\varphi_n (x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(n,j)} (\alpha, \beta, z)\, Q_j (\alpha, \beta) \exp (-\mathrm{i} (\alpha x + \beta y))\, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta, \tag{1.2}$$

где $K^{(n,j)}$ — символ функции Грина и Q_j — трансформанта Фурье функции источника

$$Q_j (\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_j (x, y) \exp (\mathrm{i} (\alpha x + \beta y))\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Алгоритмы построения $K^{(n,j)}$ для случаев стационарных, нестационарных и периодических источников описаны в работах [11–14].

2. Задача определения параметров стационарного источника

Решение обратной многопараметрической задачи определения параметров источника излучения (пространственные координаты, мощность излучения) предполагает использование широкого спектра методов условной оптимизации на основе точного и эффективного решения прямой задачи — расчета концентрации субстанции в многослойной среде, излучаемой стационарным (а в общем случае — периодическим и нестационарным) источником.

Идентификация источника осуществлялась по отклику среды распространения ЗВ на действие стационарного выброса – изменению концентрации примеси на заданной высоте $z = z*$, $z_{n+1} < z* < z_n$, на основе дополнительных «замеров» вида $\bar{\varphi}_k \equiv \bar{\varphi}_k\left(x_k, y_k, z*\right)$, $k = 1, \ldots, p$, в качестве которых выбирались численные значения решения прямой задачи. При этом путем введения функционала

$$\varphi\left(x_{j0}, y_{j0}, z_j, C_{j0}\right) = \min \sum_{k=1}^{n} \left\|\varphi_n\left(x_k, y_k, z*\right) - \bar{\varphi}_k\right\|, \tag{2.1}$$

в который неявным образом входят параметры источника (1.1), из (1.2)

$$\varphi_n\left(x, y, z\right) = \varphi_n\left(x, y, z, x_{j0}, y_{j0}, z_j, C_{j0}\right),$$

и последующей его минимизации на эталонных решениях исходной прямой задачи с учетом погрешности в данных измерений находятся координаты и мощность источника.

Выражение в правой части (2.1) может быть представлено в виде суммы наименьших квадратов разностей концентраций, когда вычисляются отклонения от эталонных значений концентраций в точках $(x_k, y_k, z*)$

$$\varphi\left(x_{j0}, y_{j0}, z_j, C_{j0}\right) = \min \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi\left(x_k, y_k, z*\right) - \bar{\varphi}_k\right)^2. \tag{2.2}$$

Решение задачи оптимизации предполагает многократное решение прямой задачи, т.е. вычисление интегралов (1.2) при расчете концентрации в слое измерений. Вычисление интеграла (1.2) основано на применении адаптивного алгоритма интегрирования быстро осциллирующих функций (многоточечные методы Гаусса и Кронрода).

Как правило, при решении задач идентификации дополнительно следует учитывать влияние уровня погрешностей $\bar{\varepsilon}$ «замеров» $\bar{\varphi}_k$ и погрешностей вычисления интегралов (1.2) для тех же величин при симуляции физических экспериментов на точность восстановления параметров источника и скорость сходимости задачи.

Для практических расчетов необходимо наложить ограничения на диапазоны возможных параметров источника: $x_{0l} \leqslant x_{j0} \leqslant x_{0r}$, $y_{0l} \leqslant y_{j0} \leqslant y_{0r}$, $z_1 \leqslant z_j \leqslant z_{N+1}$, $C_0 \leqslant C \leqslant C_m$, — и уровня погрешностей $0 \leqslant \bar{\varepsilon} \leqslant \varepsilon_m$.

Так как распределение концентрации примеси (1.2) в заданном слое для многослойной среды можно найти только численно, то целевая функция (2.2) имеет вид «черного ящика», поэтому для ее оптимизации требуется применение соответствующих алгоритмов.

Для решения оптимизационной задачи были использованы методы локального и глобального поиска, а также генетические алгоритмы глобального поиска.

Генетические алгоритмы [15] и алгоритмы поиска паттернов [16] продемонстрировали высокую эффективность.

Была выполнена серия численных экспериментов для двух-четырехслойной сред, проводимых с различным количеством точек «измерения», с использованием симулированных точек измерения в 4–20 точках. Кроме того, в «измеренные» значения концентрации примеси добавлялись случайные погрешности, неизбежные в физических экспериментах. Случайные ошибки измерений моделировались добавлением равномерно распределенных погрешностей концентрации, вычисляемых в точках «замеров», как в [17].

Вычислительные эксперименты, в которых «замеры» были отягощены погрешностями уровня от 1 до 10 %, во всех случаях продемонстрировали приемлемые численные результаты.

Рис. 1. Влияние погрешности замеров на точность восстановления координаты

Проведенные расчеты модельных двумерных и трехмерных обратных задач конвекции–диффузии–реакции — определение неизвестных параметров источника — показали, что используемые методы дают устойчивые и точные результаты даже в условиях сильной зашумленности имитируемых измерений.

На рис. 1 приведен пример зависимости точности восстановления исходной координаты $x_{j0} = 0$ источника и погрешности данных «замеров» модельных расчетов пространственной задачи для двухслойной среды. По оси абсцисс отложены погрешности восстановления. Аналогичные порядки характерны для других координат.

Относительная погрешность «замеров» может достигать 10 %, при этом погрешность нахождения координат и мощности источника в двумерных задачах не превышает уровня погрешности, в трехмерных — превышает незначительно. Расчеты, проведенные для различных характеристик слоистой среды и положения источника, показали, что метод поиска паттернов, реализованный в [16], позволяет найти более точное решение (1–5 %), чем генетические алгоритмы, скорость сходимости которых вблизи точки минимума снижается. С увеличением количества точек «измерения» точность возрастает. Следует отметить, что точность восстановления исходной мощности источника ЗВ зависит от структуры ветровых характеристик слоистой среды, увеличение скоростей ветра ухудшает решение обратной задачи. Количество точек измерений оказывает существенное влияние на точность восстановления мощности источника при зашумлении данных измерений.

Заключение

Результаты работы могут найти применение для решения различных экологических задач при инвентаризации выбросов ЗВ в атмосферу, изучении воздействия на окружающую среду источников загрязнения природного и антропогенного характера, моделировании различных сценариев нагрузки от имеющихся источников и тенденций изменения состояния среды, при разработке теоретических и практических рекомендаций для формирования экологической модели различных территорий региона и т.д.

Решение задач идентификации источника ЗВ также находят применение при реализации различных методик оценки величины предотвращенного ущерба, оптимизации размещения будущих источников загрязнения и станций наблюдения. Решение последней проблемы на различных территориях требует разработки устойчивых методов решения обратных задач определения неизвестных пространственных координат и мощности излучения источника загрязняющих веществ, а также длительности выброса. Но в отличие от обратных задач, требующих, как правило, единственности решения, задачи оптимального управления требуют полного описания условий и ограничений для выделения требуемого решения из множества допустимых [18].

Литература [References]

1. Пененко, В.В., Рапута, В.Ф., Быков, А.В., Планирование эксперимента в задаче оценивания мощности источников примеси. *Физика атмосферы и океана*, 1985, т. 21, № 9. с. 913–920. [Penenko, V.V., Raputa, V.F., Bykov, A.V., Designing an experiment in the problem of estimating the power of impurity sources. *Fizika atmosfery i okeana = Physics of the Atmosphere and Ocean*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 913–920. (in Russian)]
2. Besk, J.V., Blackwell, B., Clair, C.St., *Inverse conduction ill-posed problems.* Wiley, New York, 1985.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., *Численные методы решения обратных задач математической физики.* Эдиториал УРСС, Москва, 2004. [Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki = Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics.* Editorial URSS, Moscow, 2004. (in Russian)]
4. Бакушинский, А.Б., Гончарский А.В., *Итеративные методы решения некорректных задач.* Наука, Москва, 1988. [Bakushinsky, A.B., Goncharsky A.V., *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Iterative methods for solving ill-posed problems.* Nauka, Moscow, 1988. (in Russian)]
5. Тихонов, А.Н., Арсенин, В.Я., *Методы решения некорректных задач.* Наука, Москва, 1979. [Tikhonov, A.H., Arsenin, V.Ya., *Methods for solving ill-posed problems.* Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)]
6. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* Наука, Москва, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical Modeling in the problem of the environment.* Nauka, Moscow, 1982. (in Russian)]
7. Алексеев, Г.В., Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса. *Сиб. мат. журн.*, 2001, т. 42, № 5, с. 971–991. [Alekseev, G.V., Solvability of inverse extremal problems for stationary equations of heat and mass transfer. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 5, pp. 971–991. (in Russian)]
8. Алексеев, Г.В., Адомавичюс, Э.А., О разрешимости неоднородных краевых задач для стационарных уравнений массопереноса. *Дальневост. мат. журн.*, 2001, т. 2, № 2, с. 138–153. [Alekseev G.V., Adomavichyus E.A., On the solvability of inhomogeneous boundary value problems for stationary equations of mass transfer. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 138–153. (in Russian)]
9. Алексеев, Г.В., Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2002, т. 42, № 3, с. 380-–394. [Alekseev, G.V., Inverse extremal problems for stationary equations of mass transfer theory. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 3, pp. 380–394. (in Russian)]
10. Алексеев, Г.В., Соболева, О.В., Об устойчивости решений экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса. *Дальневосточный математический журнал*, 2009, вып. 1–2, с. 5–14. [Alekseev, G.V., Soboleva, O.V., On the stability of solutions to extremal problems for stationary equations of mass transfer. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2009, iss. 1–2, pp. 5–14.(in Russian)]
11. Сыромятников, П.В., Матричный метод построения символа функции Грина для стационарных задач турбулентной диффузии в многослойных средах. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 62–71. [Syromyatnikov, P.V., Matrix method for constructing the Green's function symbol for stationary problems of turbulent diffusion in multilayer media. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 62–71. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-15-3-62-71
12. Кривошеева, М.А., Лапина, О.Н., Нестеренко, А.Г., Никитин, Ю.Г., Сыромятников, П.В., Аналитическое и численное моделирование стационарной краевой задачи диффузии – конвекции – распада для однородного слоя на основе уравнений турбулентной диффузии. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 3, с. 37–47. [Krivosheeva, M.A., Lapina, O.N., Nesterenko, A.G., Nikitin, Yu.G., Syromyatnikov, P.V., Analytical

and numerical modeling of the stationary boundary value problem of diffusion-convection-decay for a homogeneous layer based on the equations of turbulent diffusion. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 37–47. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-17-3-37-47

13. Сыромятников, П.В., Матричный метод решения нестационарных задач конвекции – диффузии в полуограниченных многослойных и градиентных средах. *Наука Юга России*, 2018, т. 14, № 4, с. 3–13. [Syromyatnikov, P.V., Matrix method for solving non-stationary problems of convection – diffusion in semi-bounded multilayer and gradient media. *Nauka Yuga Rossii = Science of the South of Russia*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 3–13. (in Russian)]

14. Лапина, О.Н., Нестеренко, А.Г., Никитин, Ю.Г., Павлова, А.В., Моделирование процесса диффузии – конвекции загрязняющей примеси от периодического источника. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 26–35. [Lapina, O.N., Nesterenko, A.G., Nikitin, Yu.G., Pavlova, A.V., Modeling of the process of diffusion – convection of a pollutant from a periodic source. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 26–35. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-19-1-25-34

15. Liu, G.R., Han, X., *Computational inverse techniques in nondestructive evaluation.* CRS Press, 2003.

16. Gablonsky, J.N., *DIRECT. Version 2.0. User Guide.* Technical Report CRSC-TR01-08. Center for Research and Scientific Computation, North Carolina State University, 2001.

17. Karmazin, A., Kirillova, E., Seemsnn, W., Syromyatnikov, P., On the solution of crack identification problem in composite materials. In *Advanced Problems of Mechanics: Proceedings of the XXXIX International Summer School. July 1–5 2011. St-Peterburg, Russia*, pp. 227–234.

18. Рапута, В.Ф., Крылова, А.И., Оптимизационные модели управления и контроля источников аэрозолей в приземном слое атмосферы. *Оптика атмосферы и океана*, 1994, т. 7, № 8, с. 1120–1125. [Raputa, V.F., Krylova, A.I., Optimization models for the control and monitoring of aerosol sources in the surface layer of the atmosphere. *Optika atmosfery i okeana = Atmospheric and oceanic optics*, 1994, vol. 7, no. 8, pp. 1120–1125. (in Russian)]

УДК 534.2 DOI 10.31429/vestnik-19-4-83-90

Изучение особенностей нормальных волн в волноводах мелкого моря с поглощающим дном

В. А. Лисютин✉, **О. Р. Ластовенко**

Севастопольский государственный университет, Университетская 33, Севастополь, 299053, Россия

✉ Лисютин Виктор Александрович; ORCID 0000-0003-3363-888X; e-mail: vlisiutin@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается модель изоскоростного гидроакустического волновода с поглощающим дном. Численно решается дисперсионное уравнение, рассчитываются волновые числа. Для определения критических частот мод используется условие излучения. Уточняется классификация мод в волноводе с поглощением, согласно которой собственные моды подразделяются на диссипативные и захваченные. Вычисляется количество собственных мод в волноводе и их критические частоты в зависимости от величины затухания в полупространстве. Показывается, что количество собственных мод в волноводе с поглощающим дном увеличивается, а критическая частота моды снижается. Обсуждается наблюдаемость диссипативных мод и целесообразность включения их в полное волновое поле. Делается вывод, что снижение критической частоты мод важно при симуляции импульсных звуковых полей, поскольку позволяет выявить важный компонент поля моды — головную волну.

Ключевые слова: гидроакустический волновод, нормальные волны, дисперсионное уравнение, морское дно, волновые числа, критическая частота.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Лисютин В. А., Ластовенко О. Р. Изучение особенностей нормальных волн в волноводах мелкого моря с поглощающим дном // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 83–90. DOI 10.31429/vestnik-19-4-83-90

Поступила 3 октября 2022 г. После доработки 8 ноября 2022 г. Принято 10 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Вклад соавторов распределился следующим образом: Лисютин В.А. – концепция работы, анализ данных, написание статьи. Ластовенко О.Р. – проведение вычислений, внесение правок.

Study of the Particularities of Normal Modes in Shallow Water Waveguides with an Absorbing Bottom

V. A. Lisyutin✉, **O. R. Lastovenko**

Sevastopol State University, Universitetskaya 33, Sevastopol, 299053, Russia

✉ Victor A. Lisyutin; ORCID 0000-0003-3363-888X; e-mail: vlisiutin@mail.ru

Abstract. The article considers a model of an isovelocity hydroacoustic waveguide with an absorbing bottom. The dispersion relation is solved numerically, the wave numbers are calculated. In the case of a bottom with absorption, Snell's law is not applicable, therefore, to determine the mode critical frequencies, the radiation condition is used. The classification of modes in a waveguide with absorption is refined, according to which eigenmodes are divided into dissipative and trapped modes. For eigenmodes, the radiation condition is satisfied, but for dissipative modes, the grazing angle is greater than the critical grazing angle. The number of eigenmodes in the waveguide and their critical frequencies are calculated depending on the attenuation value in the half-space. It is shown that the number of eigenmodes in a waveguide with an absorbing bottom increases, while the critical mode frequency decreases. The observability of dissipative modes and the expediency of including them in the total wave field are discussed. It is concluded that the effect of reducing the critical mode frequency is important in calculations in a wide frequency band, since it makes it possible to adequately reproduce the head wave field.

Keywords: hydroacoustic waveguide, normal modes, dispersion relation, seabed, wave numbers, critical frequency.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Lisyutin, V. A., Lastovenko, O. R., Study of the particularities of normal modes in shallow water waveguides with an absorbing bottom. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 83–90. DOI 10.31429/vestnik-19-4-83-90

Received 3 October 2022. Revised 8 November 2022. Accepted 10 November 2022. Published 30 November 2022.

The author(s) declare no competing interests. The contribution of the co-authors was distributed as follows: Victor A. Lisyutin – concept of work, data analysis, writing an article. Olga R. Lastovenko – calculations, editing.

Введение

В море звуковые волны распространяются в условиях гидроакустического волновода — водного слоя, ограниченного сверху свободной поверхностью, снизу — морским дном. Основная модель волновода мелкого моря — «волновод Пекериса» предполагает водный слой с постоянной по вертикали скоростью звука и дно в виде жидкого однородного безграничного полупространства [1].

Достоинство волновода Пекериса как модели первого приближения – возможность аналитического представления звукового поля и отсутствие сопоставимого масштаба для абсолютной глубины водного слоя, что дает возможность изменять его глубину от единиц до сотен длин волн и перемещать частотный диапазон исследований в зависимости от целесообразности в область единиц или тысяч герц. Однородное полупространство является осреднением слоистого дна вместе с внутренними градиентами акустических характеристик. По этим причинам модель Пекериса и сейчас используется наиболее часто [2, 3].

1. Постановка задачи

Модель волновода Пекериса показана на рис. 1. Скорость звука в воде (среда «1») — c_1, дне «b» — c_b, плотности — ρ_1, ρ_b соответственно, причем $c_1 < c_b$, $\rho_1 < \rho_b$. Затухание в полупространстве задается тангенсом потерь β_b.

Граничная задача для волновода с дном в виде полупространства, решенная К. Пекерисом [4] более полувека назад, оказалась актуальной для теоретической гидроакустики и обсуждается по сей день [5–8].

Пекерис пренебрегает затуханием в полупространстве, допускает существование предельного угла скольжения $\chi_c = \arccos(c_1/c_b)$, соответствующей этому углу критической частоты $f_{cSnell} = \dfrac{c_1(l-1/2)}{2h\sqrt{1-c_1^2/c_b^2}}$ для каждой моды с номером l, и рассматривает только вещественные корни дисперсионного уравнения. Решение Пекериса задачи для акустического поля состоит

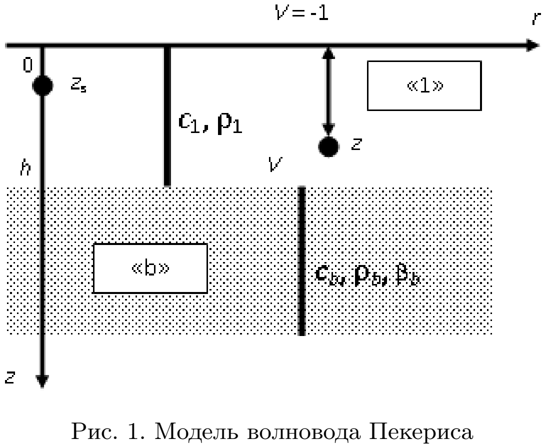


Рис. 1. Модель волновода Пекериса

из суммы нормальных волн (дискретный спектр горизонтально-волновых чисел) плюс криволинейный интеграл по берегам разреза (сплошной спектр). Разрез Пекериса в комплексной плоскости проходит параллельно мнимой оси [4]. Отметим, что примененный Пекерисом способ проведения разреза не единственный. Подробный анализ преимуществ и недостатков различных способов проведения разрезов приведен в работах [6, 7] и здесь не воспроизводится.

Представляемая статья использует подход работы [6] и путем численного анализа дисперсионного уравнения решает задачу изучения и выявления особенностей нормальных волн в волноводах мелкого моря с поглощением. Анализ носит общий характер и не зависит от однородности или слоистости дна.

2. Условие излучения и дисперсионное уравнение

При учете затухания волновое число и скорость звука в полупространстве комплексны, закон Снелля неприменим и критические частоты мод должны определяться иначе, исходя из условия излучения [6]. В этом случае собственные моды для волновода с поглощающим дном можно разделить на диссипативные и захваченные. Комплексные волновые числа, соответствующие собственным модам, являются решениями дисперсионного уравнения, для них выполняется условие излучения, однако для диссипативных мод угол скольжения эквивалентного луча оказывается больше критического [6].

Если обозначить поле моды на нижней границе водного слоя как $p_{1l}(z = h)$, то поле в полупространстве может быть записано в виде

$$p_{bl}(z > h) = p_{1l}(z = h) \exp(-ib_{bl}(z - h)), \tag{2.1}$$

где $b_{bl} = \sqrt{k_b^2 - \xi_l^2}$ — вертикальное волновое число моды в полупространстве, $k_b = \dfrac{2\pi f}{c_b}(1-i\beta_b)$ — волновое число в полупространстве, ξ_l — горизонтальное волновое число моды. Из (2.1) видно, что поле в дне будет убывать с глубиной, если $\mathrm{Im}(b_{bl}) < 0$. Это условие и является критерием собственной моды волновода, основанном на условии излучения.

Дисперсионное уравнение $1+V\exp(2ib_1h) = 0$ [9] для численного решения было приведено к виду функции относительно вертикального волнового числа моды водного слоя $b_{1l} = \sqrt{k_1^2 - \xi_l^2}$:

$$-2hb_{1l} + (2l - 1)\pi - i\ln(V) = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) решалось методом секущих, коэффициент отражения V от дна рассчитывается по формуле $V = \dfrac{Z_{bl} - Z_{1l}}{Z_{bl} + Z_{1l}}$, где импеданс среды «1» $Z_{1l} = \omega\rho_1/b_{1l}$, $Z_{bl} = \omega\rho_b/b_{bl}$ — входной импеданс полупространства, результирующая невязка задавалась $< 10^{-8}$, область локализации корней $0{,}5l\pi/h$ и $l\pi/h$. Вертикальное и горизонтальное волновые числа в полупространстве были выражены через b_1 с помощью формул

$$\xi_l = -\sqrt{k_1^2 - b_{1l}^2}, \tag{2.3}$$

$$b_{1l} = \sqrt{k_1^2 - \xi_l^2}, \tag{2.4}$$

$$b_{bl} = \sqrt{k_b^2 - \xi_l^2}. \tag{2.5}$$

Отрицательный знак в формуле для горизонтального волнового числа и около мнимой части волнового числа в полупространстве соответствуют выбору временного множителя в виде $\exp(i\omega t)$ [6, 10].

Существуют и корни (2.2), для которых $\mathrm{Im}(b_{bl}) > 0$. Эти корни соответствуют несобственным модам или «квазимодам» (вытекающие, *leaky*), число которых бесконечно [7, 9]. Условие излучения для квазимод не выполняется, поле экспоненциально возрастает с глубиной. Полем квазимод можно аппроксимировать интеграл по берегам разреза, т.е. часть полного поля, не

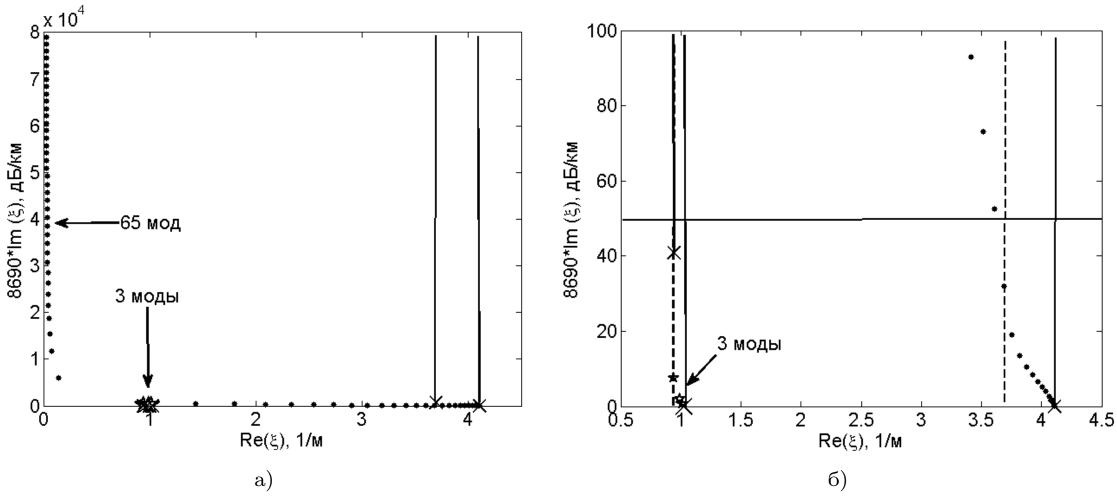


Рис. 2. Полюсы на комплексной плоскости горизонтально-волновых чисел; а) — панорама, б) — увеличенный фрагмент

выражающуюся через нормальные волны. Изучению целесообразности включения в полное поле квазимод посвящена статья [7].

Другой способ, позволяющий перевести квазимоды в обычные диссипативные и аппроксимировать интеграл по берегам разреза — замыкание волновода абсолютно жесткой границей снизу на достаточно большой глубине, такой, чтобы спадающее поле мод было уже пренебрежимо мало [8]. В этом случае поле с непрерывным спектром волновых чисел (интеграл по берегам разреза) преобразуется в нормальные волны, число которых велико, но конечно.

3. Особенности нормальных волн

Для единообразия и удобства последующего анализа, как и в монографии [9], определим параметрическую частоту $k_1 h\nu$, $\nu = \sqrt{1-(c_1/c_b)^2}$.

Дно без потерь. Согласно [9] при возрастании параметрической частоты $k_1 h\nu$ первый действительный корень дисперсионного уравнения (2.2) соответствует критической частоте, определенной по закону Снелля, $(k_1 h\nu)_1 = \pi/2$, при этом $hb_{1l} = \pi/2$. Критические параметрические частоты последующих мод и вертикальные волновые числа образуют последовательность $(k_1 h\nu)_{cl} = hb_{1l} = (l-1)\pi/2$.

Рассмотрим отличия характеристик нормальных волн, возникающие вследствие поглощения энергии в дне.

Полюса и разрезы. Возьмем реальный волновод мелкого моря — точку, где проводился эксперимент SAX-99. Параметры следующие: $h = 20$ м, $c_1 = 1530$ м/с, $\rho_1 = 1023$ кг/м^3, $\rho_b = 2048$ кг/м^3; $c_b = 1700$ м/с, $\beta_b = 0{,}02$ на частоте $f = 1000$ Гц — многомодовый; $c_b = 1670$ м/с, $\beta_b = 0{,}005$ на частоте $f = 250$ Гц — маломодовый характер распространения [10, 11].

На рис. 2 показан I-й квадрант комплексной плоскости горизонтально-волновых чисел и вычисленные полюсы, соответствующие собственным модам в много- и маломодовом режиме. Формальный знак перед (2.3) отброшен и полюсы перемещены в привычный I-й квадрант.

Крестами отмечены точки ветвления радикалов (2.4) и (2.5) $\pm k_1$ и $\pm k_2$, линиями — разрезы Пекериса (П — разрезы). На увеличенном фрагменте (справа) пунктир — проекция точки ветвления $+k_2$ на вещественную ось. По вертикали — модальный коэффициент поглощения, равный $8690 \cdot \mathrm{Im}(\xi_l)$, дБ/км.

В маломодовом режиме всего 3 захваченные моды, диссипативных нет. Соответствующие полюсы расположены левее П-разреза, выходящего из точки $+k_1$, и ниже разреза, выходящего из точки $+k_2$. С ростом частоты в многомодовом режиме число полюсов стремительно возрастает. На панораме рис. 2а — 65 мод, из них 12 захваченных и 53 диссипативных. Модальный коэффициент поглощения для старших диссипативных мод достигает огромных значений — многие тысячи дБ/км. Главная ветвь радикала (2.5) соответствует условию $\operatorname{Re}(\xi) = 0$, а разрез, идущий из точки $+k_2$ направо, проходит по линии $\operatorname{Re}(\xi) = 0$. В работе [7] такой вид разреза, аналогичный П-разрезу, назван М-разрез, поскольку система Matlab автоматически выбирает знак комплексного корня по этому правилу. Разрез из той же точки влево аналогичен разрезу Юинга–Жардецки–Пресса (ЮЖП) [9] и проходит вдоль гиперболической линии, так что диссипативные моды оказываются ниже, а квазимоды — выше линии разреза, и таким образом исключаются из полного поля.

В работе [6] приведен следующий критерий возможности обнаружения моды в волноводе: затухание моды на расстоянии равном десять водных глубин не должно превышать 10 дБ. Эта граница — 50 дБ/км отмечена горизонтальной линией на рис. 2б. Видно, что практически все диссипативные моды вряд ли могут быть обнаружены.

М. Букингем в работе [6] приводит следующую формулу для количества собственных мод в зависимости от угла потерь:

$$l_{\max} = \left[1 - \frac{\beta_b^2 \operatorname{ctg}^4(\chi_c)}{R^4}\right] \frac{2Rfh\sin(\chi_c)}{c_1} + \frac{1}{2}, \tag{3.1}$$

где

$$R = \sqrt{1 + \beta_b^2 \operatorname{ctg}^2(\chi_c)\left\{1 + \left(\frac{2\pi fh}{c_2 \operatorname{arcth}(\rho_1/\rho_2)}\right)^2\right\}}.$$

Число захваченных мод определяется формулой

$$l_{mSnell} = \frac{2fh}{c_1}\sin(\chi_c) + \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Вычисления по формулам (3.1), (3.2) дают для многомодового характера распространения $l_{\max} = 65$, $l_{mSnell} = 12$ мод; для маломодового $l_{\max} = 3$, $l_{mSnell} = 3$, что в точности соответствует численным расчетам.

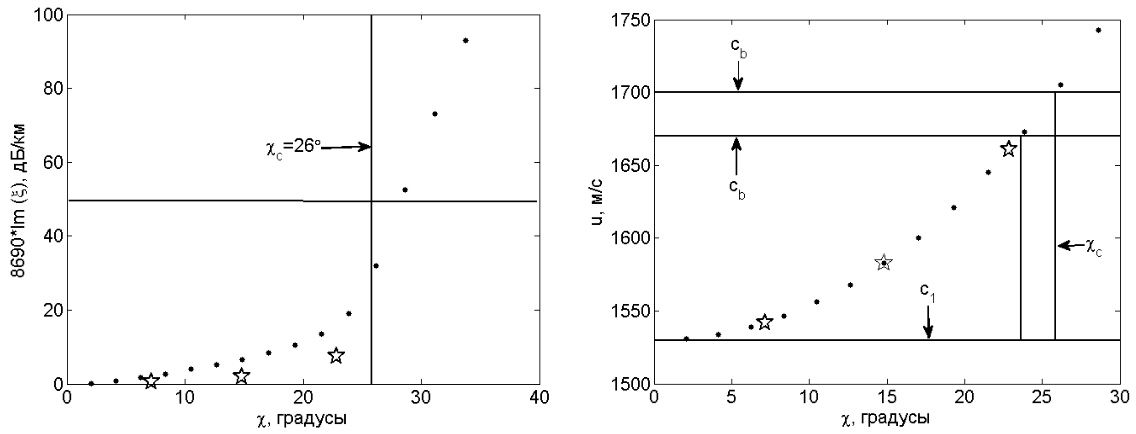
На рис. 3 показаны зависимости модального коэффициента поглощения и фазовой скорости нормальной волны $u_l = \omega/\operatorname{Re}(\xi_l)$ в зависимости от угла скольжения для много- и маломодового характера распространения.

Диапазон ограничен только модами с возможностью их обнаружения. На рисунке нанесены границы: критический угол скольжения (на рис. 2б немного разный для маломодового и многомодового случая), минимальное (c_1) и максимальное (c_b) значение фазовых скоростей захваченных мод. Хорошо видны все 12 и 3 захваченные моды. Для диссипативных мод угол скольжения оказывается больше предельного, а фазовая скорость больше скорости звука в полупространстве. Для высших диссипативных мод угол скольжения приближается к 90°, а фазовая скорость соответственно достигает огромных значений.

Критические частоты мод. Для вычисления критических частот мод в зависимости от тангенса потерь целесообразно взять другие акустические характеристики нижней границы волновода. Первый тип — песчаное дно со свойствами SAX-99: $\rho_b = 2048$ кг/м^3; $c_b = 1700$ м/с. Второй тип — илистое дно: $\rho_b = 1800$ кг/м^3; $c_b = 1600$ м/с — лишь немного больше, чем в воде [10, 11].

Графики зависимости критической частоты для 10 мод от тангенса потерь в полупространстве показаны на рис. 4.

По оси ординат отложены значения относительной критической частоты Ω, умноженной на номер моды. Частота Ω здесь определена как отношение критической частоты $f_{cl}(\beta_b)$, вычисленной при решении дисперсионного уравнения (2.2), к критической частоте, определенной из закона Снелля: $\Omega = f_{cl}(\beta_b)/f_{clSnell}$. Видно, что, чем больше номер моды и чем меньше



а) б)

Рис. 3. а) Модальный коэффициент поглощения в зависимости от угла скольжения; б) фазовая скорость мод в зависимости от угла скольжения

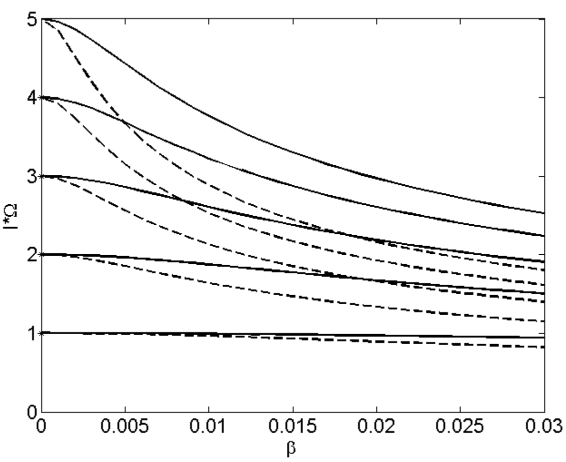


Рис. 4. Зависимость критической частоты нормальных волн от угла потерь в полупространстве. Линии: сплошная — песчаное, пунктир — илистое дно

акустическая и объемная плотности грунта, тем значительнее проявление поглощения в полупространстве. При $\beta_b \approx 0{,}03$ для илистого дна критическая частота 5-й моды уменьшается до ≈ 45 % и до 60 % для песчаного, от вычисленных из закона Снелля. Критическая частота первой моды для любых грунтов изменяется незначительно.

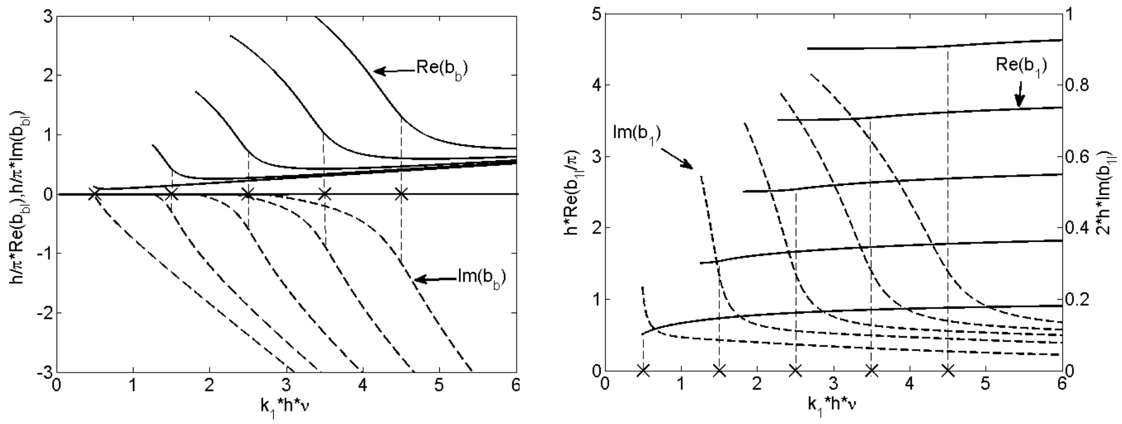
Волновые числа мод. На рис. 5 показаны частотные зависимости действительных и мнимых частей вертикальных волновых чисел полупространства и водного слоя. Как и в [9], по горизонтали — параметр $k_1 h\nu$. Из рис. 5 а видно, как изменяется $\mathrm{Im}(b_{bl})$ при приближении к критической частоте, где $\mathrm{Im}(b_{bl})$ =0.

Крестами отмечены критические частоты мод, вычисленные по закону Снелля. Вертикальная пунктирная линия отсекает диссипативную и захваченную части зависимости $b_{bl}(k_1 h\nu)$.

Разделив вещественные и мнимые части и записывая выражение (2.1) для поля в полупространстве в виде

$$p_{bl}(z) = p_{1l}(z=h)\exp(\mathrm{Im}(b_{bl})(z-h)\exp(-iRe((b_{bl})(z-h)) = |p_{bl}(z)|\exp(-i\arg(p_{bl})),$$

можно видеть, что $\mathrm{Im}(b_{bl})$ имеет смысл «вертикального» показателя затухания, $\mathrm{Re}(b_{bl})$ — вертикальной пространственной частоты моды.



а) б)

Рис. 5. Частотные зависимости вертикальных волновых чисел: а) — в полупространстве, б) — в водном слое; × — критическая частота определенная по закону Снелля

На рис. 5б — графики действительных и мнимых частей вертикальных волновых чисел в водном слое. Из дисперсионного уравнения (2.2), представленного в форме

$$V_l = \exp(-2h\,\mathrm{Im}(b_{1l}))\exp(i((2l-1)\pi - 2h\,\mathrm{Re}(b_{1l}))) = |V_l|\exp(i\arg(V_l)),$$

видно, что $\mathrm{Im}(b_{1l})$ определяет модуль коэффициента отражения, а $\mathrm{Re}(b_{1l})$ — его фазу. Возрастание $\mathrm{Im}(b_{1l})$ приводит к уменьшению модуля коэффициента отражения и увеличению утечки звуковой энергии в полупространство. На высоких частотах, где $\mathrm{Im}(b_{1l}) \to 0$, $|V| \to 1$, а $\arg(V_l) \to \pi(2l-1) - 2\pi$.

На критической частоте каждой моды величины $h\,\mathrm{Re}(b_{1l})$ образуют последовательность: $(2l-1)\pi/2$, что соответствует [9], но значение параметрической частоты $k_1 h\nu$ оказывается несколько меньше $(2l-1)\pi/2$, характерных для волновода без поглощения.

Выводы

Показывается, что в мелководных волноводах собственные моды целесообразно подразделять на захваченные и диссипативные. Для собственных мод выполняется условие излучения, но для диссипативных угол скольжения эквивалентного луча оказывается больше предельного. При расчетах звуковых полей на тональной частоте в случае многомодового характера распространения подключение нефизичных квазимод полностью лишено смысла, поскольку обнаружимыми являются считанные диссипативные моды, а для высших номеров коэффициент поглощения достигает тысяч дБ/км. Случай маломодового характера распространения требует дополнительного исследования. Численным расчетом показано, что критическая частота диссипативных мод оказывается ниже, чем определенная из закона Снелля, причем снижение тем больше, чем выше номер моды. Эффект снижения критической частоты в большей степени проявляется для слабоуплотненных морских осадков.

Снижение критической частоты мод совершенно несущественно при тональных расчетах и, наоборот, принципиально важно при расчетах импульсных звуковых полей, поскольку позволяет выявить важный атрибут поля моды — грунтовую или головную волну, когда угол скольжения эквивалентного моде луча оказывается равен или больше предельного [12]. Если при вычислении акустического поля в широкой полосе нижней границей диапазона взять критическую частоту Снелля, после обратного фурье-преобразования, т.е. перехода во временную область, поле грунтовой волны воспроизводится неправильно, время ее вступления запаздывает. В наибольшей степени этот эффект проявляется для высших мод и в случае слоистого дна.

Литература [References]

1. Katsnelson, B., Petnikov, V., Lynch, J., *Fundamentals of shallow water acoustics.* Springer, New York, Dordrecht, Heildelberg, London, 2012.
2. Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г. Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном. *Акустический журнал*, 2015, т. 61, № 1, с. 90–100. DOI 10.7868/S0320791915010025 [Grigor'ev, V.A., Lun'kov, A.A., Petnikov, V.G., Attenuation of sound in shallow-water areas with gas-saturated bottoms. *Acoustical Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 85–95. DOI 10.1134/S1063771015010029]
3. Григорьев, В.А., Кацнельсон, Б.Г., Lynch, J.F., Определение эффективных параметров дна мелкого моря по спектрам широкополосных сигналов в условиях гидродинамической изменчивости. *Акустический журнал*, 2016, т. 62, № 3, с. 330–340. DOI 10.786X/S0320791916030072 [Grigor'ev, V.A., Katsnel'son, B.G., Lynch, J.F., Determining the effective parameters of a Shallow-Water bottom from wideband signal spectra under conditions of hydrodynamic variability. *Acoustical Physics*, 2016, vol. 62, no. 3, pp. 339–349. DOI 10.786X/S0320791916030072]
4. Пекерис, К., Теория распространения звука взрыва в мелкой воде. В *Распространение звука в океане.* Изд-во иностр. лит., Москва, 1951, с. 48–156. [Pekeris, C.L., Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geol. Soc. Am. Memoir*, vol. 27. DOI 10.1130/MEM27-2-p1]
5. Tolstoy, I., The Pekeris waveguide revisited. *J. Acoust. Soc. Am,* 2006, vol. 120, iss. 3, pp. 1183–1185. DOI 10.1121/1.2221536
6. Buckingham, M.J., Giddens, E.M., On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space. *J. Acoust. Soc. Am*, 2006, vol. 119, iss. 1, pp. 123–147. DOI 10.1121/1.2141212
7. Григорьев, В.А., Петников, В.Г., О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод. *Акустический журнал*, 2016, т. 62, № 6, с. 681–698. [Grigor'ev, V.A., Petnikov, V.G., On the possibility of representing an acoustic field in shallow water as the sum of normal modes and quasimodes. *Acoustical Physics*, 2016, vol. 62, no. 6, pp. 700–716. DOI 10.1134/S1063771016050031]
8. Evans, R.B., Truncating the Pekeris problem. *J. Acoust. Soc. Am*, 2020, vol. 148, iss. 3, pp. 1507–1509. DOI 10.1121/10.0001961
9. Бреховских, Л.М., *Волны в слоистых средах.* Наука, Москва, 1973. [Brekhovskikh, L.M., *Waves in layered media.* Academic Press, New York, 1960.]
10. Лисютин, В.А., Ластовенко, О.Р., Оценка влияния внутреннего и вязкого трения на дисперсию и затухание звука в неконсолидированных морских осадках. *Акустический журнал*, 2020, т. 66, № 4, с. 420–436. DOI 10.31857/S0320791920040061 [Lisiyutin, V.A., Lastovenko, O.R., Assessing the influence of internal and viscous friction on dispersion and sound attenuation in unconsolidated marine sediments. *Acoustical Physics.* 2020, vol. 66, iss. 4, pp. 401–415. DOI 10.1134/S1063771020040065]
11. Лисютин, В.А., Простая акустическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним и вязким трением. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 39–51. [Lisyutin, V.A., *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, no. 3, pp. 39–51. (in Russian)] DOI 10.31429/vestnik-15-3-39-51
12. Лисютин, В.А., Ластовенко, О.Р., Довгаленко, В.В., Лучин, В.Л., Петренко, Н.В., Метод симуляции импульсной характеристики горизонтально-слоистого гидроакустического волновода с жидким дном. *Инженерный вестник Дона*, 2020, № 1. [Lisyutin, V.A., Lastovenko, O.R., Dovgalenko, V.V., Luchin, V.L., Petrenko, N.V., *Inzhenernyj vestnik Dona = Don Engineering Bulletin*, 2020, № 1. (in Russian)] URL: https://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2020/6281

УДК 539.3
DOI 10.31429/vestnik-19-4-91-99

К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на акустическом основании

И. С. Телятников✉, **М. Н. Колесников**, **А. В. Павлова**, **С. Е. Рубцов**

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Телятников Илья Сергеевич; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru

Аннотация. В масштабе строения Земли литосферные плиты можно рассматривать как покрытия относительно малой толщины, поэтому простейшей моделью протяженной литосферной структуры может служить пластина, что приводит к моделированию их взаимодействия с помощью разделенных деформируемых пластин. В работе рассматривается плоская задача об установившихся колебаниях системы двух контактирующих полуограниченных пластин Кирхгофа на слое идеальной жидкости, расположенном на недеформируемом основании. Колебания возбуждаются действием сосредоточенного гармонического источника, расположенного в акустической среде. Решение построено с применением интегрального подхода, метода собственных функций и метода факторизации, развитых для подобных задач, возникающих в геофизике, сейсмоакустике и экологии. Получены интегральные представления амплитудных значений прогибов покрытия (перемещения поверхности рассматриваемой структуры) и давления на границе соприкосновения упругих пластин с жидкой средой.

Ключевые слова: пластины Кирхгофа, установившиеся колебания, акустическая среда, сосредоточенный источник, метод собственных функций, метод факторизации.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Кубанского научного фонда (проект № 22-21-20032, https://rscf.ru/project/22-21-20032/).

Цитирование: Телятников И. С., Колесников М. Н., Павлова А. В., Рубцов С. Е. К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на акустическом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 4. С. 91–99. DOI 10.31429/vestnik-19-4-91-99

Поступила 25 ноября 2022 г. После доработки 28 ноября 2022 г. Принято 30 ноября 2022 г. Публикация 30 ноября 2022 г.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи.

On the Study of Kirchhoff Plates Vibration on an Acoustic Base

I. S. Telyatnikov✉, **M. N. Kolesnikov**, **A. V. Pavlova**, **S. E. Rubtsov**

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Ilya S. Telyatnikov; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. In seismology, the study of the wave field on the surface of a medium makes it possible to build models of natural tectonic processes in the Earth's crust and upper mantle. On the scale of the Earth's structure, lithospheric plates can be considered as coatings of relatively small thickness; therefore, a plate can serve as the simplest model of an extended lithospheric structure, which leads to modeling their interactions using separated deformable plates. The problems of geodynamic interaction of deformable plates with acoustic and elastic media can be studied by methods of the contact problems theory. In this paper, we consider a plane problem of steady-state oscillations for a system of two contacting semi-bounded Kirchhoff plates on a layer of an ideal fluid located on a non-deformable foundation. Oscillations are excited by the action of a concentrated harmonic source located in an acoustic medium. The solution is constructed using the integral approach, the eigenfunction method, and the factorization method developed for similar problems arising in geophysics, seismoacoustics, and ecology. We also obtained integral representations of the amplitude values of the coating deflections (the surface displacements of the structure under consideration) and the pressure at the interface between the elastic plates and the liquid medium. The presented approach makes it possible to study the features of the propagation for waves generated by oscillating loads in acoustic media with a coating.

Keywords: Kirchhoff plates, steady-state oscillations, acoustic medium, concentrated source, eigen function method, factorization method.

Funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation (project No. 22-21-20032, https://rscf.ru/project/22-21-20032/).

Cite as: Telyatnikov, I. S., Kolesnikov, M. N., Pavlova, A. V., Rubtsov, S. E., On the study of Kirchhoff plates vibration on an acoustic base. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 91–99. DOI 10.31429/vestnik-19-4-91-99

Received 25 November 2022. Revised 28 November 2022. Accepted 30 November 2022. Published 30 November 2022.

The authors declare no competing interests. The authors contributed equally.

Введение

Изучение волновых полей на поверхности геологических структур связано с задачами мониторинга опасных эндогеодинамических и неблагоприятных экзогенных процессов, а также определения их связи с тектоническим поведением территорий. Результаты исследования вопросов подготовки сейсмических событий и анализа условий, которые определили их зарождение и процесс развития, представлены в многочисленных публикациях. Теоретические построения [1,2 и др.] инициировали развитие методов механико-математического мониторинга, включая моделирование волновых полей от источников различной природы.

В работах ученых Кубанского государственного университета и ЮНЦ РАН предложен подход к моделированию взаимодействия разномасштабных геологических отдельностей, основанный на использовании теории блочных структур. Так, в [3–5] построена модель «стартового» землетрясения, изучена возможность решения прогностических задач путем анализа нарастания концентрации сейсмогенерирующих контактных напряжений в области сближения литосферных структур.

В масштабе строения Земли литосферные плиты можно рассматривать как покрытия относительно малой толщины, поэтому простейшей моделью протяженной литосферной структуры может служить пластина. Проблемы геодинамического взаимодействия деформируемых пластин с акустической и упругой средами могут быть изучены методами теории контактных задач.

Задачам для упругих пластин, подверженных воздействиям статических и вибрационных нагрузок, в различной постановке посвящено большое число работ [6–8 и др.], ориентированных на решение проблем неразрушающего контроля, конструкционных материалов и технологий, сейсмологии и пр.

Авторами рассматривались задачи для акустического слоя с покрытием, описываемым как уравнениями теории тонких пластин, так и полной системой уравнений Ляме [9]. В настоящей работе рассматривается плоская задача об установившихся колебаниях системы двух контактирующих полуограниченных пластин Кирхгофа на слое идеальной жидкости, расположенном на недеформируемом основании.

1. Постановка задачи для слоя жидкости с составным покрытием

Рассматривается задача о вибрации слоя жидкости на недеформируемом основании под действием сосредоточенного внутреннего источника. На поверхности акустической среды расположено упругое покрытие в виде двух граничащих вдоль прямой $x_1 = 0$ полубесконечных пластин Кирхгофа $\Omega_+ = \{x_1 > 0\}$ и $\Omega_- = \{x_1 < 0\}$. Для установившегося режима колебаний (с частотой ω) множитель $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ всюду опущен, во всех соотношениях использованы комплексные амплитуды соответствующих функций.

Колебания пластин Кирхгофа, моделирующих составное покрытие, после отделения временного множителя описываются линеаризованными уравнениями относительно амплитуд смещений их срединной плоскости $u_\pm(x_1)$ [10], во всех последующих формулах индекс «+» указывает на правую полуплоскость, «−» — на левую,

$$R_\pm(\partial x_1)\, u_\pm(x_1) - \varepsilon_{\pm 5} g_\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in \Omega_\pm, \tag{1.1}$$

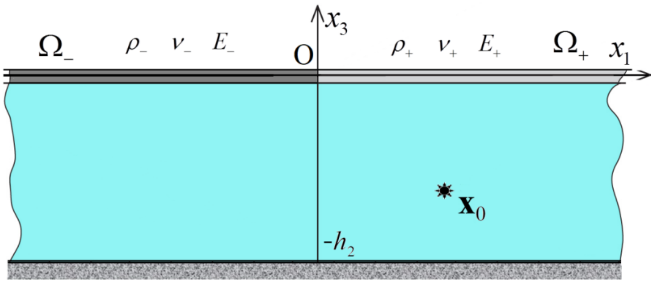


Рис. 1. Геометрия задачи

где

$$R_{\pm}(\partial x_1) = \varepsilon_{\pm 3}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \varepsilon_{\pm 4}, \quad \varepsilon_{\pm 3} = h_{\pm}^2/12, \quad \varepsilon_{\pm 4} = \omega^2\rho_{\pm}\left(1-\nu_{\pm}^2\right)E_{\pm}^{-1}, \quad \varepsilon_{\pm 5} = \left(1-\nu_{\pm}^2\right)E_{\pm}^{-1}h_{\pm}^{-1},$$

$\rho_{\pm}$ — плотности, $E_{\pm}$ — модули Юнга, $\nu_{\pm}$ — коэффициенты Пуассона, $h_{\pm}$ — толщины пластин, $g_{\pm}(x_1)$ — амплитуды напряжений на нижних границах пластин.

Оси декартовой системы координат выбраны, как показано на рис. 1. Ось Ox_1 проходит через срединную плоскость пластин, начало координат совпадает с разломом.

Граничные условия в $x_1 = 0$ на срединной плоскости задаются соотношениями

$$L_1(\partial x_1)\,u(x_1)|_{x_1=0+0} + L_2(\partial x_1)\,u(x_1)|_{x_1=0-0} = f. \tag{1.2}$$

Взаимодействия частей покрытия в области их контакта определяет конкретный вид операторов $L_j(\partial x_1)$, $j=\overline{1,2}$, и правой части (1.2), различные варианты граничных условий приведены в [10,11].

В акустической среде поле давления $p(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца [12]

$$\Delta p(\mathbf{x}) + \kappa^2 p(\mathbf{x}) = A_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1,\ x_3)$, $\mathbf{x}_0 = (x_{10},\ x_{30})$ — точка локализации осциллирующего источника, $\kappa = \omega/c$, c — скорость распространения акустических волн, A_0 — характеристика интенсивности источника, Δ — двумерный оператор Лапласа.

При установившемся движении акустической среды, так как $p(\mathbf{x}) = \mathrm{i}\omega\rho_0\varphi(\mathbf{x})$, для потенциала скоростей $\varphi(\mathbf{x})$ в области $(-\infty < x_1 < +\infty,\ -h_2 \leqslant x_3 < -0)$ справедливо уравнение Гельмгольца

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{x}) = A_1\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{1.3}$$

где $A_1 = -\dfrac{\mathrm{i}A_0}{\omega\rho_0}$, ρ_0 — плотность жидкости.

На границе пластин покрытия и акустического слоя (при $x_3 = 0$) нормальная компонента напряжений равна по величине давлению

$$g_{\pm}(x_1) = -p(x_1,0) = -\mathrm{i}\omega\rho_0\varphi(x_1,0), \quad x_1 \in \Omega_{\pm}. \tag{1.4}$$

Вертикальные составляющие векторов скоростей для покрытия и акустического слоя в области контакта непрерывны

$$-\mathrm{i}\,\omega\,u_{\pm}(x_1) = \frac{\partial\varphi(x_1,0)}{\partial x_3}, \quad x_1 \in \Omega_{\pm}. \tag{1.5}$$

В области контакта жидкости с недеформируемым основанием ($x_3 = -h_2$) выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi(x_1,-h_2)}{\partial x_3} = 0, \quad x_1 \in \mathrm{R}. \tag{1.6}$$

В случае установившихся гармонических колебаний к граничным условиям добавляются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения.

В работе [13] с помощью топологического подхода исследована задача о взаимодействии системы полубесконечных плит с тяжелой жидкостью в предположении, что торцы плит не контактируют и между ними присутствует жидкость. В настоящей работе полагается, что в зоне контакта пластин жидкости нет.

2. Решение граничной задачи для слоя жидкости

Построим решение задачи для потенциала скоростей (1.3), (1.4), (1.6), считая $g_{\pm}(x_1)$ заданным.

Решение граничной задачи будем строить с помощью интегрального преобразования Фурье по горизонтальной координате x_1. Найдем Фурье-образ $\varphi(x_1, x_3)$, для этого введем обозначение

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \mathrm{V}\varphi(x_1, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_3) \exp(\mathrm{i}\alpha_1 x_1)\,\mathrm{d}x_1.$$

Здесь V — оператор преобразования Фурье.

Применив преобразование Фурье к уравнению (1.3) для $\varphi(\mathbf{x})$ и граничным условиям (1.4), (1.6), получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Phi''(\alpha_1, x_3) + \left(\kappa^2 - \alpha_1^2\right)\Phi(\alpha_1, x_3) = A_1\delta(x_3 - x_{30})\exp(\mathrm{i}\alpha_1 x_{10}), \tag{2.1}$$

где штрихом обозначена производная по переменной x_3, с граничными условиями

$$\Phi(\alpha_1, 0) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\rho_0} G(\alpha_1), \quad \Phi'(\alpha_1, -h_2) = 0, \tag{2.2}$$

$$G(\alpha_1) = G_+(\alpha_1) + G_-(\alpha_1), \quad G_{\pm}(\alpha_1) = \mathrm{V}g_{\pm}(x_1).$$

Используя интегральное представление δ-функции Дирака [14]

$$\delta(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\beta\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$

уравнение (2.1) можно записать

$$\Phi''(\alpha_1, x_3) + \left(\kappa^2 - \alpha_1^2\right)\Phi(\alpha_1, x_3) = \frac{A_1 e^{\mathrm{i}\alpha_1 x_{10}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\xi(x_3 - x_{30})}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.3}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.3) представляется в виде

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \Phi_0(\alpha_1, x_3) + \Phi_1(\alpha_1, x_3), \tag{2.4}$$

где первое слагаемое — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Phi_0(\alpha_1, x_3) = C_1 e^{\sigma_0 x_3} + C_2 e^{-\sigma_0 x_3}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\alpha_1^2 - \kappa^2},$$

а второе — частное решение неоднородного уравнения

$$\Phi_1(\alpha_1, x_3) = -\frac{A_1 e^{\mathrm{i}\alpha_1 x_{10}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\mathrm{i}\xi(x_3 - x_{30}))}{\xi^2 + \sigma_0^2}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{A_1\exp(\mathrm{i}\alpha_1 x_{10})\exp(-\sigma_0|x_3 - x_{30}|)}{2\sigma_0}.$$

Тогда

$$\Phi_1'(\alpha_1, x_3) = \frac{A_1}{2}\operatorname{sgn}(x_3 - x_{30})\exp(-\sigma_0|x_3 - x_{30}|)\exp(\mathrm{i}\alpha_1 x_{10}).$$

Граничные условия (2.2) позволяют определить константы C_1, C_2

$$C_1 + C_2 = \frac{\mathrm{i}}{\omega\rho_0}G(\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1, 0),$$

$$\sigma_0 C_1 \exp(-\sigma_0 h_2) - \sigma_0 C_2 \exp(\sigma_0 h_2) = -\Phi_1'(\alpha_1, -h_2).$$

Решив систему, из (2.4) получим

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \big[\mathrm{i}G(\alpha_1)\sigma_0 \operatorname{ch}\sigma_0(x_3 + h_2)(\omega\rho_0)^{-1} - \sigma_0\Phi_1(\alpha_1, 0)\operatorname{ch}\sigma_0(x_3 + h_2) - \\ - \Phi_1'(\alpha_1, -h_2)\operatorname{sh}\sigma_0 x_3 + \Phi_1(\alpha_1, x_3)\Delta_0(\alpha_1)\big]\Delta_0^{-1}(\alpha_1), \quad (2.5)$$

$$\Delta_0(\alpha_1) = \sigma_0 \operatorname{ch}(\sigma_0 h_2).$$

3. Решение граничной задачи для составного покрытия

В работах [3–5] развит подход к исследованию задач для блочных сред с покрытиями, использующий метод блочного элемента. Для частных случаев, моделирующих взаимодействие плит по прямолинейному участку границы, могут использоваться и другие подходы, в частности метод собственных функций, который позволяет облегчить построение представлений решений.

Общие решения уравнений (1.1), удовлетворяющие условию ограниченности и принципу предельного поглощения в заданных областях, соответствующие распространяющимся в горизонтальном направлении волнам, имеют вид [15]

$$u_\pm(x_1) = A_{\pm1}\mathrm{e}^{\mp q_\pm x_1} + A_{\pm2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}q_\pm x_1} + V^{-1}(x_1)R_\pm^{-1}(\alpha_1)\varepsilon_{\pm5}G_\pm(\alpha_1), \quad x_1 \in \Omega_\pm.$$

Здесь $A_{\pm j}$, $j = 1, 2$ — произвольные константы; $q_\pm \in \mathrm{R}$, $q_\pm > 0$ — корни уравнений $R_\pm(\alpha_1) = 0$. Представим $R_\pm(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm3}(\alpha_1 - q_\pm)(\alpha_1 - \mathrm{i}q_\pm)(\alpha_1 + q_\pm)(\alpha_1 + \mathrm{i}q_\pm)$.

Применив к (1.1) преобразование Фурье по переменной x_1, получим соотношения в трансформантах

$$U_\pm(\alpha_1) = \frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm1}}{\alpha_1 \pm \mathrm{i}q_+} + \frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm2}}{\alpha_1 \pm q_\pm} + \varepsilon_{\pm5}\left[R_\pm^{-1}(\alpha_1)G_\pm(\alpha_1)\right]^\pm.$$

Последнее слагаемое в правой части подлежит факторизации в виде суммы. Верхний индекс «+» квадратной скобки указывает на регулярность функции в верхней полуплоскости комплексной переменной α_1, «−» — на регулярность в нижней полуплоскости. Воспользовавшись тем, что $F^\pm(\alpha_1) = F(\alpha_1) - F^\mp(\alpha_1)$, получим [15]

$$U_\pm(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm5}R_\pm^{-1}G_\pm(\alpha_1) + \frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm1}}{\alpha_1 \pm \mathrm{i}q_\pm} + \frac{\pm iA_{\pm2}}{\alpha_1 \pm q_\pm} \mp \frac{\varepsilon_{\pm5}}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm3}}\left[\frac{G_\pm(\pm q_\pm)}{\alpha_1 \mp q_\pm} + \frac{\mathrm{i}G_j(\pm\mathrm{i}q_\pm)}{\alpha_1 \mp \mathrm{i}q_\pm}\right]. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) можно выразить преобразования Фурье амплитуд контактных напряжений на нижних поверхностях пластин

$$G_\pm(\alpha_1) = \frac{R_\pm U_\pm(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm5}} - \frac{R_\pm}{\varepsilon_{\pm5}}\left(\frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm1}}{\alpha_1 \pm \mathrm{i}q_\pm} + \frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm2}}{\alpha_1 \pm q_\pm}\right) \pm \frac{R_\pm}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm3}}\left[\frac{G_\pm(\pm q_\pm)}{\alpha_1 \mp q_\pm} + \frac{\mathrm{i}G_\pm(\pm\mathrm{i}q_\pm)}{\alpha_1 \mp \mathrm{i}q_\pm}\right]. \quad (3.2)$$

4. Построение интегральных уравнений и их решений в областях пластин

Условия сопряжения покрытия со слоем жидкости (1.5) в образах Фурье запишутся

$$U_+(\alpha_1) + U_-(\alpha_1) = \big[-(G_+(\alpha_1) + G_-(\alpha_1))\sigma_0^2 \operatorname{sh}\sigma_0 h_2(\omega\rho_0)^{-1} - \mathrm{i}\sigma_0^2\Phi_1(\alpha_1, 0)\operatorname{sh}\sigma_0 h_2 - \\ - \sigma_0\mathrm{i}\Phi_1'(\alpha_1, -h_2) + \mathrm{i}\sigma_0\Phi_1'(\alpha_1, 0)\operatorname{ch}(\sigma_0 h_2)\big](\omega\Delta_0)^{-1}. \quad (4.1)$$

Для удобства дальнейших построений введем обозначение

$$\bar{\Phi}(\alpha_1) = \frac{\mathrm{i}\sigma_0}{\omega\Delta_0}\left[\Phi_1'(\alpha_1, 0)\operatorname{ch}(\sigma_0 h_2) - \sigma_0\Phi_1(\alpha_1, 0)\operatorname{sh}(\sigma_0 h_2) - \Phi_1'(\alpha_1, -h_2)\right].$$

Таким образом, из условий сопряжения пластин покрытия с акустической средой (4.1) и выражений трансформант Фурье напряжений (3.2) вытекает система функциональных уравнений относительно интегральных характеристик перемещений

$$M_1(\alpha_1) U_+(\alpha_1) + M_2(\alpha_1) U_-(\alpha_1) = \\ = Q_0(\alpha_1) + \sum_{j=1}^{2}\left[A_{+j}Q_{+j}(\alpha_1) + A_{-j}Q_{-j}(\alpha_1) + Q^q_{+j}(\alpha_1) G_+\left(q_j^+\right) + Q^q_{-j}(\alpha_1) G_-\left(q_j^-\right)\right]. \quad (4.2)$$

Здесь в функциях $M_j(\alpha_1)$, где

$$M_j(\alpha_1) = \frac{\omega^2\Delta_0\rho_0\varepsilon_{\pm 5} + R_\pm(\alpha_1)\sigma_0^2\operatorname{sh}(\sigma_0 h_2)}{\varepsilon_{\pm 5}\sigma_0^2\operatorname{sh}(\sigma_0 h_2)},$$

индекс «1» соответствует верхнему знаку в этажных символах «±», индекс «2» — нижнему. Функции $M_1(\alpha_1)$ и $M_2(\alpha_1)$ являются четными и имеют на вещественной оси конечное число простых полюсов и нулей.

В (4.2) также введены обозначения:

$$Q_0(\alpha_1) = \frac{\omega^2\rho_0\Delta_0\bar{\Phi}(\alpha_1)}{\sigma_0^2\operatorname{sh}(\sigma_0 h_2)}, \quad Q_{\pm 1}(\alpha_1) = \frac{\pm\mathrm{i}R_\pm(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm 5}(\alpha_1 \pm \mathrm{i}q_\pm)}, \quad Q_{\pm 2}(\alpha_1) = \frac{\pm\mathrm{i}R_\pm(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm 5}(\alpha_1 \pm q_\pm)},$$

$$Q^q_{\pm 1} = \frac{\pm R_\pm(\alpha_1)}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm 3}(\alpha_1 \mp q_\pm)}, \quad Q^q_{\pm 2} = \frac{\pm\mathrm{i}R_\pm(\alpha_1)}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm 3}(\alpha_1 \mp \mathrm{i}q_\pm)}, \quad q_1^\pm = \pm q_\pm, \quad q_2^\pm = \pm\mathrm{i}q_\pm.$$

Поделив левую и правую части соотношения (4.2) на функцию $M_1(\alpha_1)$, придем к системе функциональных уравнений, которая с учетом регулярности функций $U_\pm(\alpha_1)$ в соответствующих областях может быть решена методом Винера–Хопфа [16].

Факторизовав функцию $M(\alpha_1) = M_2(\alpha_1) M_1^{-1}(\alpha_1)$ относительно контура σ, почти всюду совпадающего с вещественной осью, в виде произведения $M(\alpha_1) = M_+(\alpha_1) M_-(\alpha_1)$ по параметру α_1 и умножив последнюю систему на $M_+^{-1}(\alpha_1)$, придем к соотношениям

$$M_+^{-1}(\alpha_1) U_+(\alpha_1) + M_-(\alpha_1) U_-(\alpha_1) = P_0(\alpha_1) + \\ + \sum_{j=1}^{2}\left[A_{+j}P_{+j}(\alpha_1) + A_{-j}P_{-j}(\alpha_1) + P^q_{+j}(\alpha_1) G_+\left(q_j^+\right) + P^q_{-j}(\alpha_1) G_-\left(q_j^-\right)\right].$$

$$P_0(\alpha_1) = \frac{Q_0(\alpha_1)}{M_+(\alpha_1) M_1(\alpha_1)}, \quad P_{\pm j}(\alpha_1) = \frac{Q_{\pm j}(\alpha_1)}{M_+(\alpha_1) M_1(\alpha_1)}, \quad P^q_{\pm 1}(\alpha_1) = \frac{Q^q_{\pm 1}(\alpha_1)}{M_+(\alpha_1) M_1(\alpha_1)}.$$

Факторизуем в виде сумм относительно контура σ по параметру α_1 слагаемые, стоящие в правой части полученной системы

$$M_+^{-1}U_+ + M_-U_- = P_0^+ + P_0^- + \\ + \sum_{j=1}^{2}\left[A_{+j}\{P_{+j}\}^+ + A_{-j}\{P_{-j}\}^+ + G_+\left(q_j^+\right)\left\{P^q_{+j}\right\}^+ + G_-\left(q_j^-\right)\left\{P^q_{-j}\right\}^+\right] + \\ + \sum_{j=1}^{2}\left[A_{+j}\{P_{+j}\}^- + A_{-j}\{P_{-j}\}^- + G_+\left(q_j^+\right)\left\{P^q_{+j}\right\}^- + G_-\left(q_j^-\right)\left\{P^q_{-j}\right\}^-\right]. \quad (4.3)$$

Перенося в левую часть полученной системы уравнений все слагаемые, регулярные выше контура, а в правую — ниже контура, в соответствии с методом Винера–Хопфа, воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля [17], получаем две системы функциональных уравнений, из которых следуют выражения для образов Фурье $U_{\pm}(\alpha_1)$ перемещений пластин покрытия:

$$U_{\pm}(\alpha_1) = U_{\pm}^{0}(\alpha_1) + \sum_{j=1}^{2}\big[A_{+j}U_{\pm}^{j+}(\alpha_1) + A_{-j}U_{\pm}^{j-}(\alpha_1) + \\ + U_{q\pm}^{j+}(\alpha_1)\,G_{+}\left(q_j^{+}\right) + U_{q\pm}^{j-}(\alpha_1)\,G_{-}\left(q_j^{-}\right)\big], \quad (4.4)$$

$$U_{+}^{0}(\alpha_1) = M_{+}(\alpha_1)\,P_0^{+}(\alpha_1); \quad U_{-}^{0}(\alpha_1) = M_{-}^{-1}(\alpha_1)\,P_0^{-}(\alpha_1);$$

$$U_{+}^{j\pm}(\alpha_1) = M_{+}(\alpha_1)\left\{P_{\pm j}(\alpha_1)\right\}^{+}; \quad U_{-}^{j\pm}(\alpha_1) = M_{-}^{-1}(\alpha_1)\left\{P_{\pm j}(\alpha_1)\right\}^{-};$$

$$U_{q+}^{j\pm}(\alpha_1) = M_{+}(\alpha_1)\left\{P_{j\pm}^{q}(\alpha_1)\right\}^{+}; \quad U_{q-}^{j\pm}(\alpha_1) = M_{-}^{-1}(\alpha_1)\left\{P_{j\pm}^{q}(\alpha_1)\right\}^{-}.$$

В соотношения (4.4) входят четыре неизвестных величины $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$, $j = 1, 2$. Чтобы исключить их из выражений для $U_{\pm}(\alpha_1)$, найдем из соотношений (4.3) выражения $U_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$, $j = 1, 2$, и подставим их соответственно в выражения $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$ из (3.2). В результате приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно неизвестных $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$, разрешив которую, получим выражения $U_{\pm}(\alpha_1)$, где неизвестными являются только произвольные константы $A_{\pm j}$, $j = 1{,}2$. В результате выражения для $U_{\pm}(\alpha_1)$ могут быть записаны в следующем виде:

$$U_{\pm}(\alpha_1) = \tilde{U}_{\pm}^{0}(\alpha_1) + \sum_{j=1}^{2} A_{+j}\tilde{U}_{\pm}^{j+}(\alpha_1) + \sum_{j=1}^{2} A_{-j}\tilde{U}_{\pm}^{j-}(\alpha_1). \quad (4.5)$$

Значения $A_{\pm j}$, $j = 1, 2$, могут быть определены с помощью заданных граничных условий (1.2). Для этого к выражениям Фурье образов перемещений $U_{\pm}(\alpha_1)$ (4.5) применяется обратное преобразование Фурье V^{-1}

$$u_{\pm}(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} U_{\pm}(\alpha_1)\,e^{-\mathrm{i}\alpha_1 x_1}\,\mathrm{d}\alpha_1,$$

после подстановки $u_{\pm}(x_1)$ в (1.2) и нахождения $A_{\pm j}$, $j = 1{,}2$, из алгебраической системы будем иметь

$$u_{\pm}(x_1) = \tilde{u}_{\pm}^{0}(x_1) + \sum_{j=1}^{2} A_{+j}\tilde{u}_{\pm}^{j+}(x_1) + \sum_{j=1}^{2} A_{-j}\tilde{u}_{\pm}^{j-}(x_1).$$

Факторизация функции $M(\alpha_1)$ в виде произведения осуществляется приближенно. Для этого строится аппроксимирующая функция $M^{A}(\alpha_1)$ [18]. Для возможности аналитического обращения преобразований Фурье $U_{\pm}(\alpha_1)$ функции в правой части соотношений (4.3) заменяются аппроксимациями, как в [18].

Заключение

Литосферные плиты в масштабе строения Земли могут рассматриваться в качестве покрытий относительно малой толщины, что приводит к моделированию их взаимодействия с помощью разделенных деформируемых пластин.

Локализация волнового процесса может иметь место в структурах, проводящих волны различной природы, в частности упругие и акустические. В сейсмологии изучение волнового поля поверхности среды позволяет построить модели естественных тектонических процессов в земной коре и верхней мантии.

В работе рассмотрена задача для системы «совокупность контактирующих пластин – акустическая среда – гармонический источник». Получены интегральные представления амплитудных значений прогибов покрытия (перемещения поверхности рассматриваемой структуры) и давления на границе соприкосновения упругих пластин с жидкой средой. Представленный подход позволяет изучать особенности распространения волн, генерируемых осциллирующими нагрузками, в акустических средах с покрытием.

Литература [References]

1. Гамбурцев, Г.А., Перспективный план исследований по проблеме. Изыскание и развитие прогноза землетрясений. В сб. *Развитие идей Г.А. Гамбурцева в геофизике.* Наука, Москва, 1982, с. 304–311. [Gamburtsev, G.A., Perspective plan of research on the problem. Research and Development of Earthquake Forecast. In: *Razvitie idey G.A. Gamburtseva v geofizike = Development of G.A. Gamburtsev in geophysics.* Nauka, Moscow, 1982, pp. 304–311. (in Russian)]
2. Садовский, М.А., Болховитинов, Л.Г., Писаренко, В.Ф., *Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс.* Наука, Москва, 1987. [Sadovsky, M.A., Bolkhovitinov, L.G., Pisarenko, V.F., *Deformirovanie geofizicheskoy sredy i seysmicheskiy protsess = Deformation of the geophysical environment and the seismic process.* Nauka, Moscow, 1987. (in Russian)]
3. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5. pp. 2163–2175. DOI 10.1007/s00707-017-2092-0
4. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., On a mechanical approach to theprediction of earthquakes during horizontalmotion of litospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 10, pp. 4727–4739. DOI 10.1007/s00707-018-2255-7
5. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Хрипков, Д.А., Телятников, И.С., Евдокимов, В.С., Шестопалов, В.Л., О стартовых землетрясениях в прибрежной зоне. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3., с. 12–18. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Khripkov, D.A., Telyatnikov, I.S., Evdokimov, V.S., Shestopalov, V.L., O starting earthquakes in the coastal zone. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3., pp. 12–18. (in Russian)]
6. Altenbach, J., Altenbach, H., Eremeyev, V.A., On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech* (Special Issue), 2010, vol. 80, pp. 73–92. DOI 10.1007/s00419-009-0365-3
7. Chandrashekhara, K., *Theory of Plates.* Himayat Nagar Universities Press, 2001.
8. Еремеев, В.А., Зубов, Л.М., *Механика упругих оболочек.* Наука, Москва, 2008. [Eremeev, V.A., Zubov, L.M., *Mekhanika uprugikh obolochek = Mechanics of Elastic Shells.* Nauka, Moscow, 2008. (in Russian)]
9. Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Telyatnikov, I.S., On models of wave processes in geological structures with the presence of a interlayer water. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2022, vol. 1070. art. 012013. DOI 10.1088/1755-1315/1070/1/012013
10. Вольмир, А.С., *Нелинейная динамика пластинок и оболочек.* Наука, Москва, 1972. [Volmir, A.S., *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek = Nonlinear dynamics of plates and shells.* Nauka, Moscow, 1972. (in Russian)]
11. Гольденвейзер, А.Л., *Теория упругих тонких оболочек.* Наука, Москва, 1976. [Goldenweiser, A.L., *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek = Theory of elastic thin shells.* Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)]
12. Исакович, М.А., *Общая акустика.* Наука, Москва, 1973. [Isakovich, M.A., *Obshchaya akustika = General acoustics.* Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]
13. Евдокимова, О.В., Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Уафа, С.Б., Коваленко, М.М., Бушуева, О.А., О некоторых приложениях покрытий с жидкостью. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2019, т. 16, №3, с. 40–45. [Evdokimova, O.V., Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Uafa, S.B., Kovalenko, M.M., Bushueva, O.A., On some applications of liquid coatings. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 40–45. (in Russian)]
14. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А., *Уравнения математической физики.* Наука, Москва, 2004. [Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of Mathematical Physics.* Nauka, Moscow, 2004. (in Russian)]
15. Телятников, И.С., К моделям и методам изучения взаимодействия литосферных структур в

области разломов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2016, № 2, с. 78–89. [Telyatnikov, I.S., On models and methods for studying the interaction of lithospheric structures in the fault area. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 2, pp. 78–89. (in Russian)]

16. Noble, B., *Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations*. Pergamon Press, New York, 1958.
17. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*. Наука, Москва, 1973. [Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V., *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo = Methods of the theory of functions of a complex variable*. Nauka, Moscow, 1973. (in Russian)]
18. Колесников, М.Н., Телятников, И.С., О методах изучения динамики контактирующих литосферных структур. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 4, ч. 1, с. 50–61. [Kolesnikov, M.N., Telyatnikov, I.S., On methods for studying the dynamics of contacting lithospheric structures. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 4, pt. 1, pp. 50–61. (in Russian)]

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Альгариб Эман Талиб Дж., аспирантка кафедры анализа данных и искусственного интеллекта Кубанского государственного университета; e-mail: emanalghareeb38@gmail.com.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бушуева Ольга Алексеевна, аспирантка факультета компьютерных технологий и математики Кубанского государственного университета; e-mail: olyabushuyeva@gmail.com.

Великанов Петр Геннадьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета, доцент кафедры реактивных двигателей и энергетических установок Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru.

Великанова Нина Петровна, д-р техн. наук, профессор кафедры реактивных двигателей и энергетических установок Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева-КАИ; ORCID 0000-0002-3101-3213; e-mail: npvelikanova@mail.ru.

Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-2415-6224; e-mail: gem@kubsu.ru.

Гришко Ольга Альбертовна, студентка магистратуры факультета компьютерных технологий и математики Кубанского государственного университета; e-mail: o_grishko@mail.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, магистрант Кубанского государственного университета; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательской части Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0001-9916-1768; e-mail: zarmv@mail.ru.

Зарецкий Александр Георгиевич, студент Кубанского государственного университета; e-mail: sam_one@mail.ru.

Кириллова Евгения Вадимовна, канд. физ.-мат. наук, профессор Университета прикладных наук Рейн Майн в г. Висбаден; ORCID 0000-0002-6797-0920; e-mail: kirillova@web.de.

Колесников Максим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник научно-исследовательской части Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-7552-0567; e-mail: kolesnikov@kubsu.ru.

Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделированиям Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-9851-2455; e-mail: kostenko@kubsu.ru.

Лапина Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-0145-6822; e-mail: olga_ln@mail.ru.

Ластовенко Ольга Ростиславовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Севастопольского государственного университета; ORCID 0000-0002-4765-7347; e-mail: Lastovenko2005@ramler.ru.

Лисютин Виктор Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры физики Севастопольского государственного университета; ORCID 0000-0003-3363-888X; e-mail: vlisiutin@mail.ru.

Мухин Алексей Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0001-8935-0151; e-mail: muhin@mail.kubsu.ru.

Нестеренко Александр Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики и информационных систем Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-4359-4171; e-mail: agnest@mail.ru.

Никитин Юрий Геннадиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-1232-6123; e-mail: yug@fpm.kubsu.ru.

Осипян Валерий Осипович, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры анализа данных и искусственного интеллекта Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0001-6558-7998; e-mail: v.osippyan@gmail.com.

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-7729-2860; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0001-7944-0006; e-mail: rub_serg@mail.ru.

Снетков Дмитрий Андреевич, инженер Научно-исследовательской части Кубанского государственного университета; e-mail: dimons3s@yandex.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник научно-исследовательской части Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru.

Уафа Самир Баширович, младший научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: uafa70@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-2161-121X; e-mail: vestnik@fpm.kubsu.ru.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ ЖУРНАЛА
«Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества»

Редакция принимает к публикации оригинальные работы на русском и английском языках, содержащие строгие результаты в области математики, физики и механики. Статья не должна быть подана или опубликована в других изданиях, должна обладать научной новизной, написана обезличено и лаконично хорошим русским (английским) языком, быть структурированной, иметь введение и заключение. Статья на английском языке должна сопровождаться переводом на русский.

1) Для рассмотрения статьи в редакцию необходимо представить:
   - 2 экземпляра статьи. Статья должна быть распечатана с одной стороны листа формата A4 в одну колонку с 1,5 интервалом шрифтом Times New Roman 14 пт. Все поля документа по 2,5 см. Объем статьи не должен превышать 20 страниц, включая таблицы, рисунки (не более 7) и список литературы (не более 15–20 источников). Все страницы должны быть пронумерованы.

     В начале статьи после индекса УДК, сначала на русском, затем на английском языке располагается основная информация о статье: заголовок статьи, список авторов с информацией о них, аннотация, ключевые слова (3–7 ключевых слов), информация о финансировании исследований, а также об отсутствии или наличии конфликта интересов, вкладе авторов в процесс написания статьи (идея работы, проведение экспериментов, вычислений, расчетов, анализ данных и написание текста статьи). Подразумевается, что в утверждении текста статьи принимали участие все авторы. Для каждого автора указывается фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание, должность, место работы, ORCID номер и e-mail адрес. Необходимо указать автора, с кем вести переписку, его служебный и домашний адрес с почтовым индексом, а также телефоны для связи. Эта информация не будет опубликована в журнале и нужна редакции только для связи с автором. Указывается дата отсылки статьи. Основной текст статьи начинается с новой страницы. В конце статьи располагается нумерованный список использованных источников в порядке упоминания в статье. Ссылки на источники указываются в тексте статьи в квадратных скобках.
   - идентичный электронный вариант статьи в виде ZIP-архива. В архиве должны быть следующие файлы: файл с текстом статьи (название файла должно совпадать с фамилией первого автора в транслитерации, например, `ivanov`), файлы с рисунками и PDF-версия статьи. Все файлы с рисунками должны называться так же как файл со статьей с добавлением номера. ZIP-архив необходимо загрузить через форму на официальном сайте `vestnik.kubsu.ru/submit` или переслать на e-mail журнала `vestnik@kubsu.ru`.
   - оригинал представления (направления) от учреждения, в котором выполнена работа (выписка из заседания кафедры с рекомендацией к публикации, обращение в свободной форме уполномоченного лица вуза с просьбой о публикации к главному редактору и т.д.).
   - оригинал акта экспертизы о возможности публикации в открытой печати для российских авторов.
   - 2 экземпляра заполненного и подписанного Лицензионного договора. Шаблон Лицензионного договора можно найти на сайте журнала по адресу `vestnik.kubsu.ru`.
2) Процедура принятия и публикации статьи состоит из следующих этапов:
   - после получения редакцией электронного варианта статьи (в случае соответствия оформления статьи настоящим правилам) автор по электронной почте уведомляется о принятии статьи к рассмотрению редколлегией журнала и редакция ожидает поступления оригинала статьи и сопровождающих документов. В процессе рассмотрения редколлегия может отклонить несоответствующую тематике или научному уровню журнала статью.
   - для проведения научной экспертизы работ в качестве рецензентов и экспертов редакцией привлекаются высококвалифицированные ученые и специалисты, обладающие глубокими профессиональными знаниями и опытом работы по конкретному научному направлению.

Рецензентом не может быть автор или соавтор рецензируемой работы. В результате автору по электронной почте высылается рецензия и мотивированное решение о возможности публикации работы (статья рекомендуется к печати, статья рекомендуется к печати после доработки, статья не рекомендуется к печати). Данные рецензентов редакция не раскрывает.

- в случае успешного прохождения рецензирования после научной и редакторской правки автору по электронной почте высылается корректурный оттиск со статьей в формате PDF для утверждения и/или внесения правок.
- после выхода журнала автору по электронной почте высылается уведомление о публикации с гранками или ссылкой на статью в формате PDF. Авторский экземпляр журнала редакцией не предоставляется.

3) Редакция принимает статьи в двух электронных форматах — LaTeX 2_ε или MS Word:
   - LaTeX 2_ε. Статью следует писать с использованием стилевого класса vestnik3 в кодировке Unicode (UTF8) или Windows (CP1251). Старайтесь не использовать свои стилевые файлы и не переопределять существующие команды.
   - MS Word. Не следует использовать знаки принудительного переноса и дополнительные пробелы. Набор формул предпочтительно производить в редакторе формул Equation или MathType (даже для внутритекстовых формул и переменных). Если статья использует разделы, нумерация формул начинается в каждом разделе заново. Если статья содержит рисунки, они должны быть сохранены без подписей как отдельные файлы в их исходном формате: предпочтительные форматы для графиков или диаграмм — `pdf`, `eps`, `wmf`; для фотографий — `png`, `pdf` или `eps`. На все рисунки должны быть ссылки.

   Класс vestnik3 и шаблон для написания статьи в MS Word можно найти на сайте журнала по адресу `vestnik.kubsu.ru`. Там же приведены советы по написанию статей в LaTeX 2_ε и MS Word.

4) Векторные величины и матрицы выделяются прямым полужирным шрифтом. Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки. В русскоязычной типографской традиции целая и дробная части чисел отделяются запятой, а выключные формулы являются равноправными элементами предложения и должны завершаться соответствующими знаками препинания. Следует использовать единицы измерения в соответствии с Международной системой (СИ) и только общепринятые сокращения. Использование сносок нежелательно.

   Рисунки, графики и схемы (обязательно черно-белые или в градациях серого) предоставляются в виде отдельных файлов и должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей. Графики должны быть подписаны по осям. Разрешение полутоновых файлов должно быть не менее 150 dpi, а черно-белых — не менее 300 dpi при соответствующих размерах изображения (не менее 7×7 см). Таблицы должны иметь заголовки, а рисунки — подписи.

   Если русскоязычная аннотация может быть краткой, то англоязычная должна дать зарубежным коллегам более полное представление о статье. Желательный размер англоязычной аннотации — примерно 150-–250 слов. Она должна быть информативной, содержательной, следовать логике описания результатов в статье и написана качественным английским языком. Одним из проверенных вариантов является краткое повторение в аннотации структуры статьи, включающей введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение. Ссылки на формулы, теоремы или источники из статьи в аннотациях недопустимы. Для контроля редакцией необходим перевод расширенной аннотации на русский язык.

   В журнале используется объединенный раздел «Литература [References]», в котором зарубежные источники приводятся на языке оригинала, а национальные — должны сопровождаться переводом всей ссылки на английский язык в квадратных скобках в конце ссылки. Названия книг и журналов выделяются курсивом и транслитерируются, затем через знак «равно» (=) следует перевод названия на английский язык. Для национальных журналов следует указывать их официальное написание на английском языке и только в случае его отсутствия приводить собственный перевод названия. В конце перевода указывается язык публикации, например, (in Russian). Следует избегать ссылок на диссертации и авторефераты диссертаций.

Для обоих типов ссылок в журнале принят немного измененный IEEE-стиль оформления. Сначала следует фамилия автора, затем инициалы. Приводится полный список авторов, сокращения «и др.» и «et al.» недопустимы. Названия журналов и книг отмечаются курсивом. После списка авторов и названия все элементы ссылки отделяются друг от друга запятыми. Для национальных источников в качестве сокращений тома, номера и страниц используется «т.», «№» и «с.», а для зарубежных — «vol.», «iss.» (или «no.») и «pp.» (или «p.»), соответственно. Для книг не требуется общее количество страниц. При наличии DOI-номера он должен быть указан. Редакторы сборника всегда указываются в начале ссылки с добавлением «(ред.)» и «(ed.)» или «(eds.)».

Перед отсылкой статьи следует проверить корректность ссылок. Для повышения научного доверия к статье следует использовать не только национальные источники, а также чаще ссылаться на свежие публикации (не старше 3–5 лет). Недопустимо чрезмерное самоцитирование (1–3 ссылки на согласующиеся с темой статьи предыдущие работы автора).

ПРИМЕРЫ ОФОРМЛЕНИЯ ЛИТЕРАТУРЫ

- *статьи в журналах, сборниках, трудах конференций*:
  1. Иванов, Н. Н., Волны в жидкости. *Гидромеханика*, 2003, т. 1, № 10, с. 13–17. [Ivanov, N. N., Waves in liquids. *Gidromekhanika = Hydromechanics*, 2003, vol. 1, no. 10, pp. 13–17. (in Russian)]
  2. Prescott, S. W., Mulvaney, P., Gold nanorod extinction spectra. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, iss. 12, p. 123504. DOI 10.1063/1.2203212
  3. Шилова, В. П., Источники ЗВ. В: *Тез. докл. XV Междунар. конф. «Проблемы экологии». Москва, 2000*, с. 5–8. [Shilova V. P., Sources of pollutants. In: *Proc. of reports 15th international conf. “Environmental Problems”*, Moscow, 2000, pp. 5–8. (in Russian)]
- *книги*:
  1. Литвинов, А. Н., *Динамика массивных тел.* Москва, Наука, 1982. [Litvinov A. N., *Dinamika massivnykh tel = Dynamics of massive bodies.* Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
  2. Кутепов, В. М., Шеко, А. И., (ред.) *Природные опасности России. Экзогенные геологические процессы.* Москва, КРУК, 2002. [Kutepov, V. M., Sheko, A. I. (eds.), *Prirodnye opasnosti Rossii. Ekzogennye geologicheskie protsessy = Russian natural hazards. Exogenous processes.* Moscow, KRUK, 2002. (in Russian)]
  3. Петров, Е. П., *Мониторинг окружающей среды.* Дис. … канд. хим. наук. Москва, 1984. [Petrov, E. P., *Monitoring okruzhayushchey sredy = Environmental monitoring.* Cand. diss. PhD of Chem. Sci. Moscow, 1984. (in Russian)]
- *электронные ресурсы*:
  1. Международная библиотека математических подпрограмм IMSL (дата обращения 20.02.2018) [IMSL numerical library (accessed 20.02.2018)]. URL: https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries

Дополнительные примеры оформления источников, шаблоны и рекомендации по написанию статей в LaTeX 2$_\varepsilon$ и MS Word можно найти на сайте журнала по адресу `vesnik.kubsu.ru`.

Редколлегия рукописи, а также электронные носители не возвращает.
Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.
Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов публикуемых материалов.
Редакция оставляет за собой право менять заголовки, сокращать тексты статей
и вносить в них необходимую стилистическую правку без согласования с авторами.
Несоблюдение правил оформления рукописи и компьютерного набора задерживает ее публикацию.

РУКОПИСИ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:

350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, Кубанский государственный университет
Редакция журнала «Экологический вестник научных центров ЧЭС»

Тел.: +7 (918) 0886651. E-mail: `vestnik@kubsu.ru`

Сайт: `vestnik.kubsu.ru`

INFORMATION FOR THE AUTHORS OF THE JOURNAL "Ecological Bulletin of Research Centers of The Black Sea Economic Cooperation"

The editorial board accept for publication original work in English and Russian containing rigorous results in mathematics, mechanics and physics. The manuscript should not be submitted or published in other journals, should have scientific novelty, be written in an impersonal and concisely good English (Russian) language, be structured, have an introduction and conclusion.

1) It is necessary to submit to the editorial office:
   - two copies of the manuscript. The manuscript should be printed on one side of an A4 sheet in one column at 1.5 line spacing and 14 pt Times New Roman font. All margins of the document are 2.5 cm. The number of pages in the article should not exceed 20 pages, including tables, figures (no more than 7) and a list of references (no more than 15–20 sources). All pages must be numbered.

     At the beginning is the main information about the article: the title of the article, the list of authors with information about them, abstract, keywords (3–7 keywords), information about research funding, as well as the absence or presence of a conflict of interest, the contribution of authors to the article writing process (the idea of work, conducting experiments, calculations, data analysis and writing the text of the article). It is assumed that all authors took part in the approval of the text of the article. Last name, first name, patronymic, academic degree, title, position, place of work, ORCID number and e-mail address must be given. It is necessary to indicate the author, with whom to correspond, his work and home address with postal code, as well as phone numbers for communication. This information will not be published in the journal and is only needed by the editors to contact the author. There must be a date when the article was sent. The text of the article starts on a new page. At the end of the article is a numbered list of references in the order of references in the article. References to sources are indicated in the text of the article in square brackets.
   - identical electronic version of the article in a ZIP archive. The archive should contain the following files: the file with the text of the manuscript (the file name should match the name of the first author in transliteration, for example, `smith`), files with additional figures and a PDF version of the manuscript. All files with figures should be named the same as the file with the article with the addition of a number. ZIP-archive must be uploaded through the form on the official website `vestnik.kubsu.ru/submit` or sent to e-mail `vestnik@kubsu.ru`.
   - two copies of the completed and signed License Agreement. The License Agreement template can be found on the journal's website at `vestnik.kubsu.ru`.
2) The process for accepting and publishing an article consists of the following steps:
   - after the editorial board receive the electronic version of the manuscript (in case if the manuscript is formatted according to these rules), the author is notified by e-mail about the acceptance of the article for consideration by the editorial board of the journal and the editorial office awaits receipt of the original article and accompanying documents. In the process of consideration, the editorial board may reject a manuscript that does not correspond to the subject or scientific level of the journal.
   - to conduct a scientific examination of papers as reviewers and experts, the editors involve highly qualified scientists and specialists with deep professional knowledge and experience in they scientific area. The reviewer cannot be the author or co-author of the reviewed work. As a result, the review and a reasoned decision on the possibility of publishing the work are sent to the author by e-mail (the manuscript is recommended for publication, the manuscript is recommended for publication after revision, the manuscript is not recommended for publication). The editors do not disclose the data of reviewers.
   - in case of successful peer review, after scientific and editorial corrections, a proofreading print with the article in PDF format is sent to the author by e-mail for approval and / or corrections.

- the author receives an e-mail notification of publication after the publication of the journal with proofs or a link to the article in PDF format. The author's copy of the journal is not provided by the editorial.

3) The editorial board accept articles in LaTeX 2_ε or MS Word:
   - LaTeX 2_ε. The article should be written using style class vestnik3 in the Unicode (UTF-8) or Windows (CP1251) encoding. Try not to use your style files and not to reassign existent commands.
   - MS Word. Don't use forced line breaks and additional spaces. Type of formulas should be carried out only in Equation Editor or MathType (even for inline equations and variables). If in the manuscript sections are used, the numeration of equations begins in every section anew. If the manuscript contains pictures, they must be saved without captions as individual files and not to include in Word. The preferable formats for graphs or diagrams are `eps`, `pdf`, `wmf`; for photos – `eps`, `pdf` or `png`.

   Journal templates for writing manuscripts in LaTeX 2_ε and MS Word formats can be found on the journal website at `vestnik.kubsu.ru`.
4) Vector quantities and matrices are in direct bold type. The article should contain only the most necessary formulas, it is desirable to refuse intermediate calculations. Only those formulas to which there are references are numbered. Units of measurement should be used in accordance with the International System of Units (SI system) and only generally accepted abbreviations. Footnotes are not recommended.

   Figures, graphs and diagrams (necessarily in black and white or in grayscale) are provided as separate files and must be made clearly, in a format that ensures clarity of transmission of all details. Graphs must be labeled along the axes. The resolution of grayscale files must be at least 150 dpi, and for black and white files, at least 300 dpi, with appropriate image sizes (at least 7×7 cm). Tables should have headings and figures should have captions.
5) The desired length of the abstract is approximately 150–250 words. It should be informative, meaningful, follow the logic of the description of the results in the article. One of the tested options is a brief repetition in the annotation of the structure of the article, including the introduction, goals and objectives, methods, results, conclusion. References to formulas, theorems or sources from the article in the annotations are not allowed.

   The References section uses a slightly modified IEEE style for the list of bibliographic references. First comes the author's last name, then the initials. The full list of authors is given, abbreviations "et al." are not allowed. The titles of journals and books are marked in italics. After the list of authors and the title, all elements of the link are separated from each other by commas. The abbreviations for volume, issue, and pages are "vol.", "iss." (or "no.") and "pp." (or "p."), respectively. Books do not require a total number of pages. If there is a DOI number, it must be specified. The editors of the collection are always indicated at the beginning of the reference with the addition of "(ed.)" or "(eds.)".

   You should check the correctness of the links before sending the manuscript. Fresh publications (not older than 3–5 years) should be used to increase the scientific credibility of the article. Excessive self-quoting is unacceptable (1–3 references to previous works of the author consistent with the topic of the article).

THE REFERENCES EXAMPLES

- *articles in journals, collected articles, works of conferences*:

1. Dyson, F.J., Feynman's proof of the Maxwell equations. *Am. J. Phys.*, 1990, vol. 8, iss. 3, pp. 209–211.
2. Prescott, S.W., Mulvaney, P., Gold nanorod extinction spectra. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, no. 12. DOI 10.1063/1.2203212
3. Martikainen, J., Mäkinen, R.A.E., Rossi, T., Toivanen, J., A fictitious domain method for linear elasticity problems. *Proc. of the First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Elsevier, Oxford, 2001, pp. 346–350.

- *books, theses*:

1. Griffiths, D.J., *Introduction to electrodynamics.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
2. Fainstein, S.S., Campbell, S. (eds.) *Readings in urban theory.* Wiley-Blackwell, 2011.
3. Andrews, G.E., The theory of partitions. In: *Encyclopedia of mathematics and its applications. Vol. 2.* Addison-Wesley, 1976.

- *electronic resources*:

1. IMSL numerical library (accessed 20.02.2018). URL: https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries

The additional examples of literature references, templates and recommendations how to type manuscripts in LaTeX 2_ε and MS Word you can find on `vestnik.kubsu.ru`.

Editorial board doesn't give back manuscripts and electronic media.
Fee for postgraduate students to publish manuscripts not charged.
Point of view of editorial stuff can be another than an opinion of authors of published works.
The editorial board reserves the right to change the headers to reduce manuscripts
and make the necessary stylistic editing without the consent of the authors.
Failure to comply with the rules of the manuscript preparation and typesetting delay its publication.

MANUSCRIPTS SHOULD BE SENT TO:

149 Stavropolskaya St, Krasnodar, 350040, Kuban State University
The editorial board of the journal
"Ecological bulletin of scientific centres of the Black Sea Economic Cooperation"
Tel.: +7 918 0886651. E-mail: `vestnik@kubsu.ru`
Web: `vestnik.kubsu.ru`

СОДЕРЖАНИЕ НОМЕРОВ ЗА 2022 ГОД

Журнал
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»
решением Президиума ВАК РФ включен в перечень
ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации, в которых должны быть
опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата и доктора наук.

Научные специальности:
1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика,
1.1.8 Механика деформируемого твердого тела,
1.3.6 Оптика и 1.3.8 Физика конденсированного состояния.

Журнал распространяется по подписке
через каталог «АРЗИ» (подписной индекс Э46477)
и через Научную электронную библиотеку (www.elibrary.ru).
Дополнительную информацию, а также содержание предыдущих номеров,
можно найти в сети Интернет по адресу vestnik.kubsu.ru.

The journal
"Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation"
it is included in the list of the leading peer-reviewed scientific journals
and publications published in the Russian Federation,
in which the main scientific results of dissertations
for the degree of candidate and doctor of sciences should be published.

Scopes: differential equations and mathematical physics, deformable solid mechanics, optics and condensed matter physics.

Journal is distributed by electronic subscription through the ARZI catalogue
(subscription index Э46477) and Russian Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru).
More information, and the contents of previous issues can be found on vestnik.kubsu.ru.

Научно-образовательный и прикладной журнал
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»

Адрес издателя:
Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Адрес редакции:
Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Над номером работали:
А. В. Павлова, Д. А. Хрипков

Подписано в печать 30.11.2022. Выход в свет 05.12.2022
Формат 60×84 $^1/_8$. Усл. печ. л. 12,83. Уч.-изд. л. 12,78. Тираж 1 000 экз.
Гарнитура Computer Modern LH. Макет подготовлен и сверстан
в издательской системе TEX с помощью макропакета LATEX 2_ε
в компьютерном центре редакции. Цена свободная.

Возрастное ограничение: для лиц, старше 12 лет

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре
Кубанского государственного университета.
Краснодар, ул. Ставропольская, 149
Печать цифровая. Заказ № 5116